Київський Національний університет
імені Тараса Шевченка

Білоколос Є.Д., Юрачківський А.П., Шека Д.Д.

Спеціальні функції в задачах математичної фізики

**Навчальний посібник
для студентів природничих факультетів**

Київ
Редакційно-видавничий центр
«Київський університет»
2000

ББК 22.161
УДК 517

Білоколос Є.Д., Юрачківський А.П., Шека Д.Д.
Спеціальні функції в задачах математичної фізики: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — К.: РВЦ «Київський університет», 2000. - 92 с. — ISBN

Рецензенти: Таран Є.Ю., докт. фіз.-мат. наук,
Голод П.І., канд. фіз.-мат. наук.

Затверджено Радою
радіофізичного факультету
12 жовтня 1998 року

ББК 22.161

РВЦ «Київський університет»

ISBN

Передмова

Математична фізика — особливий предмет у системі фундаментальної освіти студентів природничих факультетів. З одного боку, це математична дисципліна з формальними означеннями і строгими доведеннями. З іншого боку, фізичний зміст задач відіграє в ній першорядну, а часом і основну роль. Поєднання математичних абстракцій із фізичною інтуїцією виявилось надзвичайно плідним для науки двадцятого століття — досить пригадати встановлення зв'язку між групами симетрій і законами збереження. Яскравим прикладом такого поєднання є й теорія спеціальних функцій. Роль останніх у математичній фізиці і висвітлює цей посібник. Його зорієнтованість на нормативний навчальний курс визначила добір матеріалу і спосіб викладу. Виходячи з того, що основним джерелом появи спеціальних функцій у математичній фізиці є спектральні задачі, автори відвели останнім окремий розділ. Загальне поняття спектральної задачі належить скоріше функціональному аналізові, ніж математичній фізиці. Тому доведення властивостей цих задач замінено посиланнями на відповідну літературу. Поза тим виклад у першому розділі цілком автономний. Побудова класичних ортогональних систем спеціальних функцій і доведення їх повноти здійснюються в перебігу розв'язування задач.

У другому розділі із застосуванням спеціальних функцій розв'язано 12 задач із різних розділів фізики. Деякі з них загальновідомі, але розбираються докладніше, ніж у наявних джерелах, інші ж містять порівняно нові наукові результати і в навчальній літературі наводяться вперше.

У посібнику зовсім не висвітлено зв'язок спеціальних функцій із лінійними представленнями (у математичній термінології — зображень) груп, який лежить в основі сучасного підходу до вивчення їх, особливо в теоретичній фізиці. Це, по-перше, вивело б нас далеко за рамки нормативного курсу математичної фізики, по-друге, потребувало б заскладного для третьокурсника математичного апарату. Читач, який цікавиться цими питаннями, може звернутись до [9, 24, 27].

Різноманітним застосуванням спеціальних функцій у математиці й фізиці присвячено книги [17, 26], а також окремі розділи в [16, 22, 27, 29, 30]. Довідники [1, 4, 5, 11, 33] містять багато корисних формул, таблиці і графіки спеціальних функцій.

Коли роботу над посібником було завершено, у видавництві Московського університету вийшла книга [7], у якій докладно вивчаються спектральні задачі та пов'язані з ними спеціальні функції.

1. Спеціальні функції як розв'язки диференціальних спектральних задач

Спеціальні функції виникають у математичній фізиці звичайно як розв'язки спектральних задач. Останні можуть бути фізичного походження (наприклад, задача обчислення власних частот і коливань резонатора) або входити складовою частиною в іншу математичну задачу (зокрема при відокремлюванні змінних, див. [29, 32]). Введемо насамперед поняття, потрібні для їх постановки.

Нехай D — область (зв'язна відкрита множина) в $\mathbb{R}^d$, межа якої ∂D складається з N зв'язних гладких *замкнутих компонент* $\overline{\Gamma}_i$ (риска символізує замкнутість): $\partial D = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\Gamma}_i$. Тут під замкнутістю розуміється не геометрична властивість (кола, сфери тощо), а приналежність множині всіх її граничних точок (так що сегмент замкнутий, а інтервал ні). Проілюструємо ці поняття на прикладах.

1. D — інтервал, $\overline{\Gamma}_1$, $\overline{\Gamma}_2$ — його кінці (одноточкові множини).

2. D — круг із викинутим центром, $\overline{\Gamma}_1$ — його центр, $\overline{\Gamma}_2$ — коло.

3. D — кільце, $\overline{\Gamma}_1$, $\overline{\Gamma}_2$ — внутрішнє та зовнішнє кола.

4. D — сектор круга; $\overline{\Gamma}_1$, $\overline{\Gamma}_2$ — відрізки (включно з кінцями) сторін кута, $\overline{\Gamma}_3$ — дуга (включно з кінцями).

5. D — N–кутник; $\overline{\Gamma}_1, \ldots, \overline{\Gamma}_N$ — його сторони (включно з кінцями).

6. D — N–гранник; $\overline{\Gamma}_1, \ldots, \overline{\Gamma}_N$ — його грані (многокутники[1] включно зі сторонами).

[1] Автори дотримуються традиційної термінології. — *Ред.*

7. D — циліндр із викинутою віссю; $\overline{\Gamma}_1$ — вісь (замкнутий відрізок), $\overline{\Gamma}_2$, $\overline{\Gamma}_3$ — замкнуті круги з викинутим центром (нижня та верхня основи), $\overline{\Gamma}_4$ — бічна поверхня включно з усіма граничними точками.

Замикання області D позначаємо $\overline{D}$. Отже, $\overline{D} = D \bigcup \partial D$.

