1 Ряди Фур'є.

У світі багато процесів моделюються за допомогою періодичних функцій. Гармонічне коливання описується функцією:

$$x(t) = asin(\omega t + \varphi),$$

a- це амплітута коливання, ω–це циклічна частота, φ – початкова фаза, періодом для цього процесу буде $\frac{2\pi}{\omega}$.

$x(t) = asin\omega t + bcos\omega t = Asin(\omega t + \varphi)$ – проста гармоніка.

$x(t) = A_1 sin(t + \varphi) + A_2 sin(2t + \varphi) + +... + A_n sin(nt + \varphi)$ – складна гармоніка.

!!!**Задача**: представити періодичну функцію через нескінченну суму простих гармонік.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l}$$

називається рядом Фур'є періоду $2l$. $2l$-періодичну функцію F можна розкласти в ряд Фур'є періоду $2l$ на відрізку $[-l; l]$. Коефіцієнти тоді обчислюються за формулами:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) cos\frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) sin\frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) dx.$$

Якщо f – функція парна, тоді коефіцієнти

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x) cos\frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = 0;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x) dx.$$

Якщо f – функція непарна, тоді

$$a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x) sin\frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$a_0 = 0.$$

В даних випадках користуємось фактом, що для парної функції інтеграл по симетричному відрізку дорівнює двом інтегралам по половині відрізку. А інтеграл від непарної функції по симетричному відрізку дорівнює 0.

Заувага:) Якщо на відрізку $[-l; l]$ функція має скінченну кількість точок розриву першого роду-не лякайтесь- тоді ряд Фур'є в цих точках збігається до наступного значення

$$F(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2},$$

просто зважайте на ці точки розриву.

Приклад 1 *Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$ на a)[-1;1]; b) [0,1] по косинусам кратних дуг з періодом 2;c)[0,1] по синусам кратних дуг з періодом 2.*

Функція $f(x) = x$ є непарною функцією, тому її ряд Фур'є складатиметься тільки з синусів кратних дуг, тому пункт a) і c) співпадають.

Коефіцієнти $a_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$ і $b_n = 2\int_0^1 x sinn\pi x = -2\frac{x}{n\pi}cosn\pi x + 2\frac{sinn\pi x}{(n\pi)^2}|_0^1 = -\frac{2}{n\pi}cosn\pi = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$.

Отже, $x = \sum_1^\infty \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} sinn\pi x, x \in [-1; 1]$.

b) функцію $f(x) = x$ треба розкласти по косинусам кратних дуг на [0,1] з період, це означає, що на відрізку [-1;1] функція повинна бути парна. Отже, якщо маємо $y = f(x), x \in [0; 1]$, тоді $y = f(-x), x \in [-1; 0]$ і тоді на відрізку [-1;1] функція повинна парна, отже $b_n = 0$, а $a_n = 2\int_0^1 x cosn\pi x = 2\frac{x}{n\pi}sinn\pi x + 2\frac{cosn\pi x}{(n\pi)^2}|_0^1 = \frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^2}$.

Оскільки, у знаменнику замість n підставити 0 не можемо, то прийдеться порахувати a_0 окремо, отже, $a_0 = 2\int_0^1 xdx = 1$

Отже, $x = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1)cosn\pi x, x \in [0; 1]$.

Розглянемо приклад з функцією загального виду, яка має точку розриву першого роду на відрізку.

Приклад 2 *Розкласти в ряд Фур'є функцію $y = \begin{cases} -1 & x \in (0, \pi] \\ 2 & x \in [-\pi; 0) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ з періодом 2π.*

В даному прикладі треба порахувати усі коефіцієнти, крім того, відрізок інтегрування потрібно розбити на два, тому

$$a_n = \frac{1}{\pi}(\int\limits_{-\pi}^{0} 2cosnxdx + \int\limits_{0}^{\pi}(-1)cosnxdx) = \frac{1}{\pi}(\frac{2}{n}sinnx|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}sinnx|_0^\pi) = 0.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(\int\limits_{-\pi}^{0} 2dx + \int\limits_{0}^{\pi}(-1)dx) = \frac{1}{\pi}(2\pi - \pi) = 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(\int\limits_{-\pi}^{0} 2sinnxdx + \int\limits_{0}^{\pi}(-1)sinnxdx) = \frac{1}{\pi}(-\frac{2}{n}cosnx|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}cosnx|_0^\pi) = \frac{1}{\pi}(-\frac{2}{n}(1-(-1)^n) + \frac{1}{n}(((-1)^n-1)) = \frac{3}{n\pi}(((
$$

Отже, $y = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{3}{n\pi}(((-1)^n - 1))sinnx, x \in [-\pi; \pi]/\{0\}$.

Точка 0- точка розриву стрибок, чому дорівнює значення ряду у цій точці?

$$F(0) = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}.$$

А значення функції інакше 0, тому функцію розкладаємо в точках її неперервності.

Як же поширити цей розклад на випадок коли відрізок несиметричний?

Розкладатимемо функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ з періодом $T = b - a$. Якщо позначити за $l = \frac{T}{2} = \frac{b-a}{2}$, тоді коефіцієнти для ряду Фур'є в даному випадку рахуватимемо за наступними формулами.

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

В них відрізняються лише межі інтегрування.

Приклад 3 *Розкласти в ряд Фур'є функцію $y = e^x$ на відрізку $[2,4]$ з періодом 2.*
В даному прикладі $l = \frac{2}{2} = 1$. Обчислимо коефіцієнти

$$a_n = \int\limits_2^4 e^x cosn\pi x dx$$

і

$$b_n = \int\limits_2^4 e^x sinn\pi x dx.$$

В даному випадку ми можемо скориставшись комплексними числами і формулою $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$, обчислити швиденько два інтеграли разом(це можна зробити окремо методом інтегрування частинами по два рази кожний інтеграл.)

Отже $a_n + ib_n = \int_2^4 e^x(cosn\pi x + isinn\pi x)dx = \int_2^4 e^{in\pi x + x}dx = \frac{e^{in\pi x+x}}{in\pi+1}|_2^4 = \frac{e^{in\pi 4+4}}{in\pi+1} - \frac{e^{in\pi 2+2}}{in\pi+1} = e^4\frac{cos4n\pi+isin4n\pi}{1+in\pi} - e^2\frac{cos2n\pi+isin2n\pi}{1+in\pi} = (e^4-e^2)\frac{1-in\pi}{1+(n\pi)^2}$.

Отже $a_n = (e^4-e^2)\frac{1}{1+(n\pi)^2}$–дійсна частина комплексного числа,яке отримали.

Відповідно $b_n = (-e^4+e^2)\frac{n\pi}{1+(n\pi)^2}$– уявна частина, коефіцієнт біля i.

Щоб порахувати a_0 достатньо підставити в a_n 0 замість n, отже, $a_0 = (e^4 - e^2)$.

Таким чином, ряд Фур'є для даної функції

$$e^x = \frac{e^4-e^2}{2} + \sum_1^\infty (e^4-e^2)\frac{1}{1+(n\pi)^2}cosn\pi x + (-e^4+e^2)\frac{n\pi}{1+(n\pi)^2}sinn\pi x, x \in [2;4].$$

В фізиці часто використовують і працюють ***з комплексною формою ряду Фур'є.***

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

$c_n = \int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $\quad c_{-n} = \frac{a_n+ib_n}{2}$–амплітудний спектр (відмітимо залежність амплітуди від $\frac{n\pi}{l}$.) $\varphi_n = -argc_n$–фазовий спектр.

Аудиторна робота.
1.Розкласти функцію в дійсний ряд Фур'є періоду T
a) $f(x) = 6x, x \in (-1,2], T = 3$
b)$f(x) = |sinx|$
c)$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x \in [0;1) \\ 4, & x \in [1;3) \end{cases}$
d)$f(x) = 2x-1, x \in [0,1], T = 2$ по косинусам кратних дуг;
e) $f(x) = 2x-1, x \in [0,1], T = 2$ по синусам кратних дуг;
g)$f(x) = 2x-1, x \in [-1,1], T = 2$ розкласти в комплексний ряд Фур'є.