Перетин компонент $\overline{\Gamma}_j$, $\overline{\Gamma}_k$ $(j \neq k)$ може бути, як показують останні чотири приклади, непорожнім, але обов'язково має меншу розмірність, ніж самі ці компоненти. Позначимо $\partial_0 D = \bigcup_{1 \leq j < k \leq N} \left(\overline{\Gamma}_j \bigcap \overline{\Gamma}_k\right)$, $\Gamma_i = \overline{\Gamma}_i \backslash \partial_0 D$ (теоретико-множинна різниця), $\overline{D}_0 = \overline{D} \backslash \partial_0 D$, або, рівносильно,

$$\overline{D}_0 = D \bigcup \Gamma_1 \bigcup \cdots \bigcup \Gamma_N. \tag{1}$$

У прикладах 1–4 $\partial_0 D = \emptyset$, відтак $\Gamma_1 = \overline{\Gamma}_i$. У прикладах 5–7 Γ_i утворюються з $\overline{\Gamma}_i$ викиданням кінців, у прикладі 8 — викиданням сторін. Множини Γ_i називатимемо, на відміну від $\overline{\Gamma}_i$, просто *компонентами межі.*

Для постановки *диференціальної спектральної задачі* в $\overline{D}$ потрібно задати три функції на D: додатну неперервно диференційовну функцію p, невід'ємну неперервну функцію q, додатну неперервну інтегровну функцію σ — і для кожної компоненти Γ_i з (1) множину E_i з такими властивостями: 1) E_i *лінійна*, тобто містить усі скінченні лінійні комбінації своїх елементів; 2) *якщо* $f_n \in E_i$, $n \in \mathbb{N}$, *і послідовності* (f_n), $(\operatorname{grad} f_n)$ *збігаються рівномірно на* D, *то* $\lim f_n \in E_i$ (коротше формулювання: E_i *замкнута в* $\mathcal{C}^1(D)$); 3) *приналежність функції* $f \in \mathcal{C}^2(D)$ *до* E_i *визначається поведінкою* f *у як завгодно малому околі компоненти* Γ_i.

Спектральна задача полягає тоді у відшуканні всіх пар (λ, Ω), де λ — число, $\Omega = \Omega(\boldsymbol{x})$ — відмінна від тотожного нуля двічі неперервно диференційовна в D і неперервно диференційовна в $\overline{D}_0$ функція, що задовольняє диференціальне рівняння

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad}\Omega) - q\Omega = -\lambda\sigma\Omega, \quad \boldsymbol{x} \in D, \tag{2a}$$

та N (за числом компонент межі) додаткових умов

$$\Omega \in E_i. \tag{2b}$$

Ці пари називаються *власними елементами* спектральної задачі. Якщо (λ, Ω) — власний елемент, то λ називається *власним числом* або *власним значенням*, Ω — *власною функцією*. Функція σ називається *ваговою* або просто *вагою*, умови (2b) — *межовими* (з огляду на третю властивість множин E_i). Власні функції, що відрізняються лише сталим множником, не вважаються різними.

Поки не конкретизовано вигляд множин E_i, постановка спектральної задачі залишається надто загальною. Якщо досвід розв'язування фізичних задач іще якось підказує вигляд і фізичні мотивації умов (2b), то на базі суто математичних уявлень важко збагнути, `як` і, головне, `з яких міркувань` задаються множини E_i. Щоб пояснити цей принциповий момент, зазначимо, що спектральна задача лише тоді є дієвим математичним інструментом, коли система її власних елементів має певні властивості. Перелічимо ті з них, які використовуються нижче (третя — найважливіша).

1°. *Власні значення дійсні невід'ємні.*

2°. *Власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні з вагою* σ. Це між іншим показує, що множина власних функцій не більш ніж зліченна.

3°. *Система власних функцій спектральної задачі повна в* $L_2 = L_2(\overline{D}, \sigma)$.

Це, нагадаємо, означає, що *кожну функцію з* L_2 *можна розкласти в збіжний у середньоквадратичному ряд Фур'є за власними функціями спектральної задачі.* Рівносильно: *в* L_2 *не іс-*

нує ненульового елемента, ортогонального всім власним функціям.

З третьої властивості випливає, що множина власних функцій нескінченна (адже простір L_2 нескінченновимірний). Це спільно з попереднім висновком показує, що *множина власних елементів спектральної задачі злічення.*

Виявляється, для забезпечення властивостей 1°–3° власних елементів спектральної задачі достатньо двох типів межових умов.

Регулярна межова умова на компоненті Γ_i задається рівністю

$$\alpha_i \Omega + \beta_i \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_i, \tag{3}$$

в якій α_i, β_i — невід'ємні константи, не рівні одночасно нулю, $\partial/\partial \boldsymbol{n}$ — похідна за напрямком `зовнішньої` нормалі. Очевидно, множина E_i тих $\Omega \in \mathcal{C}^2(D)$, які справджують (3), має властивості 1)–3), тож (3) є окремий випадок (2b). Цього не було б, якби в правій частині рівності (3) стояла відмінна від нуля функція, що характерно для інших (не спектральних) задач математичної фізики. Якщо одна з констант α_i, β_i дорівнює нулю, тоді іншу можна без обмеження загальності вважати рівною одиниці. Умову (3) відносять до *першого роду*, якщо $\beta_i = 0$; до *другого*, якщо $\alpha_i = 0$; до *третього*, якщо $\alpha_i \neq 0 \neq \beta_i$.

Обійтись у всіх ситуаціях самими лише регулярними умовами неможливо з двох причин.

1. Не завжди є фізичні підстави постулювати `однорідну` рівність виду (3) на `кожній` компоненті межі.

2. Множина розв'язків рівняння (2a) (при різних значеннях λ), які задовольняють регулярну межову умову на `кожній` компоненті, може й не утворювати повної в $L_2(\overline{D}, \sigma)$ системи. Інакше кажучи, серед ненульових розв'язків рівняння (2a) можуть бути такі, що задовольняють при деяких i умови (2b) з

належно вибраними E_i і при цих же i не задовольняють жодної умови виду (3).

Виявляється, в обмежених областях за доволі загальних припущень про p, q повноцінним замінником регулярної умови там, де для неї немає підстав, є *сингулярна* умова обмеженості функції та її градієнта в околі відповідної компоненти межі. Виписувати сингулярні умови, подібно до регулярних, окремо для кожної компоненти не потрібно, адже вони поглинаються зробленим вище (див. текст перед формулою (2)) припущенням

$$\Omega \in \mathcal{C}^1\left(\overline{D}_0\right). \tag{4}$$

Інакше кажучи, у кожній сингулярній умові

$$E_i = \mathcal{C}^1\left(\overline{D}_\circ\right) \bigcap \mathcal{C}^2\left(D\right)$$

(властивості 1)–3) цієї множини перевіряються елементарно), тому вони всі заразом записуються одним співвідношенням (4).