Домашня робота.
1.Розкласти функцію в дійсний ряд Фур'є періоду T a) $f(x) = 6x^2, x \in (-1,2], T = 3$
b)$f(x) = |cos\frac{x}{2}|$
c)$f(x) = \begin{cases} 3-2x, & x \in [0;1) \\ -x, & x \in [1;3) \end{cases}$
d)$f(x) = 2\pi - x, x \in [0,\pi], T = 2\pi$ по косинусам кратних дуг;
e) $f(x) = 2\pi - x, x \in [0,\pi], T = 2\pi$ по синусам кратних дуг;
g)$f(x) = e^{-x}, x \in [-\pi,\pi], T = 2\pi$ розкласти в комплексний ряд Фур'є.

2 Інтеграл Фур'є

З неперіодичними функціями теж хотілось проробити схожу ситуацію, окремих гармонік отримати неможливо, тому переходимо до інтегралів.

Якщо функція f є кусково-монотонною і $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = Q < \infty$, тоді

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\int\limits_{0}^{\infty} cos\omega(t-x)d\omega dt = \int\limits_{0}^{\infty} a(\omega)cos\omega x + b(\omega)sin\omega x d\omega$$

– інтеграл Фур'є, де

коефіцієнти обчислюються за наступними формулами $a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos\omega t dt$, -нульовий, якщо функція непарна.

$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sin\omega t dt$.–нульовий, якщо функція парна.

Аналогічно до ряду Фур'є, якщо x_0 є точкою розриву функції, тоді даний інтеграл збігається до значення

$$\int\limits_{0}^{\infty} a(\omega)cos\omega x_0 + b(\omega)sin\omega x_0 d\omega = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Приклад 4 *Записати інтеграл Фур'є для функції* $y = \begin{cases} -e^x, & x \in (-\infty;0) \\ e^{-x}, & x \in (0;\infty) \end{cases}$

Дана функція непарна, отже $a(\omega) = 0$,

Залишилось обчислити коефіцієнт $b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} -e^{-t}sin\omega t dt$.

Обчислимо інтеграл окремо $\int_0^{\infty} e^{-t}sin\omega t dt = Im\int_0^{\infty} e^{-t}e^{i\omega t}dt = Im\frac{e^{-t+i\omega t}}{-1+i\omega}|_0^{\infty} = Im(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^{-t}e^{i\omega t}}{-1+i\omega} - \frac{e^0}{-1+i\omega}) = Im(0 - \frac{-1-i\omega}{1+\omega^2})$. *Тут скористались тим, що* $sin\varphi = Im e^{i\varphi}$, *коли шукаємо границю, користуємось тим, що* $|e^{i\varphi}| = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = 0$ *добуток нескінчено малої величини і обмеженої величини є нескінченно малою.*

Отже $b(\omega) = \frac{2}{\pi}Im(\frac{1+i\omega}{1+\omega^2}) = \frac{2\omega}{\pi(1+\omega^2)}$.

Отже функція $y = \int_0^{\infty}\frac{2\omega}{\pi(1+\omega^2)}sin\omega x d\omega$.

Точка $x_0 = 0$ *є точкою розриву і інтеграл Фур'є в ній збігається до* $\int_0^{\infty}\frac{2\omega}{\pi(1+\omega^2)}sin\omega 0 d\omega = \frac{-1+1}{2} = 0$.

Перетворення Фур'є у комплексній формі.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

– інтеграл Фур'є в комплексній формі(обернене перетворення Фур'є).

Перетворення Фур'є $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$.

Функія спектральної густини $C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\omega) = \frac{1}{2}(a(\omega) - ib(\omega))$. Записуючи інтеграл Фур'є $f(x) = v.p.\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega$, ми отримуємо розклад функції на комплексні гармоніки $e^{i\omega x}$ з комплексними амплітудами $C(\omega)$ і неперервним спектром частот $\omega \in (-\infty;\infty)$.

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}|F(\omega)|$– амплітудний спектр з неперервним спектром частот ω.

$-argF(\omega)$– фазовий спектр.

Приклад 5 *Записати інтеграл Фур'є в комплексній формі для функкії* $y = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

Знайдемо спектральну характеристику $F(\omega) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}v.p.\int_{-\infty}^{0} e^x e^{i\omega x}$ $\lim\limits_{A\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{x+i\omega x}}{1+i\omega}|_A^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^0}{1+i\omega} = \frac{1-i\omega}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}$.

Інтеграл Фур'є в комплексній формі має вигляд $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}e^{-i\omega x}d\omega$.

Точка $x_0 = 0$ *є точкою розриву першого роду тому інтеграл Фур'є збігається в цій точці до* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}e^{-}$ $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

Знайдемо амплітудний спектр $\sqrt{\frac{2}{\pi}}|F(\omega)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{1+\omega^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{1+\omega^2}}$
Фазовий спектр $-argF(\omega) = arctg\omega$.

Аудиторна робота.

1.Розкласти в інтеграл Фур'є у дійсній та комплексній формах функцію $y = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

2.Розкласти в інтеграл Фур'є у дійсній та комплексній формах функцію $y = e^{-x}sinx, x > 0, y(-x) = -y(x)$.

Домашня робота.

Розкласти в інтеграл Фур'є у дійсній та комплексній формах функцію $y = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 1 \\ e^{-x+1}, & x > 1 \end{cases}, y(-x) = y(x)$.

3 Інтеграли, які залежать від параметрів.

$$F(y) = \int\limits_{a(y)}^{(b(y))} f(x,y)dx --$$

інтеграл, що залежить від параметру.

Якщо функції та їх похідні $a, b, f, a\prime, b\prime, f\prime_y$ неперервні для $y \in [c,d]$, тоді $F\prime(y) = \int_{a(y)}^{(b(y))} f\prime_y(x,y)dx + b\prime(y)f(b(y),y) - a\prime(y)f(a(y),y)$.

Інтеграл Діріхле $\int_0^\infty \frac{sinax}{x}dx = \frac{\pi}{2}sgna$.

Інтеграл Ейлера-Пуасона $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Інтеграли Френеля $\int_0^\infty sinx^2dx = \int_0^\infty cosx^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Аудиторна робота. 3713б,г 3717, 3718б,д, 3726, 3734
3793,3813,3816, 3804

Домашня робота. 3713д, 3718г, 3721.2, 3729,3735,3795,
3815,3805

4 Гамма, Бета-функції. Ейлерові інтеграли.

Гамма-функція

Ейлеровий інтеграл 2-го роду ,Гамма-функція при $\alpha > 0$ – це інтеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Якщо порахувати даний інтеграл частинами, тоді отримаємо наступну властивість

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Дійсно, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = |u = e^{-x} \quad du = -e^{-x} \quad dv = x^{\alpha-1} \quad v = \frac{x^\alpha}{\alpha}| = e^{-x}\frac{x^\alpha}{\alpha}|_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)$.

Отже, якщо n натуральне число і $0 < \alpha < 1$, тоді маємо формулу розширення

$$\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)...\alpha\Gamma(\alpha).$$

Отже, якщо n натуральне число, тоді

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^\infty = 1$.

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = |x = t^2 \quad dx = 2tdt| = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{sin(\pi\alpha)}.$$

Приклад 6 $\int_0^\infty x^4e^{-\sqrt[3]{x}}dx = |x = t^3 \quad dx = 3t^2dt| = \int_0^\infty t^{12}e^{-t}3t^2dt = 3\Gamma(15) = 3 * 14!$

Бета-функкія

Ейлерів інтеграл 1-го роду, Бета-функкція представлена інтегралом

$$B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^{\alpha+\beta}}=B(\beta,\alpha).$$

Щоб довести що Бета-функкція симетрична відносно α,β треба в першому інтегралі зробити заміну $t=1-x, \quad dx=-dt \ B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=-\int_1^0 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dx=B(\beta,\alpha)$.

Зв'язок між двома інтегралами теж отримується заміною: $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = |t=\frac{x}{1-x} \quad x=\frac{t}{1+t} \quad dx=\frac{dt}{(1+t)^2}|=\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt$.

Зв'язок між гамма, бета-функкціями

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Приклад 7 $\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}(1-x^{\frac{1}{3}})^4dx=|x=t^3dx=3t^2dt|=3\int_0^1 t^4(1-t)^4dx=B(5,5)=\frac{\Gamma^2(5)}{\Gamma(10)}=\frac{24^2}{25!}$.