Зауваження 1
Теорема Кантора про рівномірну неперервність нерерервної на компакті функції дозволяє переформулювати властивість (4) так: *функції Ω,* $\operatorname{grad}\Omega$ *рівномірно неперервні в будь–якій обмеженій області, замикання якої міститься в* $\overline{D}_0$. При цьому в області D (тобто на множині внутрішніх точок $\overline{D}_0$) їх неперервність не є додатковим припущенням, а випливає з того, що Ω задовольняє в D диференціальне рівняння другого порядку. Тому властивість (4), записана як вимога гладкості, по суті не є такою, а стверджує в певному сенсі регулярність поведінки функції в околі межі області. Для широкого класу спектральних задач вона рівносильна (як складова частина задачі) вимозі квадратичної інтегровності з вагою σ функції та її градієнта:

$$\Omega, \operatorname{grad}\Omega \in L_2(\overline{D}, \sigma).$$

Таке ж формулювання сингулярної межової умови має прозорий фізичний смисл (скінченність енергії) і зручне при застосуванні теорії гільбертових просторів (до яких належить і L_2). Саме воно використовувалось у [32]. У цьому ж посібнику виклад не спирається на зазначену теорію, і ми користуємося традиційним формулюванням.

Тип межової умови на компоненті Γ_i не задається довільно. Він визначається поведінкою функції p в околі Γ_i. Таким чином, регулярність і сингулярність є властивостями задачі в цілому. Задача (2) називається: *регулярною*, якщо область D обмежена і функція p додатна в її замиканні (а не тільки у внутрішніх точках, як вимагалося вище); *сингулярною*, якщо D необмежена або $p(\boldsymbol{x}) = 0$ для деяких $\boldsymbol{x} \in \partial D$. У регулярній задачі для забезпечення властивості 2° межові умови також повинні бути регулярними; у сингулярній же задачі на тих компонентах межі, де p перетворюється на нуль, регулярні межові умови не накладаються, бо це може порушити властивість 3°.

Зауваження 2
Нехай $E \subset \mathcal{C}^2(D)$ — якась множина, що має властивості 1)–3) і містить $\mathcal{C}^1(\overline{D}_0)$. При заміні умови (4) слабшою

$$\Omega \in E$$

множина власних елементів може тільки збільшитись. Але якщо кожна власна функція нової задачі належить також $\mathcal{C}^1(\overline{D}_0)$, то, очевидно, вона еквівалентна старій. У більшості задач (див. зокрема приклади 1.2, 1.3, 1.7–1.10) у ролі замінника $\mathcal{C}^1(\overline{D}_0)$ може виступати $E = \mathcal{C}(\overline{D}_0)$. Приклад 1.4 показує, що ця ситуація не універсальна.

У курсах математичної фізики показується (див., наприклад, [16]), що спектральна задача (2) рівносильна задачі на власні значення деякого інтегрального оператора Фредгольма. Останню ж можна досліджувати методами функціонального аналізу — дисципліни, що вивчає оператори з абстрактної точки зору. Це пов'язано з тим, що властивості $1^\circ - 3^\circ$ системи власних елементів оператора відображають властивості само-го оператора, а не спосіб його задання. Деталі можна знайти в [3, 6, 16, 25].

Найважливішим і історично першим прикладом диференціальної спектральної задачі є *задача Штурма—Ліувілля* (скорочено — задача ШЛ). У ній $d = 1$, D інтервал. Оскільки в одновимірному випадку $\mathrm{div} = \mathrm{grad} = d/dx$, то рівняння (2a) набуває вигляду (позначення функції змінено)

$$\big(pX'\big)' - qX = -\lambda\sigma X, \quad x_1 < x < x_2. \tag{5}$$

Спектральна задача з таким рівняннм називається задачею ШЛ в наступних п'ятьох випадках.

1. *Регулярна задача ШЛ*: $p(x_1+0) > 0$, $p(x_2-0) > 0$, $q \in \mathcal{C}[x_1, x_2]$ (нагадаємо, що $p(x) > 0$ на $]x_1, x_2[$ і від q вимагалась неперервність тільки у внутрішніх точках). На власні функції накладаються дві регулярні умови виду (3)

$$\alpha_1 X(x_1) - \beta_1 X'(x_1) = 0, \tag{6a}$$

$$\alpha_2 X(x_2) + \beta_2 X'(x_2) = 0. \tag{6b}$$

Знак мінус в (6a) з'являється тому, що на лівому кінці відрізка $\partial/\partial\boldsymbol{n} = -d/dx$.

2. *Сингулярна на правому кінці задача ШЛ*:

$$\begin{aligned} &p(x_1+0) > 0, \qquad p(x_2-0) = 0, \\ &\lim_{x \to x_2 - 0} \frac{p(x)}{x_2 - x} > 0, \qquad (x_2 - x)q \in \mathcal{C}[x_1, x_2]. \end{aligned} \tag{7}$$

На лівому кінці накладається регулярна умова (6a), на правому — сингулярна

$$X \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2]. \tag{8}$$

Звичайно, умова (8) є межовою для обох кінців. Але на лівому вона нічого не додає до (6a).

3. *Сингулярна на лівому кінці задача ШЛ*:

$$\begin{gathered} p(x_1+0)=0, \qquad p(x_2-0)>0, \\ \lim_{x\to x_1+0}\frac{p(x)}{x-x_1}>0, \qquad (x-x_1)q\in\mathcal{C}[x_1,x_2]. \end{gathered} \tag{9}$$

На правому кінці накладається регулярна умова (8).

4. *Двічі сингулярна задача ШЛ*: (7), (9). Спільна для обох кінців сингулярна умова (8).

5. *Задача ШЛ з умовами періодичності* відрізняється від регулярної тим, що замість (6) накладаються нерозщеплені межові умови

$$X(x_1)=X(x_2), \tag{10}$$

$$X'(x_1)=X'(x_2), \tag{11}$$

смисл яких полягає в існуванні (x_2-x_1)–періодичного неперервно диференційовного продовження функції X на всю числову пряму.

В інших випадках спектральна задача з диференціальним рівнянням (5) може не мати повної системи власних функцій і не класифікується як задача ШЛ.

Виклад теорії Штурма—Ліувілля і спектральної теорії для звичайних диференціальних операторів можна знайти в [15, 16, 21, 22].

Деякі автори відносять до задач ШЛ і задачі з рівнянням виду (5) і належно підібраними (сингулярними) додатковими умовами в `необмежених` областях (див., наприклад, [21]). Ми не дотримуємось такої термінології, оскільки в необмеженій області, взагалі кажучи, втрачається дискретність спектра (див. нижче приклади 1.5, 1.6), а разом із нею й відносна елементарність теорії.

Спеціальні функції математичної фізики можна також розглядати як окремі випадки *узагальненої гіпергеометричної функції*, або ${}_p\mathrm{F}_q$-*функції*, [4]

$$ {}_p\mathrm{F}_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q|z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k\cdots(\beta_q)_k}\cdot\frac{z^k}{k!} \qquad (12) $$

де $(\alpha)_k \equiv \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$ — *символ Похгаммера*, при певних значеннях параметрів $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ та $\beta_1,\ldots,\beta_q$. Ряд (12): а) збігається при будь–яких z, якщо $p \le q$; б) збігається в крузі $|z| < 1$, якщо $p = q+1$ (випадок повної функції) і в) розбігається для всіх $z \ne 0$, якщо $p > q+1$.

Якщо $p = q+1$ і

$$ s = \operatorname{Re}\left(\beta_1+\cdots+\beta_q-\alpha_1-\cdots-\alpha_{q+1}\right), \qquad (13) $$

то ряд (12) при $|z| = 1$: а) збігається абсолютно, якщо $s > 1$; б) збігається умовно при $z \ne 1$, якщо $0 < s < 1$; в) розбігається, якщо $s < 0$.

Узагальнена гіпергеометрична функція $u = {}_p\mathrm{F}_q$ задовольняє диференціальне рівняння $(q+1)$–го порядку:

$$ \Big(\delta\prod_{k=1}^{p}(\delta-1+\beta_k) - z\prod_{k=1}^{q}(\delta+\alpha_k)\Big)u(z) = 0, \quad \delta \equiv z\frac{d}{dz}. \qquad (14) $$

Теорію гіпергеометричних функцій викладено, наприклад, у [4, 22, 27, 30].

Перейдемо до прикладів. Зважаючи на властивість 1° спектральних задач, розв'язки рівняння (2а) і його окремого випадку (5) шукаємо лише при $\lambda \ge 0$, а значення $\lambda < 0$ мовчазно ігноруємо. Замість Ω здебільшого вживаємо індивідуальні позначення.

Приклад 1.1

$$
\begin{aligned}
X'' &= -\mu X, &\text{(15a)}\\
X(0) &= X(a) = 0. &\text{(15b)}
\end{aligned}
$$

Це регулярна задача ШЛ з $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $p = \sigma = 1$, $q = 0$, $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$. Позначення власного числа замінено на μ.

Розв'язання. При $\mu = 0$ загальний розв'язок рівняння (15a) є $Ax + B$. Ця функція справджує рівності (15b) тільки при $A = B = 0$. Отже, число 0 не є власним.

При $\mu > 0$ загальний розв'язок рівняння (15a) є

$$A\cos\sqrt{\mu}x + B\sin\sqrt{\mu}x.$$

З умов (15b) дістаємо $A = 0$, $B\sin\sqrt{\mu}a = 0$. Оскільки нас цікавлять ненульові розв'язки, то $B \neq 0$. Звідси $\sin\sqrt{\mu}l = 0$. Отже, власні елементи задачі (15) вичерпуються списком

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right),\ n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Приклад 1.2

$$
\begin{aligned}
&(1 - x^2)X'' - 2xX' + \lambda X = 0, &\text{(17a)}\\
&X \in \mathcal{C}[-1, 1]. &\text{(17b)}
\end{aligned}
$$

Це двічі сингулярна задача ШЛ на $[-1, 1]$ із $p(x) = 1-x^2$, $q = 0$, $\sigma = 1$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок рівняння (17a) у вигляді степеневого ряду: $X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. В інтервалі збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати, тому $X'(x) =$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$, $X''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n$, $xX'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_nx^n$, $x^2X''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_nx^n$. Підставляючи ці вирази в (17a) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, одержуємо рекурентне співвідношення

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)}c_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

Щоб обчислювати за ним, потрібно задати c_0, c_1 (це і є довільні сталі, що входять у загальний розв'язок), причому якщо один із цих коефіцієнтів покладаємо рівним нулю, то для отримання ненульового розв'язку інший повинен бути ненульовим. Розглянемо два випадки.

а) $c_1 = 0 \neq c_0$. Тоді з формули (18) випливає, що для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$ $c_{2k+1} = 0$, $c_{2k+2} = \dfrac{2k(2k+1)-\lambda}{(2k+1)(2k+2)}c_{2k}$. Звідси видно, що при $\lambda = 2j/(2j+1)$ буде $c_{2k+2} = 0$, як тільки $k \geq j$, і $c_{2k} \neq 0$, $k \leq j$, тобто X буде поліномом степеня $2j$. Очевидно, він задовольняє межову умову (17b). Таким чином, числа $\lambda_{2j} = 2j(2j+1)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, є власними і відповідні їм власні функції X_{2j} — поліноми степеня $2j$.

б) $c_0 = 0 \neq c_1$. Тоді з формули (18) випливає, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ $c_{2k} = 0$, $c_{2k+1} = \dfrac{2k(2k-1)-\lambda}{2k(2k+1)}c_{2k-1}$. Міркуючи аналогічно випадкові 1, переконуємося, що числа $\lambda_{2j-1} = 2j(2j-1)$, $j \in \mathbb{N}$, є власними і відповідні їм власні функції X_{2j-1} — поліноми степеня $2j-1$.

Об'єднуючи випадки а) і б), отримуємо таку систему власних елементів задачі ШЛ (17):

$$\lambda_n = n(n+1), \quad X_n \text{ — поліном } n\text{-го степеня}, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Покажемо, що інших власних функцій немає.

Оскільки множина скінчених лінійних комбінацій функцій X_n містить, очевидно, усі поліноми, то за теоремою Вейерштрасса вона всюди щільна в $\mathcal{C}[-1;1]$, відтак і в $L_2[-1;1]$. Значить, єдиний елемент простору $L_2[-1;1]$, ортогональний усім X_n, є нульова функція. Водночас, за властивістю 2° спектральних задач, кожна власна функція ортогональна решті власних функцій. Отже, власних функцій, відмінних від знайдених, не існує. Задачу (17) розв'язано.