Приклад 8 $\int_2^\infty \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x+5)^3}=|x-2=t|=\int_0^\infty \frac{t^{\frac{5}{3}-1}dt}{(t+7)^3}=\frac{1}{7^{3-\frac{5}{3}}}\int_0^\infty \frac{(\frac{t}{7})^{\frac{5}{3}-1}d\frac{t}{7}}{(\frac{t}{7}+1)^3}=\frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}B(\frac{5}{3},\frac{4}{3})=\frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}\frac{\Gamma(\frac{5}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(3)}=$ $|$*формула розширення для гамма-функції*$|=\frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}\frac{\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})}{2}=|$*формула добутку гамма-функцій, якщо параме*

$\frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}\frac{\frac{2}{9}\pi}{2sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}\frac{\frac{2}{9}\pi}{\sqrt{3}}$.

Приклад 9 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x sin^m x dx=|t=sin^2x \quad dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \quad cosx=\sqrt{1-t} \quad t_{down}=0 \quad t_{up}=sin^2(\frac{\pi}{2})=1|=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt=\frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2};\frac{n+1}{2})$, *m,n>-1.*

Приклад 10 $\int_0^{\frac{\pi}{12}} tg^{\frac{1}{3}}3xdx=|y=3x, \quad dx=\frac{dy}{3} \quad y_{down}=0,|=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{\frac{1}{3}}ydy=|t=sin^2y \quad dy=\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \quad cosy=$ $\sqrt{1-t} \quad t_{down}=0 \quad t_{up}=sin^2(\frac{\pi}{2})=1|=\frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{\frac{1}{3}-1}{2}}(1-t)^{\frac{-\frac{1}{3}-1}{2}}dt=\frac{1}{6}B(\frac{2}{3};\frac{1}{3})=\frac{1}{6}\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Аудиторна робота. № 3843,3845,3855, 3850, 3851, 3856,3857,3859,3861

Домашня робота.

№ 3844,3846,3848, 3853,3860,1. $\int_{-\infty}^0 \sqrt[3]{e^t(1-e^t)^8}dt \quad$ 2. $\int_0^\infty \frac{(x^4+x^2)dx}{(1+x^4)^2}$; 3, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^3xdx}{(1+\frac{1}{2}cosx)^4}$.

ФБЗ. Диференціювання.

5 Частинні похідні першого порядку, диференціал першого порядку.

ОСНОВНЕ ПРАВИЛО ПОШУКУ ДИФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

$$du = u\prime_x dx + u\prime_y dy.$$

!!! Якщо рахуєте похідну по x, тоді y вважаєте сталою, якщо по y, то x вважаєте сталою.

Аудиторна робота.

0. Побудувати лінію або поверхню рівня: $a)z = x + y, b)u = sign(sin(x^2 + y^2 + z^2))$

1. Обчислити частинні похідні першого порядку $u\prime_x, u\prime_y, du$ $a)u(x, y, z) = 3x^4y^2 - z^8 + xz^3; u(x, y) = e^{2x-3\frac{y}{x}}$, $b)u(x, y, z) = sin(x^2y^3 - z^4)$, $c)u(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.

1)easy Обчислити частинні похідні $u\prime_x, u\prime_y, du$ $a)u(x, y) = 2x-3\frac{y}{x}$, $b)u(x, y) = sin(x^2y-4y)$, $c)u(x, y) = \frac{x}{x+y}$.

2) Для функції $u = (x - y)(y - z)(z - x)$перевірити $u\prime_x + u\prime_y + u\prime_z = 0$.

**3181,3185,3190,3212

5.1 Частинні похідні вищих порядків.

Нехай маємо функцію $u = u(x, y)$. Друга частинна похідна по x і по y матиме вигляд $u^{(2)}_{xx} = (u\prime_x)\prime_x, u^{(2)}_{yy} = (u\prime_y)\prime_y$, є ще мішані похідні(якщо другі похідні неперервні, тоді порядок змінних в диференціюванні не важливий) $u^{(2)}_{xy} = u^{(2)}_{yx} = (u\prime_y)\prime_x = (u\prime_x)\prime_y$.

Другий диференціал таким чином шукаємо з формули $d^2u = d(du) = u^{(2)}_{xx}dx^2 + 2u^{(2)}_{xy}dxdy + u^{(2)}_{yy}dy^2 = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2u$.

Диференціал $n-$го порядку можна шукати з формули(можна її вивести за допомогою методу математичної індукції) $d^nu = d(d^{n-1}u) = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^nu$.

Аудиторна робота.

3) Обчислити du, d^2u для функцій $a)x^2 - (2y - 3z)^3$; $b)u = sin(5x + 3xy)$.

4) Обчислити $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial a\partial b}$, для функції $u(x, y, a, b) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$.

5) Обчислити $a)d^3(sin(x^2 + y^2))$, $b)\frac{\partial^3(xln(xy))}{\partial x^2\partial y}$.

6) Знайти $f^{(m+n)}_{x^my^n}(0, 0)$ для функції $f(x, y) = e^x siny$.

7) Обчислити оператор Лапласа $\triangle u = u\prime\prime_{xx} + u\prime\prime_{yy}$ для $u = ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Домашня робота.
3220,3216,3228,3242.
3264,3278,3282a)

6 Диференціювання складної функції.

I) Нехай функція $u = u(t(x, y))$,тоді $u\prime_x = u\prime * t\prime_x$, а $u\prime_y = u\prime * t\prime_y$.

Якщо треба в даному випадку другу мішану(наприклад) частинну похідну, тоді $u\prime\prime_{xy} = (u\prime * t\prime_x)_y = u\prime\prime * (t\prime_x)^2 + u\prime * t\prime\prime_{xy}$.

Приклад 11 *Обчислити диференціальний вираз* $Lu = u\prime_x + u\prime_y$ *для функції* $u = f(y - x)$. *Обчислити мішану похідну другого порядку.*

Для $t = y - x$ *обчислимо частинні похідні по* x *і по* $y.t\prime_x = -1$, $t\prime_y = 1$.*Отже частинні похідні функції будуть* $u\prime_x = f\prime * (-1) = -f\prime$, $u\prime_y = f\prime * (1) = f\prime$. *Тоді* $Lu = u\prime_x + u\prime_y = -f\prime + f\prime = 0$.

Тепер знайдемо $u\prime\prime_{xy} = (-f\prime(t))\prime_y = -f\prime\prime(t) * t\prime_y = -f\prime\prime$.

2. Спосіб. В таких функціях дуже зручно користуватися диференціалами. $df(x-y) = f\prime(t)d(x-y) = f\prime(t)(dx - dy) = f\prime(t)dx - f\prime(t)dy$. *Коефіцієнт біля* dx *це похідна по* x, *коефієнт біля* dy *це похідна по* y.

Другий диференціал буде $d^2f(x - y) = d(f\prime(t)d(x - y)) = df\prime(t)d(x - y) + f\prime(t)d(dx - dy) = f\prime\prime(t)(dx - dy)^2 + f\prime(t)(d^2x - d^2y)$ *тут* $d^2x = d^2y = 0 \neq (dx^2 = d(dx))$, *оскільки друга похідна від змінної* x *або* y *дорівнює 0. Тому* $d^2f(x-y) = f\prime\prime(t)(dx^2-2dxdydy+d^2y)$. *Коефіцієнт біля* $dxdy$ *поділений на 2 і є мішаною частинною похідною другого порядку.*

II). Нехай функція $u = u(a(x,y), b(x,y))$ тоді $\mathbf{u\prime_x = u\prime_a * a\prime_x + u\prime_b * b\prime_x}$.

Приклад 12 *Обчислити диференціальний вираз $Lu = u\prime_x + 2\prime_y$ для функції $u = f(2x - y, \frac{x}{y})$.*

Маємо функції $a(x,y) = 2x - y, b(x,y) = \frac{x}{y}$.iiii $a\prime_x = 2, a\prime_y = -1, b\prime_x = \frac{1}{y}, b\prime_y = -\frac{x}{y^2}$.

Тепер випишемо частинні похідні заданої функції по x $u\prime_x = u\prime_a * a\prime_x + u\prime_b * b\prime_x = u\prime_a * 2 + u\prime_b * \frac{1}{y}$ і по y $u\prime_y = u\prime_a * a\prime_y + u\prime_b * b\prime_y = u\prime_a * (-1) + u\prime_b * (-\frac{x}{y^2})$.

Диференціальний вираз матиме вигляд $Lu = u\prime_x + 2\prime_y = u\prime_a * 2 + u\prime_b * \frac{1}{y} + 2u\prime_a * (-1) + 2u\prime_b * (-\frac{x}{y^2}) = u\prime_b * (\frac{1}{y} - 2\frac{x}{y^2})$.

Аудиторна робота.