Нагадаємо, що власні функції визначаються з точністю до сталого множника. У нашому випадку це рівносильно заданню тієї з двох констант c_0, c_1, яка відмінна від нуля. Загальноприйнятим є такий вибір константи, за якого в точці 1 власна функція набирає значення 1. Власні функції, підпорядковані цій додатковій вимозі, називаються *поліномами Лежандра* і позначаються P_n. Таким чином, P_n — це єдиний розв'язок лінійної диференціальної задачі

$$(1-x^2)X'' - 2xX' + n(n+1)X = 0, \tag{19}$$
$$|X(-1+0)| < \infty, \quad X(1) = 1. \tag{20}$$

Як показано вище, P_n є поліномом n-го степеня. Наведемо «явний» вираз поліномів Лежандра та їхніх норм [4, 16, 22, 26, 29]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right], \tag{21a}$$
$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}. \tag{21b}$$

Приклад 1.3

$$(1-x^2)X'' - 2(m+1)xX' + (\lambda - m(m+1))\,X = 0, \tag{22a}$$
$$X \in \mathcal{C}[-1,1] \tag{22b}$$

(m — цілочисельний невід'ємний параметр). Помноживши обидві частини рівняння (22a) на $(1-x^2)^m$, пересвідчуємося, що маємо справу з двічі сингулярною задачею ШЛ на $[-1,1]$, у якій $p(x)=(1-x^2)^{m+1}$, $q(x)=m(m+1)(1-x^2)^m$, $\sigma(x)=(1-x^2)^m$. Щоб підкреслити залежність власних елементів від параметра m, писатимемо його в позначеннях другим індексом.

Розв'язання. При $m=0$ рівняння (22a) перетворюється на (17a), відтак

$$\lambda_{n0}=n(n+1),\quad X_{n0}=P_n,\ n\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

Продиференціювавши $m\le n$ разів рівність (19) із $X=P_n$, дістанемо

$$\begin{aligned}&(1-x)^2P_n^{(m+2)}-2(m+1)xP_n^{(m+1)}(x)\\&+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)P_n^{(m)}=0.\end{aligned} \tag{24}$$

Таким чином, при $n\ge m$ функція $P_n^{(m)}$ задовольняє рівняння (22a) і, будучи поліномом, межову умову (22b). Отже, для кожного $m\in\mathbb{Z}_+$ серед власних елементів задачі (22) є такі

$$\lambda_{nm}=n(n+1),\quad X_{nm}=P_n^{(m)},\ n\in\mathbb{Z}_+,\ n\ge m. \tag{25}$$

Покажемо, що інших власних елементів немає.

Оскільки при кожному m система (25) власних функцій містить поліноми всіх степенів, то за теоремою Вейерштрасса множина їх скінченних лінійних комбінацій усюди щільна в $\mathcal{C}[-1,1]$, відтак і в $L_2\left([-1,1],\sigma\right)$. Значить, єдиний елемент простору $L_2\left([-1,1],\sigma\right)$, ортогональний усім $P_n^{(m)}$, $n\ge m$, – нульова функція. Водночас за властивістю 2° задач ШЛ кожна власна функція ортогональна з вагою σ решті власних функцій. Отже, власних функцій, відмінних від знайдених, не існує.

Приклад 1.4

$$(1-x^2)T'' - xT' + \lambda T = 0, \tag{26a}$$
$$T \in \mathcal{C}^1[-1,1]. \tag{26b}$$

Це двічі сингулярна задача ШЛ на $[-1,1]$ із $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$, $q = 0$, $\sigma(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, у чому пересвідчуємось, поділивши обидві частини рівняння на $\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. Робимо заміну невідомої функції

$$T(x) = Q(\varphi), \quad \varphi = \varphi(x) = \arccos x.$$

Тоді $T'(x) = -(1-x^2)^{-1/2}Q'(\varphi)$, $T''(x) = -(1-x^2)^{-1}Q''(\varphi) + x(1-x^2)^{-3/2}Q'(\varphi)$ і рівняння (26a) набуває вигляду $Q''(\varphi) + \lambda Q = 0$, звідки знаходимо загальний розв'язок (26a):

$$T(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\arccos x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\arccos x\right).$$

Усі ці функції належать $\mathcal{C}[-1,1]$. Але за умовою (26b) цьому ж просторові повинні належати і їхні похідні. Очевидно, ця вимога виконана при $\lambda = n^2$, $B = 0$, тож

$$\lambda_n = n^2, \quad T_n(x) = \cos\left(n\arccos x\right),\ (n \in \mathbb{Z}_+) \qquad —$$

власні числа і власні функції задачі (26). Залишається показати, що T_n — поліном n-го степеня. Тоді з тих же міркувань, що в попередніх двох прикладах, інших власних функцій не може бути.

Маємо $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = \cos(\arccos x) = 1$ і при $n \geq 2$

$$\begin{aligned} T_n(x) + T_{n-2}(x) &= \cos n\varphi + \cos\left((n-2)\varphi\right) \\ &\equiv 2\cos\varphi\cos(n-1)\varphi = 2xT_{n-1}(x), \end{aligned}$$

звідки індукцією за $n \geq 2$ виводимо потрібне.

Поліноми T_n називаються *поліномами Чебишова*. Вони широко застосовуються в обчислювальній математиці.

Приклад 1.5

$$xX'' + (\beta - x)\, X' - \alpha X = 0, \tag{27a}$$

$$X, X' \in L_2\, (\mathbb{R}_+, \sigma)\,. \tag{27b}$$

Тут $\beta > 0$ — фіксований параметр, $\sigma(x) = x^{\beta-1} e^{-x}$, позначення власного числа змінено з λ на $-\alpha$. Вибір вагової функції пояснено в зауваженні 3 нижче.

Розв'язання. Покажемо насамперед, що з двох лінійно незалежних розв'язків рівняння (27a) задовольняти умову (27b) може щонайбільше один. Справді, якщо X_1, X_2 — два такі розв'язки, то за формулою Остроградського—Ліувілля

$$X_1' X_2 - X_1 X_2' = C x^{-\beta} e^{x},$$

де C — якась відмінна від нуля константа. Оскільки права частина рівності не належить $L_2(\mathbb{R}_+, \sigma)$, то й один із доданків, а значить, і один із співмножників у цьому доданку також не належить. Таким чином, кожному власному значенню відповідає рівно одна власна функція.

При $\alpha = 0$ очевидним розв'язком рівняння (27a) є стала функція. Вона задовольняє й додаткову умову (27b). Отже, знайдено одне власне значення $\alpha_0 = 0$ і відповідну власну функцію $X_0 = 1$.