1.Обчислити частинні похідні по x та y та виписати перший та другий диференціали для функцій $a)u = f(xy); b)u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

2. Обчислити диференціальний вираз $Lu = xu\prime_x - y\prime_y$ для функції $u = f(x^y - yx)$.

3.Обчислити диференціальний вираз $Lu = u^{(2)}_{xx} + u^{(2)}_{xy}$ для функції $u = u(x - y)$.

4. Перевірити чи буде функія $z = e^y f(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ розв'язком диференціального рівняння $(x^2 - y^2)z\prime_x + xyz\prime_y = xyz$..

5. Обчислити частинні похідні по x та y та виписати перший та другий диференціал для функцій $a)u = u(x^2 - y^2, x + 3y)$; $\quad b)u = f(2x - 3y + 7, xy)$.

6.Обчислити диференціальний вираз $Lu = 3u\prime_x + 2u\prime_y$ для функції $u = f(2x - 3y, x^2 - y^2)$.

7. Обчислити диференціальний вираз $Lu = u^{(2)}_{xx} + u^{(2)}_y y - 2u^{(2)}_{xy}$ для функції $u = f(x - y, x + y)$.

Домашня робота.
3289,3305,3307,3318
3295,3301,3308,3326.

7 Диференціювання неявно заданих функцій. Замінна змінних у рівняннях.

$F(x, y, z(x, y)) = 0$ – функція $z(x, y)$ задана неявно.

$$z_x = -\frac{F\prime_x}{F\prime_z}, \quad z_x = -\frac{F\prime_x}{F\prime_z}.$$

Аудиторна робота.
3385,3390,3395,3421
3431, 3434,3440,3481
Домашня робота.
3384,3391,3396,3408,3425
3432,3435,3442,3482,3484

8 Локальні, глобальні та умовні екстремуми явно заданих ФБЗ.

Нехай ми маємо такий вираз $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$, він є так званою квадратичною формою і можна визначити чи ця форма додатньовизначена,від'ємновизначена чи знакозмінна. Будуємо з її вигляду матрицю, що відповідає цій квадратичній формі по діагоналі виписуємо коефіцієнти a_{ii}, а на інших місцях пишемо "напівкоефіцієнти"$\frac{a_{ij}}{2}$. Обчислюємо визначники всіх матриць по основній діагоналі. Наприклад, якщо в нас форма має вигляд $2dx_1^2 + dx_2^2 - 3dx_3^2 + 6dx_1dx_3 - 4dx_2dx_3$, тоді її матриця матиме вигляд $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Щоб дізнатися знак форми, треба порахувати визначники з основною діагоналлю: $\delta_1 = a_{11} = 2 > 0, \quad \delta_2 = det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0, \delta_3 = det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -23 < 0$.

Якщо $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$ тоді форма *додатньовизначена.*
Якщо $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0$ тоді форма *від'ємновизначена.*
у іншому випадку форма *знакозмінна.*
Якщо якийсь з визначників =0, тоді форма *невизначена.*

Пошук локального екстремума ФБЗ:

1) Виписуємо частинні похідні першого порядку і прирівнюємо до 0. Шукаємо критичні точки(де похідні =0 і не існують.)

2)Виписуємо другий диференціал, підставляємо в нього кожну критичну точку і для кожної форми визначаємо знак за допомогою визначників. Якщо форма додатньовизначена, тоді точка **локального мінімуму** якщо від'ємновизначена– то точка **локального максимуму**, якщо знакозмінна форма, то точка **не є екстре** якщо невизначена форма, то перевіряємо точку на максимум і мінімум за їх означеннями.

Умовні екстремуми. Задані функція $u = u(x, y, z)$ і умови $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$. Задача: обчислити екстремуми функцій коли виконуються умови.

1) Виписуємо функцію Лагранжа: $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = u + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$.

2)Розв'язуємо систему з рівняннями $L\prime_x = 0; L\prime_y = 0, L\prime_z = 0, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$. Знаходимо критичні точки.

3)Обчислюємо d^2L в критичних точках, і дізнаємося знак відповідної форми. Якщо форма додатньовизначена, тоді точка **локального мінімуму**, якщо від'ємновизначена– то точка **локального максимуму**, якщо знакозмінна форма, то точка **не є екстремумом**, якщо невизначена форма, то перевіряємо точку на максимум і мінімум за їх означеннями.

Аудиторна робота.

1.Дослідити наступні форми на знак: $a)9x^2 + 4dxdy + dy^2;\quad b)5dx^2 - 4dxdy + dy^2;\quad c)9x^2 + 8dxdy + dy^2;\quad d) - 9x^2 + 4dxdy - dy^2; e)4dxdy$.

2. Знайти локальні екстремуми функції $a)u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z; b)u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

3. Дослідити на екстремуми функції:

a)$u(x, y) = x^3 - x^2y - 3lny$.

b)$u(x, y) = x^4 + y^3 - 3xy^2$.

4. Обчислити екстремуми функції a) $u = x^2 + y^2$ при умові $2x + y - 5 = 0$.

b) $u(x, y) = xy$, при умові $x^2 + y^2 = 2$.

c)$u(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$, при умові $x - y + z = 1$.

5. Визначити глобальні екстремуми функції $z = x - 2y - 3$ в області $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$.

Домашня робота. 3626,3642,3656,3659, 3677.

9 Подвійні інтеграли.

$\iint_G f(x,y)dxdy$ – –подвійний інтеграл, де G область інтегрування, f інтегровна функція, $dxdy$-елемент площі.

Щоб обчислити такий інтеграл, потрібно перейти до повторювального інтегралу, для цього розставимо межі, записуємо перший (завнішній) інтеграл з числовими межами (вибираємо як змінюється одна із змінних)і другий інтеграл межі можуть бути функціями(як в області змінюється друга змінна від одної кривої до другої кривої.)

$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy)dx$.

Іноді треба змінити систему координат $x = x(u,v), y = y(u,v), u, v \in T$ тоді $\iint_T f(u,v)|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$.

Для подвійних інтегралів важливою є полярна система $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi, r, \varphi \in T$ тоді $\iint_T f(r,\varphi)rdrd\varphi$.

Звідки в інтегралі з'явився $rdrd\varphi$, це і є $dxdy = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}|drd\varphi$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = det\begin{pmatrix} x\prime_r & y\prime_r \\ x\prime_\varphi & y\prime_\varphi \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -rsin\varphi & rcos\varphi \end{pmatrix} = r.$$

!!Отже якщо ви перейшли до полярної системи $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi, r, \varphi \in T$, тоді не забувайте, що $dxdy = rdrd\varphi$.

Аудиторна робота.

Обчислити інтеграли

1.$\iint_D (x+y)dxdy$, D-квадрат з центром в т. (0 ;0) і стороною довжини 2.

2. $\iint_D \frac{dxdy}{1+x-y}$, D:$\{x \in [0;1], 0 \le y \le x\}$.

3. Обчислити масу пластинки трикутника з вершинами (0;0),(1;1),(2;0) з густиною $f(x,y) = sin(x-y)$.

4. Обчислити масу пластинки паралелограма з вершинами (0;0),(1;1),(2;1),(1;0) з густиною $f(x,y) = e^{3y-2x}$

5.$\iint_D ysin(yx)dxdy$, $\partial D = \{xy = 1, y = 0, 1 \le x \le 2\}$.

6.Змініть порядок інтегрування в інтегралі $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$.

7. Обчисліть площу кільця $1 \le (x-2)^2 + y^2 \le 4$.

8.Обчисліть площу фігури обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

9.$\iint_D (xy+1)dxdy$ по області $D : 1 \le xy \le 4, 2x \le y \le 4x$.

Домашня робота.

3917, 3920, 3926, 3945, 3955, 3968,3964.

10 Криволінійні інтеграли 1-го роду.

Криволінійним інтегралом 1-го роду називається

$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)dl,$$

де Γ – крива по якій інтегрують, dl– елемент довжини, який обчислюється в залежності від задання кривої Γ.

Розглянемо варіанти, коли Γ задана на площині, тобто змінних тільки 2: x,y.

* Якщо крива задана параметрично, тобто $\Gamma = \{(x,y)|x = x(t), y = y(t), \quad t \in [a;b]\}$, тоді $dl = \sqrt{(x`(t))^2 + (y`(t))^2}dt$. Таким чином будемо обчислювати наступний інтеграл

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x`(t))^2 + (y`(t))^2}dt.$$

** Якщо крива $\Gamma = \{(x,y)|y = y(x), \quad x \in [a;b]\}$, тоді $dl = \sqrt{1 + (y`(x))^2}dx$. Таким чином будемо обчислювати наступний інтеграл

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + (y`(x))^2}dx.$$

Коли Γ задана в просторі, тобто змінних 3: x,y,z, тоді формули дуже схожі треба додавати під коренем ще $(z'(t))^2$.

Властивості криволінійного інтегралу 1-го роду:

(1)

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\Gamma_{BA}} f(x,y,z)dl$$

– результат інтегрування не залежить від напрямку інтегрування.

(2)$\int_{\Gamma_{AB}} af(x,y,z) + bg(x,y,z)dl = a\int_{\Gamma_{AB}} f(x,y,z)dl + b\int_{\Gamma_{AB}} g(x,y,z)dl$.

(3)$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} f(x,y,z)dl = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)dl + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)dl$. Якщо у вас крива з кутовою точкою, то обов'язково розбивайте її на дві.

(4) $\int_{\Gamma} f(x,y,z)dl$– це маса дротини яка описується як крива Γ з густиною $f(x,y,z)$.

(5) $\int_{\Gamma_{AB}} dl$ довжина кривої Γ_{AB}.

Приклад 13 *Обчислити довжину кола з центром в 0 радіуса 2.*

Коло можна описати параметрично, якщо за параметр взяти кут нахилу до осі OX $\Gamma = \{(x,y)|x = 2cost, y = 2sint, t\in[0;2\pi)\}$.

Потрібно обчислити довжину, тому обчислюємо інтеграл $\oint_{\Gamma} dl$. *Спершу порахуємо елемент довжини* $dl = \sqrt{(-2sint)^2 + 4cos^2t}dt = 2dt$. *Отже* $l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi$.

Приклад 14 *Обчислити* $I = \oint_{\Gamma}(y-x)dl$, *де* $\Gamma = y = x^2, x\in[0,1), y = 2-x, x\in[1;2], y = 0, x\in(0;2)$*- криволінійний трикутник.*

Даний трикутник будемо інтегрувати по трьох сторонах окремо, а відповідь це буде сума трьох результатів.

Отже, рахуємо $I_1 = \int_{y=x^2, x\in[0,1)}(y-x)dl_1$, $dl_1 = \sqrt{1+(2x)^2}dx$ $I_1 = \int_0^1(x^2-x)\sqrt{1+4x^2}dx = \int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}dx$ $\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx = i_{11} - i_{12}$,

$i_{12} = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}dx^2 = \frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{12}(5)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}$.

$i_{11} = \int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}dx = |$*3-тя підстановка Чебишева, але треба спочатку перетворити*$| = \int_0^1 x^3\sqrt{x^{-2}+}$ $|x^{-2}+4 = t^2, \quad x = (t^2-4)^{-\frac{1}{2}}, dx = -t(t^2-4)^{-\frac{3}{2}}dt, t_d = \infty, t_u = \sqrt{5}| = \int_{\sqrt{5}}^{\infty}\frac{t^2dt}{(t^2-4)^3} = |u = t?du = dt, dv = \frac{t}{(t^2-4)^3dt, v = -\frac{1}{4}\frac{1}{(t^2-4)^2}}| = -\frac{t}{4(t^2-4)^2}|_{\sqrt{5}}^{\infty} + \frac{1}{4}\int_{\sqrt{5}}^{\infty}\frac{dt}{(t^2-4)^2} = |MHK| = -\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}(\frac{1}{16}\int_{\sqrt{5}}^{\infty}\frac{dt}{(t-2)^2} + \frac{1}{16}\int_{\sqrt{5}}^{\infty}\frac{dt}{(t+2)^2} - \frac{1}{32}\int_{\sqrt{5}}^{\infty}\frac{dt}{(t-2)} + \frac{1}{32}\int_{\sqrt{5}}^{\infty}\frac{dt}{(t+2)}) = -\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}(-\frac{1}{16(t-2)} - \frac{1}{16(t+2)} + \frac{1}{32}ln\frac{|t+2|}{|t-2|})|_{\sqrt{5}}^{\infty} = -\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}(\frac{1}{16(\sqrt{5}-2)} + \frac{1}{16(\sqrt{5}+2)} - \frac{1}{32}ln\frac{|\sqrt{5}+2|}{|\sqrt{5}-2|})$.

Отже

$$I_1 = -\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}(\frac{1}{16(\sqrt{5}-2)} + \frac{1}{16(\sqrt{5}+2)} - \frac{1}{32}ln\frac{|\sqrt{5}+2|}{|\sqrt{5}-2|}) - \frac{1}{12}(5)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}.$$

Рахуємо криволінійний інтеграл по другій стороні: $I_2 = \int_{y=2-x, x\in[1,2)}(y-x)dl_2$, $dl_2 = \sqrt{1+(-1)^2}dx = \sqrt{2}dx$, *тоді* $I_2 = \int_1^2(2-x-x)\sqrt{2}dx = 2x - 2\frac{x^2}{2}|_1^2 = 2 - 3 = -1$.

Залишилася третя сторона $I_3 = \int_{y=0, x\in[0,2)}(y-x)dl_3$, *порахуємо елемент довжини* $\sqrt{1+0}dx = dx$. $I_3 = \int_0^2(-x)dx = -2$.

Отже $I = \int_{\Gamma}(y-x)dl = -\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}(\frac{1}{16(\sqrt{5}-2)} + \frac{1}{16(\sqrt{5}+2)} - \frac{1}{32}ln\frac{|\sqrt{5}+2|}{|\sqrt{5}-2|}) - 3$.

Розглянемо приклад в просторі:

Приклад 15 *Обчислити масу дротини з густиною* $f(x,y,z) = z$ *дротина зігнута по кривій* $\Gamma = \{(x,y,z)|x = 4cost, y = 4sint, z = 4t, t\in[0,2\pi]\}$.

Масу порахуємо за допомогою криволінійного інтеграла $m(\Gamma) = \int_{\Gamma} f(x,y,z)dl$.

В даному прикладі порахуємо $dl = \sqrt{(-4sint)^2 + (4cost)^2 + 16}dt = 4\sqrt{2}dt$.

Отже $m = \int_0^{2\pi} 4t4\sqrt{2}dt = 16\sqrt{2}\frac{t^2}{2}|_0^{2\pi} = 32\sqrt{2}\pi^2$.

Аудиторна робота.

Обчислити криволінійні інтеграли: 1)$\oint_\Gamma \frac{dl}{x+y+3}$, Γ – трикутник з вершинами $A=(-1;0), B=(1;0), C=(0;2)$.

2)$\oint_\Gamma xdl$, $\Gamma : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

3) Обчислити довжину кривої $\Gamma=\{(x,y,z) : x=t, y=\sqrt{3}t^2, z=2t^3, t\in[0;1]\}$.

4) 4222, 4226, 4230, 4244.1 **Домашня робота**.

Обчислити криволінійні інтеграли: 1)$\oint_\Gamma \frac{dl}{y-x+3}$, Γ – трикутник з вершинами $A=(0;0), B=(2;1), C=(2;4)$.

2)$\oint_\Gamma (x^2+y^2)dl$, $\Gamma : x^2+y^2=2y$.

3) Обчислити довжину кривої $\Gamma=\{(x,y) : y=\sqrt{(4-x)^3}, x\in[-5;4]\}$. 4)4242,4239,4224.

11 Криволінійний інтеграл другого роду.

Криволінійним інтегралом 2-го роду називається

$$\int\limits_{\Gamma_+} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz,$$

де Γ_+ – додатньо орієнтована крива без точок самоперетину, по якій інтегрують з $\mathbb{R}^3$,

$$\int\limits_{\Gamma_+} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

де Γ_+ – додатньо орієнтована крива без точок самоперетину, по якій інтегрують з $\mathbb{R}^2$.

Розглянемо варіанти, коли Γ задана на площині, тобто змінних тільки 2: x,y.

* Якщо крива задана параметрично, тобто $\Gamma=\{(x,y)|x=x(t), y=y(t), \quad t\in[a;b]\}$, розглядаємо додатню орієнтацію кривої– у напрямку зростання параметра, тоді будемо обчислювати наступний інтеграл

$$\int\limits_{\Gamma_+} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b (P(x(t),y(t))x`(t)+Q(x(t),y(t))y`(t)dt.$$

Приклад 16 *Обчислити роботу сили $(y;x)$ якщо матеріальна точка рухається по верхньому півколу радіуса 2, з центром в 0 в протигодинниковому напрямку.*

Отже, обчислити треба $\int_{\Gamma_+}=\int_{x=2cost,\quad y=2sint,t\in[0,\pi]} ydx+xdy=\int_0^\pi(2sint(-2sint)+(2cost)^2)dt=\int_0^\pi 4cos2tdt=2sin2t|_0^\pi=0$.