Зауваживши, що (27a), так зване *рівняння Куммера*, є рівнянням гіпергеометричного типу (14), записуємо один із його розв'язків

$$X(x) = {}_1\mathrm{F}_1\, (\alpha; \beta | x)\,. \tag{28}$$

Розв'язок (28) має назву *виродженої гіпергеометричної функції* або *функції Куммера*; його позначають $\Phi(\alpha;\beta|x)$.

Асимптотика функції Куммера на нескінченності [4]

$$\Phi(\alpha;\beta|x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^x x^{\alpha-\beta} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \; x \to \infty \tag{29}$$

показує, що при α, відмінному від цілого від'ємного (тобто, коли $|\Gamma(\alpha)| < \infty$) розв'язок (28) не задовольняє умову (27b). Щоб дослідити поведінку на нескінченості функції $\Phi(-n,\beta|x)$, перепишемо, скориставшись формулою пониження $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, рівність (12) для функції Куммера у вигляді

$$\Phi(\alpha;\beta|x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{(\beta)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}, \tag{30}$$

звідки

$$\Phi(-n;\beta|x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(\beta)_k} C_n^k x^k, \tag{31}$$

де C_n^k — біномні коефіцієнти. Функція $\Phi(-n;\beta|x)$, будучи поліномом, задовольняє умову (27b), що дає нескінченну серію власних елементів. Об'єднавши їх із раніше знайденими, одержуємо з урахуванням (28) такий список:

$$-\alpha_n = n, \qquad X_n(x) = \Phi(-n;\beta|x), \; n \in \mathbb{Z}_+. \tag{32}$$

Оскільки, як показано вище, для будь–якого α лінійно незалежний від $\Phi(\alpha;\beta|x)$ розв'язок рівняння (27a) необмежений в околі нуля, то інших власних елементів немає. Поліноми (31), знормовані спеціальним чином, мають назву *поліномів Лягерра* [4, 22, 26, 29]:

$$L_n^a(x) = \frac{(a+1)_n}{n!} \Phi(-n; a+1|x). \tag{33}$$

Отже, повний список власних елементів задачі записується у вигляді

$$-\alpha_n = n, \qquad X_n(x) = L_n^{\beta-1}(x),\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{34}$$

Відповідь. Власні значення $-\alpha_n$ і власні функції задачі (27) даються рівностями (32), (31), або (34).

Зауваження 3
Задача (27) ставиться в необмеженій області, тому за нашою термінологією не є задачею ШЛ. Однак властивості 2°, 3° системи її власних функцій, розглядуваних як елементи простору $L_2(\mathbb{R}_+, \sigma)$, зберігаються.

Щоб переконатися в цьому, досить, помноживши обидві частини рівняння (27a) на σ, записати його у вигляді (5) із

$$p(x) = x^\beta e^{-x},\ q(x) = 0,\ \lambda = -\alpha.$$

Тоді знайдені власні функції виявляються елементами простору $L_2(\mathbb{R}_+, \sigma)$ і ортогональність їх встановлюється так само, як для задачі ШЛ на відрізку (див. [10, 22, 26, 27, 29]). Перевірка ж повноти повторює міркування прикладів 1.2, 1.3.

Приклад 1.6

$$x(1-x)X'' + (\beta - (\alpha_1+\alpha_2+1)\,x)\,X' - \alpha_1\alpha_2 X = 0, \tag{35a}$$
$$X \in \mathcal{C}^1[0,1]. \tag{35b}$$

Тут $\beta > 1$, $\alpha_2 \geq 0$ — параметри, $-\alpha_1$ — власне число (втім, розподіл ролей між α_1 і α_2 довільний, адже вони входять у рівняння симетричним чином).

Розв'язання. За формулою Остроградського—Ліувілля вронскіан двох лінійно-незалежних розв'язків рівняння (35a) дорівнює

$$Cx^{-\beta}(1-x)^{\beta-\alpha_1-\alpha_2-1}\ ,$$

тому задовольнити умову (35b) може щонайбільше один із них.

Як і в попередньому прикладі, пересвідчуємося, що $\alpha_0 = 0$ — власне число, якому відповідає власна функція $X_0 = 1$. Зауваживши, що (35a), так зване *рівняння Гаусса*, є рівнянням гіпергеометричного типу (14), записуємо один із його розв'язків

$$X(x) = {}_2\mathrm{F}_1\left(\alpha_1, \alpha_2; \beta|x\right). \tag{36}$$

Розв'язок (36) має назву *гіпергеометричної функції Гаусса*; його позначають $\mathrm{F}\left(\alpha_1, \alpha_2; \beta|x\right)$.

Збіжність гіпергеометричного ряду F при $x \to 1$ визначається, згідно з (13) умовою $\beta - \alpha_1 - \alpha_2 > 1$. При цьому ряд збігається абсолютно й рівномірно. Отже, кожне таке α_1 є власним числом і $\mathrm{F}\left(\alpha_1, \alpha_2; \beta|x\right)$ — відповідна власна функція. Але у випадку $\beta < \alpha_2 + 1$ можливи розв'язки з α_1 цілими від'ємними. Міркуючи, як у попередньому прикладі, виводимо аналогічну (31) формулу:

$$\mathrm{F}(-n, \alpha_2; \beta|x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (\alpha_2)_k}{(\beta)_k} C_n^k x^k, \; n \in \mathbb{Z}_+. \tag{37}$$

Функції $\mathrm{F}(-n, \alpha_2; \beta|x)$ є власними функціями задачі (35), що відповідають власним значенням $-\alpha_1 = n$. Знормовані, ці поліноми мають назву *поліномів Якобі* [22, 26]:

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(a+1)_n}{n!} \mathrm{F}\left(-n, n+a+b+1; 1+a|(1-x)/2\right). \tag{38}$$

Відповідь. При $\beta - \alpha_2 > 1$ `всі` числа $-\alpha_1 > \alpha_2 - \beta + 1$ власні (спектр неперервний). Якщо ж

$$\alpha_2 - \beta + 1 \geq 0, \tag{39}$$

то власними є й числа $\alpha_1 = -n$, де $0 \leq n \leq \alpha_2 - \beta + 1$ (дискретний спектр). Відповідні власні функції — поліноми (37).