** Якщо крива $\Gamma=\{(x,y)|y=y(x), \quad x\in[a;b]\}$, у напрямку зростання змінної x, тоді будемо обчислювати наступний інтеграл

$$\int\limits_{\Gamma_+} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b (P(x,y(x)))+Q(x,y(x))y`(x)dx.$$

Приклад 17 *Обчислити $\oint_{\Gamma_+} xdx+ydy$, де $\Gamma=\{y=x^2, x\in[0,1), y=2-x, x\in[1;2], y=0, x\in(0;2)\}$-криволінійний трикутник, проходимо протигодинникової стрілки.*

$\oint_{\Gamma_+} xdx+ydy=\int_{\Gamma 1_+} xdx+ydy+\int_{\Gamma 2_+} xdx+ydy+\int_{\Gamma 3_+} xdx+ydy=I_1+I_2+I_3$.

$I_1=\int_{\{y=0,x\in[0;2]\}_+} xdx+ydy=\int_0^2 xdx=2$.

$I_2=\int_{\{y=2-x,x\in[2;1]\}_+} xdx+ydy=\int_2^1(x-(2-x))dx=2\frac{x^2}{2}-2x|_2^1=-3-(2-4)=-1$.

$I_3=\int_{\{y=x^2,x\in[1;0]\}_+} xdx+ydy=\int_1^0(x+2x^3)dx=-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}=-1$.

$\oint_{\Gamma_+} xdx+ydy=2-1-1=0$.

***Коли $\Gamma = \{(x, y, z)|x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad t \in [a; b]\}$у напрямку зростання параметра, задана в просторі, тобто змінних 3: x,y,z, тоді формули

$$\int\limits_{\Gamma_+} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz = \int\limits_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x`(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y`(t)dt+R(x(t),y(t),z(t))$$

Приклад 18 *Обчислити інтеграл* $\int_{\Gamma_+}(x-y)dx-dy+(x^2+y^2)dz$, *де* $\Gamma = \{(x,y,z)|x = 4cost, y = 4sint, z = 4t, t \in [0, 2\pi]\}$.

$\int_{\Gamma_+}(x-y)dx - dy + (x^2+y^2)dz = int_0^{2\pi}((4cost - 4sint)(-4sint) - 4cost + 64)dt = 8cos2t + 4\frac{t}{2} - 4\frac{sin2t}{2} - 4sint + 64t|_0^{2\pi} = 4\pi + 128\pi = 132\pi$.

Властивості криволінійного інтегралу 2-го роду:

(1)

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\Gamma_{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

– результат інтегрування залежить від напрямку інтегрування.

!!!dxdy=-dydx!!!-коли крива орієнтована.

(2)$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy + \int_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Якщо у вас крива з кутовою точкою, то обов'язково розбивайте її на дві.

(3) $\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$– це робота сили $\vec{F} = (P, Q)$ прикладеної до матеріальної точки, яка рухається по кривій Γ_{AB}.

(5) $\oint_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$– це циркуляція сили $\vec{F} = (P, Q)$ прикладеної до матеріальної точки, яка рухається по замкненій кривій Γ_+ (рухаєшся в додатньому напрямку по кривій і замкнена область залишається завжди по ліву руку).

Повний диференціал. Вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом,якщо можна підібрати функцію таку що $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF = F`_x dx + F`_y dy$, це можливо тоді, коли $F``_{xy} = F``yx \Leftrightarrow P`_y = Q`_x$.

Приклад 19 *Наприклад,* $xdy + ydx$ *це повний диференціал.* $P = y, P`_y = 1$ *аналогічно* $Q = x, Q`_x = 1$ *отже* $P`_y = Q`_x = 1$. *З іншої сторони, якщо трішки подумати, то можна одразу написати, що* $xdy + ydx = d(xy)$ *Отже,* $F(x,y) = xy$. *Ця функція є потенціалом векторного поля* $\vec{a} = (x, y)$.

А розглянемо $-xdy + ydx.P = y, P`_y = 1$ *аналогічно* $Q = -x, Q`_x = -1$ *отже* $P`_y =\neq Q`_x$. *Вираз не є повним диференціалом і потенціал знайти для такого поля неможливо.*

Твердження. Якщо підінтегральний вираз криволінійного інтегралу є повним диференціалом $Pdx + Qdy = dF$, тоді а) якщо інтеграл по замкненій кривій, тоді він дорівнює 0 $\oint_\Gamma Pdx + Qdy = 0$,

б)якщо від точки А до точки В, тоді значення інтеграла не залежить від вибору кривої інтегрування,

в) $\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_A)dx + \int_{y_A}^{y_B} Q(x_B, y)dy = F(B) - F(A)$.

Приклад 20 *Обчислити* $\oint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1} ydx + xdy$.

Ви можете обчислити інтеграл парметризувавши еліпс $x = 3cost, y = 2sint, t \in [0; 2\pi]$.

А можна перевірити чи буде підінтегральна функція повним диференціалом. Так вона є повним диференціалом. В попередньому прикладі вже це довели. Отже даний інтеграл дорівнює 0.

Приклад 21 *Обчислити* $\oint_{(AB)} ydx + xdy, A = (-1; 2)B = (2, 3)$.

Оскільки, підінтегральна функція є повним диференціалом, то ми можемо інтегрувати по будь-якій кривій з точки A до точки B.

Наприклад, можемо знайти, яка пряма проходить через ці дві точки: $\frac{y-2}{3-2} = \frac{x+1}{2+1}, y = \frac{7}{3} + \frac{x}{3}$. *І порахувати інтеграл по цій прямій* $x \in [-1; 2]$.

А можемо порахувати $\oint_{(AB)} ydx + xdy = \int_{-1}^{2} 2dx + \int_2^3 2dy = 2 * 3 + 2 * (3 - 2) = 8$.

Або можемо порахувати за допомогою потенціалу: $\oint_{(AB)} ydx + xdy = \int_{(-1;2)}^{(2;3)} d(xy) = xy|_{(-1;2)}^{(2;3)} = 2 * 3 - (-2) = 8$.

Приклад 22 *Знайти потенціал поля* $(-y^2 sinx + \frac{1}{y} + ye^{xy}; 2ycosx - \frac{x}{y^2} + xy^{xy})$.

Спочатку перевіримо чи зможемо ми знайти потенціал для цього поля. Частинні похідні $P\prime_y = -2ysinx - \frac{1}{y^2} + e^{xy} + yxe^{xy}, Q\prime_x = -2ysinx - \frac{1}{y^2} + e^{xy} + yxe^{xy}$ *рівні, отже вираз* $(-y^2sinx + \frac{1}{y} + ye^{xy})dx + (2ycosx - \frac{x}{y^2} + xy^{xy})dy$ *є повним диференціалом, як же знайти потенціал?*

Для цього обчислимо криволінійний інтеграл 2-го роду від якоїсь початкової довільної точки наприклад(0;0) до точки (X;Y). В даному випадку ділення на y присутнє, тому 0 не підходить візьмемо точку(0;1). $\int_{(0;1)}^{(X;Y)}(-y^2sinx + \frac{1}{y} + ye^{xy})dx + (2ycosx - \frac{x}{y^2} + xe^{xy})dy = \int_0^X(-1^2sinx + \frac{1}{1} + 1e^{x1})dx + \int_1^Y(2ycosX - \frac{X}{y^2} + Xe^{Xy})dy = cosX + X + e^X - 1 + cosX(Y^2-1) + \frac{X}{Y} - x + e^{XY} - e^X = U(X,Y) - U(1,0).$

Формула Гріна.

Розглянемо криволінійний інтеграл на площині по замкненій кривій:

$$\oint\limits_{\Gamma_+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Якщо $P, Q, P\prime_y, Q\prime_x$ неперервні в замкненій множині D обмеженій кривою Γ_+, тоді

$$\oint\limits_{\Gamma_+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D (Q\prime_x - P\prime_y)dxdy.$$

Приклад 23 *Обчислимо інтеграл* $\oint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1} ydx + xdy = \iint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1}(1-1)dxdy = 0.$

Приклад 24 *Обчислити інтеграл* $\oint_{x^2+y^2=9}(x-2y)dx + (y-2x)dy.$

Перший спосіб: параметризуємо коло $x = 3cost, y = 3sint$

$\oint_{x^2+y^2=9}(x-2y)dx + (y-2x)dy = \int_0^{2\pi}((9cost - 6sint)(-3sint) + (3sint - 6cost)3cost)dt = \int_0^{2\pi} 18cos2tdt = 9sin2t|_0^{2\pi} = 0.$

Другий спосіб Формула Гріна. Функції і їх похідні неперервні в середині круга, тому $\oint_{x^2+y^2=9}(x-2y)dx + (y-2x)dy = \iint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1}(-2-(-2))dxdy = 0.$

Третій спосіб: перевіряємо чи повний диференціал: $P\prime_y = Q\prime_x = -2$. *Інтеграл по замкненій кривій від повного диференціала дорівнює 0.*

Приклад 25 *Розв'язати рівняння* $(sin2x - 2cos(x+y))dx - 2cos(x+y)dy = 0.$

Аудиторна робота.

1)Обчислити криволінійний інтеграл безпосередньо і за формулою Гріна де можна.

a)$\int_{\Gamma_-} y^2dx - x^2dy$, де $\Gamma = \{y = x, x \in [0;1], y = 2x - x^2, x \in [1;2], y = 0, x \in [2;0].\}$

b)$\int_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1}(x^2-y)dx + (y^2+x)dy.$

c))$\int_{x^2+y^2=4} \frac{xdx-ydy}{x^2+y^2}$.

d)$\int_{(x-4)^2+(y-4)^2=4} \frac{xdx-ydy}{x^2+y^2}$. 2. Обчислити $\int_{\Gamma_+} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ по трикутнику з вершинами A=(-1;-1), B=(0,1), C=(1;-1) обхід протигодинниковий напрямок.

3. Обчислити інтеграли по просторовим кривим

a)$\int_{\Gamma_+}(y^2-z^2)dx + 2yzdy + x^2dz$, де криву $\Gamma = \{x = t, y = t^2, z = t^3, t \in (0,1)\}$ обходимо у напрямку зростання параметра.

б)Обчислити циркуляцію $\int_{\Gamma_+}(y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz$, вздовж межі сферичного трикутника, утвореного перетином одиничної сфери з центром (0;0;0) з координатними площинами в першому октанті, проходиться протигодинникової стрілки.

4.Пересвідчившись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом обчислити наступні інтеграли:

a) $\int_{(-2;3)}^{(4,1)}(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}).$

b)$\int_{(-\pi;\frac{1}{\sqrt{2}})}^{(1,\sqrt{\pi})}(x^3 + y^2sin(xy^2))dx + (y - 2yxsin(y^2x))dy.$

c)$\int_{(1;2;-4)}^{(3;-4;5)}(y + 2zx + yx^{y-1})dx + (x + x^y lnx)dy + (x^2+z^3)dz.$

5) Знайти первісну функції: $dz = \left(\frac{1}{x} - 3x^2\sqrt{y} - 2xsin(x^2+y^2)\right)dx - \left(\frac{1}{y} + \frac{x^3}{2\sqrt{y}} + 2ysin(x^2+y^2)\right)dy.$

Домашня робота.
4253, 4255,4257,
4263, 4266,
4280,4285,4290, 4295.
4297,4298, 4303

12 Потрійний інтеграл

Потрійним інтегралом називають інтеграл $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ де V – поверхня по якій інтегрують, f — — інтегровна функція, $dxdydz$ — — елемент об'єму.

Щоб рахувати такі інтеграли треба проектувати тіло на одну з координатних площин і виписувати як змінюється яка змінна, таким чином переходимо до повторювального інтегралу.

Аудиторна робота. 1. Обчислити $\iiint_{x+y+z\leq 1, x,y,z\geq 0} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^4}$.

2. Розставити в інтегралі межі будь-яким способом $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$
a) $V = \{x^2+y^2 = 1, z\in[0,1]\}$;
b)$V = \{x^2+y^2 = 1-z, z\in[0,1]\}$;
c) $V = \{\sqrt{x^2+y^2} = z, z\in[0,1]\}$;
3. Обчислити $\iiint_V xyzdxdydz$, де V піраміда з вершинами $(0;0;0),(1;0;1),(0;1;1),(1;0;0),(0;1;0)$.
4.Обчислити об'єм еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 4$.
5. Обчислити $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 2z} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz.$
6. Обчислити $\iiint_{1-(x^2+y^2)\geq z^2, 0\leq z\leq 1} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz.$
7.Обчислити $\iiint_{x^2+y^2\leq 2-z, 0\leq z\leq 2} e^{x^2+y^2}dxdydz.$

Домашня робота.
4078,4080,4087,4091,4106,4176.

13 Поверхневі інтеграли 1-го роду.

Поверхневим інтегралом 1-го роду називається

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds,$$

де $S-$ поверхня по якій інтегрують, f- інтегровна по поверхні функція, ds- елемент площі поверхні.

В залежності від того як описана поверхня S рахується ds.

* Нехай $D = np_{X0Y}S$ і $S = \{(x,y,z)|z = z(x,y)\}$, тоді $ds = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$ і $\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy.$

Приклад 26 *Обчислити масу однорідної поверхні $z = x^2+y^2$ що відтинається поверхнею $z = 1$.*

Для обчислення маси однорідної пластини можемо скористатися поверхневим інтегралом 1-го роду $m = \iint_{z=x^2+y^2, 0\leq z\leq 1} ds$. Елемент площі $ds = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy, (x,y): x^2+y^2\leq 1$. Коли я бачу круг одразу думаю про полярну систему координат $x = rcos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$, нам потрібен ще якобіан $dxdy = rdrd\varphi$ і радіус $r\in[0;1]$, а кут змінюється $\varphi\in[0,2\pi]$. Отже маса дорівнює $m = \iint_{z=x^2+y^2, 0\leq z\leq 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$ $\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1+4r^2}rdrd\varphi = 2\pi\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}}-1).$

** Якщо варто перейти до іншої системи координат при описі поверхні $S: x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v)\in D$, тоді треба обчислити додаткові велечини:
$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$
$F = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$
$G = (x'_u)(x'_v) + (y'_u)(y'_v) + (z'_u)(z'_v).$
Тоді елемент площі обчислюватиметься за формулою $ds = \sqrt{EG-F^2}$ і інтеграл матиме вигляд $\iint_S f(x,y,$ $\iint_D f(u,v)\sqrt{EG-F^2}dudv.$

Приклад 27 *Попередній приклад можна було б розв'язати одразу в циліндричній системі координат:* $x = rcos\varphi,\quad y = r\sin\varphi, z = z$. *Ми інтегруємо по поверхні* $z = x^2 + y^2 = r^2$. *Отже наша поверхня* $S : x = rcos\varphi,\quad y = r\sin\varphi, z = r^2, r \in [0;1], \varphi \in [0;2\pi]$.

Тоді щоб порахувати ds обчислюємо чому дорівнюють квадрат вектора частинних похідних усіх змінних по змінній r: $E = (x\prime_r)^2 + (y\prime_r)^2 + (z\prime_r)^2 = cos^2\varphi + sin^2\varphi + (2r)^2 = 1 + 4r^2$,

обчислюємо чому дорівнюють квадрат вектора частинних похідних усіх змінних по змінній φ: $F = (x\prime_\varphi)^2 + (y\prime_\varphi)^2 + (z\prime_\varphi)^2 = r^2sin^2\varphi + r^2cos^2\varphi = r^2$.

А тепер скалярний добуток цих двох векторів:$E = (x\prime_r)x\prime_\varphi + (y\prime_r)y\prime_\varphi + (z\prime_r)(z\prime_\varphi) = -rsin\varphi cos\varphi + rcos\varphi\sin\varphi + (2r)^2 * 0 = 0$.

Отже, $ds = \sqrt{r^2(1 + 4r^2)}drd\varphi$.

Тому маса пластини з попереднього прикладу дорівнює $m = \iint_{z=x^2+y^2, 0\le z\le 1} ds \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}drd\varphi = 2\pi\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1)$.

Аудиторна робота. 1. Обчислити масу пластини $S : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x, y, z \ge 0$ з густиною $f(x, y, z) = 2z + 2x + \frac{4}{3}y$.