Зауваження 4
Важливим окремим випадком знайдених розв'язків є поліноми Лежандра P_n, розглянуті вище в прикладі (1.2). Вони утворюються з поліномів Якобі $P_n^{(a,b)}$ при $a = b = 0$. Дійсно, зробимо в рівнянні Лежандра (19) заміну змінної $t = (1-x)/2 \in [0,1]$ і покладемо $X(x) = Y(t)$. Тоді $X'(x) = -Y'(t)/2$, $X''(x) = Y''(t)/4$ і (19) перетворюється на гіпергеометричне рівняння

$$t(1-t)Y'' + (2t-1)\,Y' - n(n+1)Y = 0,$$

кожний обмежений розв'язок якого, зокрема $P_n\,(1-2t)$, пропорційний, як показано вище, $\mathrm{F}(n+1,-n;1|t)$. При цьому

$$\mathrm{F}(n+1,-n;1|0) \overset{(37(}{=} 1 \overset{(20(}{=} P_n(1),$$

так що

$$P_n(x) = \mathrm{F}\,(n+1,-n;1|(1-x)/2) = P_n^{(0,0)}(x).$$

Приклад 1.7

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \left(\lambda\rho^2 - \nu^2\right) R(\rho) = 0, \tag{40a}$$

$$R \in \mathcal{C}[0,b], \tag{40b}$$

$$R(b) = 0 \tag{40c}$$

(ν — дійсний параметр). Це сингулярна на лівому кінці відрізка $[0,b]$ задача ШЛ з $p(\rho) = \rho$, $q(\rho) = \nu^2\rho^{-1}$, $\sigma(\rho) = \rho$, у чому переконуємось, поділивши обидві частини рівняння на ρ.

При $\lambda = 0$ (40a) є рівнянням Ейлера, а його загальним розв'язком є $A\rho^{|\nu|} + \beta\rho^{-|\nu|}$, якщо $\nu \neq 0$, і $A + B\ln\rho$ при $\nu = 0$. Такі функції задовольняють умову (40b) тільки при $B = 0$, відтак умову (40c) лише при $A = 0$. Отже, нуль не є власне значення.

При $\lambda > 0$ заміна $R(\rho) = Z(\sqrt{\lambda}\rho)$ зводить (40a) до *рівняння Бесселя*

$$\rho^2 Z'' + \rho Z' + (\rho^2 - \nu^2)Z = 0. \tag{41}$$

Межові умови (40b), (40c) в результаті заміни набувають вигляду

$$Z \in \mathcal{C}[0, \sqrt{\lambda} b], \tag{42}$$

$$Z\left(\sqrt{\lambda} b\right) = 0. \tag{43}$$

Рівняння (41), узагалі кажучи, не інтегрується у квадратурах, але, як відомо з курсу звичайних диференціальних рівнянь, принаймні один його (частинний) розв'язок можна знайти у вигляді степеневого ряду. Запишемо готовий вираз (перевірка того, що він справджує рівняння, елементарна), відсилаючи читача за виведенням до [16, 22, 26, 29]:

$$J_\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \rho^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)}. \tag{44}$$

Використовуючи (12), степеневий ряд (44) можна записати в термінах гіпергеометричних функцій:

$$J_\nu(\rho) = \frac{(\rho/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_0\mathrm{F}_1\left(\nu+1 \middle| \frac{\rho^2}{4}\right).$$

Очевидно, при $\nu \geq 0$ функція J_ν обмежена в околі нуля, тому для будь-якого дійсного ν функція $Z = J_{|\nu|}$ справджує умову (42). З формули Остроградського—Ліувілля випливає, що будь-який лінійно незалежний від $J_{|\nu|}$ розв'язок рівняння (41) необмежений в околі нуля. Отже, кожна власна функція задачі (40) має вигляд $R(\rho) = J\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)$. Права частина цієї рівності задовольняє рівняння (40a) і межову умову (40b). Для того щоб вона задовольняла ще й умову (40c), необхідно й достатньо, щоб $\lambda = (\mu/b)^2$, де μ — додатний корінь рівняння

$$J_{|\nu|}(\rho) = 0. \tag{45}$$

Властивість 3° задач ШЛ **гарантує** існування нескінченної множини лінійно незалежних власних функцій задачі (40), відтак і існування нескінченної послідовності $\mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \dots$ додатних коренів рівняння (45) (через $\mu_1^{(\nu)}$ позначаємо найменший корінь). Це дає відповідь до задачі (40):

$$\lambda_m^{|\nu|} = \left(\mu_m^{|\nu|}/b\right)^2, \quad R_m(\rho) = J_{|\nu|}\left(b^{-1}\mu_m^{(\nu)}\rho\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Функція J_ν, задана рівністю (44), називається *функцією Бесселя* індексу (або порядку) ν, а довільний (дійсний чи комплексний) розв'язок рівняння (41) — *циліндричною функцією* того ж індексу.

Приклад 1.8

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= -\lambda\Omega, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b, && (46a)\\ \Omega(0,y) &= \Omega(a,y) = 0, \quad 0 < y < b, && (46b)\\ \Omega_y(x,0) &= \Omega(x,b) = 0, \quad 0 < x < a. && (46c) \end{aligned}$$

Це регулярна задача в прямокутнику $D =]0,a[\times]0,b[$, компонентами межі є сторони $\Gamma_1 = \{0\}\times]0,b[$ (ліва вертикальна), $\Gamma_1 =]0,a[\times\{b\}$ (верхня горизонтальна), $\Gamma_3 = \{a\}\times]0,b[$ (права вертикальна), $\Gamma_4 =]0,a[\times\{b\}$ (нижня горизонтальна). У ролі векторної змінної $\boldsymbol{x} \in \overline{D}$ виступає пара скалярних змінних x, y — декартових координат точки $\boldsymbol{x}$. Символ Δ означає оператор Лапласа. Його інваріантний (тобто незалежний від системи координат) запис $\Delta\Omega = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\Omega)$ показує, що рівняння (46a) є окремий випадок (2a) з $p = \sigma = 1$, $q = 0$. У декартових же координатах $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Рівності (46b), (46c) задають регулярні межові умови на ∂D: першого роду на Γ_1, Γ_2, Γ_3 і другого на Γ_4. Межові умови згруповано так, що перші дві накладаються за змінною x, другі дві — за y.