2.Обчислити масу верхньої півсфери $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0$ з густиною $f(x, y, z) = 2z$.(обчислити 2-ма способами)

3. Обчислити $\iint_S \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, $S : x^2 + y^2 = 4, 0 \le z \le 1$.

Домашня робота.

4342,4343,4344,4345.

14 Поверхневі інтеграли 2-го роду.

Поверхневим інтегралом другого роду називається $\iint_{S_+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$, де S_+ двостороння орієнтована поверхня з зовнішньою нормаллю $\vec{n} = (cos\alpha; cos\beta; \cos\gamma)$ напрямні косинуси, $P, Q, R --$ інтегровні по поверхні функції, і відповідні елементи площі $dydz = cos\alpha ds, dzdx = cos\beta ds, dxdy = cos\gamma ds$.

Між поверхневими інтегралами можна провести наступний зв'язок

$$\iint_{S_+}(P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy) = \iint_{S_+}(P(x,y,z)cos\alpha + Q(x,y,z)cos\beta + R(x,y,z)cos\gamma)ds.$$

Поверхневий інтеграл 2-го роду обчислює потік векторного поля (P, Q, R) через поверхню S протилежному напрямку від нормалі.

!!!$dxdy = -dydx;\quad -dzdy = dydz;\quad dzdx = -dxdz$!!!

!! Якщо поверхня задана $S : z = z(x, y)$ тоді нормаль має вигляд $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+(z\prime_x)^2+(z\prime_y)^2}}(\pm z\prime_x; \pm z\prime_y; \mp 1)$.

Теорема Гауса-Остроградського.

Нехай в замкненому тілі V з межею-поверхнею S задані функції (P,Q,R) зі своїми похідними першого порядку неперервні. Тоді

$$\iint_{S_+}(P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy) = \iiint_V (P\prime_x + Q\prime_y + R\prime_z)dxdydz = \iiint_V div((P,Q,R))dxdydz$$

Аудиторна робота.

1. Обчислити потік вектора (x,y,z) через одиничний куб $[0;1]^3$ з зовнішньою нормаллю.

2. Обчислити потік вектора $xz; -yz; xy$ через зовнішню поверхню $S : x - y + z = 1, x, y, z \ge 0$.

3. Обчислити $\iint_S xdydz + 2ydzdx + (x+z)dxdy$, де $S-$ поверхня трикутника $A(0;0;0), B(1;3;0)C(1,3,1)$ кут між $(\vec{n}, 0x)$ гострий.

4.Обчислити $\iint_{S_+}(vecr, \vec{n})ds$, де $S --$ замкнена поверхня утворена за допомогою двох поверхонь $z = x^2 + y^2, 4 - z = x^2 + y^2$ (безпосередньо і за теоремою Гауса-Остроградського.)

5.Обчислити $\iint_S zdxdy$ де $S : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1}6 + \frac{z^2}{9} = 1, z \ge 0$ зовнішня сторона поверхні.

6.Обчислити інтеграл $\oint_L (x + y)dx + 2ydy + (x + z)dz$, $L : x^2 + y^2 = 1, x + z = 2$. безпосередньо і за формулою Стокса.

7. Обчислити інтеграл $\oint_L ydx + (y + z)dy + (3x + z)dz)$, $L : x + y + z = 1, x, y, z \ge 0$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Домашня робота. 436364364,4365,4370,4371,4388,4390.

15 Теорія поля.

Ми розглядатимемо в цьому розділі неперервно диференційовні функції.

Кажуть, що задано **скалярне поле** в області G , якщо кожній точці M області ставиться у відповідність деяке число f(M).

Температура на карті України-скалярне поле:)

Нехай $G \subset \mathbf{R^3}$ **Градієнтом скалярного поля** в точці M називається вектор частинних похідних в цій точці

$$grad f(M) = (f\prime_x, f\prime_y, f\prime_z)|_M.$$

Оператор набла це вектор частинних похідних $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z})$.

$$\nabla f = grad f.$$

Нехай в деякій точці M заданий вектор l, **похідною за напрямком** l скалярного поля в т. M

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M) = \frac{f\prime_x l_1 + f\prime_y l_2 + f\prime_z l_3}{|\vec{l}|}|_M = \frac{(grad f(M), \vec{l})}{|\vec{l}|}.$$

Похідна функції за напрямком досягає свого максимального значення тільки за напрямком $grad f$ і так в будь-якій точці де градієнт ненульовий, це напрямок найбільшого росту функції, а $|grad f|$ – це швидкість зростання функції у цьому напрямку.

Геометрична властивість градієнту $grad f(M_0) \neq \vec{0}$– це нормаль дотичної площини до поверхні $f(x, y, z)$ в точці M_0.

Кажуть, що задано **векторне поле** в області G , якщо кожній точці $M \in G$ області ставиться у відповідність деякий вектор $\vec{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M)$.

Наприклад гравітаційне поле. Уявіть поле з квіточками, легенько дме вітерець, фіксуємо час, вибираємо точку на полі і ставимо їй у відповідність напрямок куди дме вітер–отримуємо векторне поле в конкретний момент часу. Аналогічно можемо розглянути векторне поле швидкостей вітру в кожній точці.

Для векторного поля $\vec{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M)$ визначена величина **дивергенція** $div\vec{a} = P\prime_x + Q\prime_y + R\prime_z$.

На попередніх парах ми з вами розглянули поняття **потік речовини через поверхню** – це кількість речовини що проходить через орієнтовану поверхню за одиницю часу з швидкістю (P, Q, R) -$\prod_S(P, Q, R) = \iint_{S_+}((P, Q, R)), \vec{n}ds$. Нехай маємо поверхню вікна, у вікно дує вітер, n нормаль зовнішня(на вулицю). В кожній точці вікна, визначений вектор швидкості вітру (P, Q, R).

Якщо $\prod_S(P, Q, R) > 0$ то повітря виходить з кімнати. У кімнаті присутнє джерело.

Якщо $\prod_S(P, Q, R) < 0$, тоді вітер задуває у кімнату. У кімнаті поглинач.

Якщо $\prod_S(P, Q, R) = 0$, тоді все, що виходить компенсується тим, що заходить.

Дивергенція пов'язана з потоком, і вказує на наявність джерела, поглинача(стоку), або на те що поле швидкостей є **соленоїдальним**(без джерел і стоків.) Потік дорівнює 0.

Ще одна величина пов'язана з векторним полем називається **ротором(вихром)** і рахується наступним чином

$$rot(P, Q, R) = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = (R\prime_y - Q\prime_z, P\prime_z - R\prime_x, Q\prime_x - P\prime_y).$$

Ротор вказує чи є в полі вихори і як вони напрямлені. Якщо для поля ротор нульовий, то таке поле безвихрове. Циркуляція в такому полі по замкненій кривій нульова.

Векторне поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ назвемо потенціальним, якщо воно дорівнює градієнту якогось скалярного поля $\vec{a} = grad f$, функція f–це потенціал поля.

Поле потенціальне, тоді і тільки тоді коли воно безвихрове $rot\vec{a} = 0$.

Тоді робота векторного поля з т.A в т.B не залежить від кривої, що з'єднує ці точки і можна обчислити потенціал поля $f(B) - f(A) = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$.

Аудиторна робота.

1. Обчислити градієнт поля в т. M і похідну за напрямком, якщо поле задано функцією $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(1, 2, -2)$, $l = (1, -1, -1)$. Обчислити в цій точці напрямок і величину найбільшої швидкості росту функції.

2.Нехай $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = (x, y, z)$. Обчислити

$a) div(\frac{1}{r}\vec{r} + rot\frac{r}{x}\vec{r})$; $b) divgrad(\frac{r}{x} + r^4)$

$c) graddiv(\frac{1}{r}\vec{r} + rot\frac{r}{x}\vec{r})$; $d) rotgrad(\frac{r}{x} + r^4)$.

3. Чи поле $\vec{a} = \vec{r}(r^2 - \frac{1}{r})$ потенціальне? Визначте потенціал у разі позитивної відповіді.

4. Перевірити соленоїдальність поля $u = x(z^2 - y^2)i + y(x^2 - z^2)j + z(y^2 - x^2)k$.
5. Обчислити
$a) grad(\vec{c}, \vec{r}); \quad b) rot(u(x,y,z)\vec{a}(x,y,z); \quad c) div(u(x,y,z)\vec{a}(x,y,z)$.

Домашня робота.

http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/wp/wp-content/uploads/2016/12/IndTasks_MA.pdf Починаючи зі сторінки 27. У кожного свій варіант.