Завдяки тому, що D є декартів добуток інтервалів, а Δ — сума диференціальних операторів, кожен з яких діє в одному з декартових співмножників, задача (46) розщеплюється на дві незалежні задачі ШЛ:

$$X'' = -\mu X, \quad X(0) = X(a) = 0; \tag{47}$$
$$Y'' = -\nu Y, \quad Y'(0) = Y(b) = 0. \tag{48}$$

Справді, нехай X, Y — власні функції цих задач. Покладемо $\Omega(x, y) = X(x)Y(y)$. Тоді

$$\Delta\Omega = YX'' + XY'' = -\mu XY - \nu XY = -(\mu + \nu)\Omega;$$

$\Omega(0, y) = X(0)Y(y) = 0$, і так само перевіряються решта межових умов.

Задачу (47) (вона ж (15)) розв'язано в прикладі 1.1. Міркуючи аналогічно, знаходимо власні елементи задачі (48):

$$\nu_m = \left(\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right)^2, \ Y_m(y) = \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right), \ m \in \mathbb{Z}_+. \tag{49}$$

Викладка попереднього абзацу показує, що серед власних елементів задачі (46) є такі:

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m, \ \Omega_{nm}(x, y) = X_n(x)Y_m(y), \ n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{50}$$

Покажемо, що інших власних елементів немає. За властивістю 2° спектральних задач функції Ω_{nm} ортогональні одна одній в $L_2(\overline{D})$. Для функцій (50) корисно встановити цей факт безпосередньо. Маємо

$$\int_0^a\int_0^b \Omega_{nm}(x, y)\Omega_{n'm'}(x, y)dxdy \equiv \int_0^a X_n(x)X_{n'}(x)dx \int_0^b Y_m(y)Y_{y'}(y)dy.$$

Перший інтеграл дорівнює нулю при $n \neq n'$, другий — при $m \neq m'$, що випливає з ортогональності власних функцій задач ШЛ або безпосередньо з виразів (16), (49) для X_n, Y_m.

Далі, нехай $F \in \mathcal{C}(\overline{D}) \subset L_2(\overline{D})$. Тоді при кожному фіксованому y функція $F(x,y)$ аргументу x належить $\mathcal{C}[a,b] \subset L_2[0,b]$ і за властивістю 3° розкладається в збіжний у середньоквадратичному ряд

$$F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) X_n(x),$$

$$F_n(y) = \|X_n\|^{-2} \int\limits_0^a F(x,y) X_n(x) dx, \ \|X_n\|^2 = \int\limits_0^a X_n^2(x) dx = a/2.$$

Згідно з рівністю Парсеваля—Стеклова [22, 29]

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^2(y) = \frac{2}{a} \int\limits_0^a F^2(x,y) dx. \tag{51}$$

При кожному n функція F_n, будучи неперервною, відтак і інтегровною з квадратом на $[0,b]$, розкладається в ряд за системою (Y_m) і коефіцієнти

$$F_{nm} = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int\limits_0^b F_n(y) Y_m(y) dy \equiv \frac{4}{ab} \int\limits_0^a \int\limits_0^b F(x,y) X_n(x) Y_m(y) dx dy$$

цього ряду справджують рівність Парсеваля—Стеклова

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}^2 = \frac{2}{b} \int\limits_0^b F_n^2(y) dy.$$

Підсумовуючи цю рівність по $n \in \mathbb{N}$, дістаємо з урахуванням (51)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}^2 = \frac{4}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b F^2(x,y)dxdy. \tag{52}$$

Оскільки множина $\mathcal{C}(\overline{D})$ всюди щільна в просторі $L_2(\overline{D})$, то це співвідношення справджують не тільки неперервні, але й довільні інтегровні з квадратом на $\overline{D}$ функції. Але (52) — це рівність Парсеваля—Стеклова для коефіцієнтів Фур'є функції F за ортогональною системою (Ω_{nm}, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$).Виконання її для `будь,якої` функції $F \in L_2$ є не тільки необхідна, але й достатня умова повноти ортогональної системи [16, 22, 29]. Отже, система (Ω_{nm}) власних функцій повна, звідки, як і в попередніх прикладах, виводимо, що інших власних елементів, окрім перелічених у списку (50) (побудованому за списками (16), (49)), задача (46) не має.

Зауваження 5
Якщо відношення a^2/b^2 раціональне, то не виключено, що $\lambda_{nm} = \lambda_{kj}$ при $(n,m) \neq (k,j)$. У цьому випадку одному власному значенню відповідає кілька лінійно незалежних власних функцій. Таке власне значення називається *виродженим*, а число відповідних лінійно незалежних власних функцій називається *степенем виродженості* або *кратністю виродження*.

Приклад 1.9

$$\Delta\Omega(\rho,\varphi) = -\lambda\Omega(\rho,\varphi), \quad 0 < \rho < b,\ \varphi \in S^1, \tag{53a}$$
$$\Omega \in \mathcal{C}\left([0,b] \times S^1\right) \tag{53b}$$
$$\alpha\Omega(b,\varphi) + \beta\Omega_\rho(b,\varphi) = 0, \tag{53c}$$

де ρ, φ — полярні координати на площині, S^1 — область зміни полярного кута (відрізок $[0, 2\pi]$ з ототожненими кінцями, або, в геометричних термінах, одиничне коло).

Тут D — відкритий круг із викинутим центром у початку координат, $\overline{D} = [0, b] \times S^1$ — замкнутий круг із центром включно.

Оскільки функція і область задані в полярних координатах, то природно в них же записувати оператор Лапласа:

$$\Delta_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{54}$$

Цей вираз не можна записати у вигляді

$$\sigma_2(\varphi)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(p_1(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \sigma_1(\rho)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(p_1(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

з інтегровними (як вимагається від вагової функції) σ_1, σ_2. Тому буквальне перенесення методу попереднього прикладу неможливе. Але ідея та сама: оскільки область є декартовим добутком, то власні функції слід шукати у вигляді добутків $R(\rho)\Phi(\varphi)$, де співмножники належать до якихось повних ортогональних систем в $L_2[0, b]$ та $L_2(S^1)$ відповідно.

З теорії рядів Фур'є відомі два класичні варіанти такої системи в $L_2(S^1)$:

- у дійсній формі: $\Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ і $\Phi_n(\varphi) = \sin(|n|\varphi)$ при $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$;

- у комплексній формі: $\Phi_n(\varphi) = e^{in\varphi}$.

Читач може на свій розсуд розуміти під Φ_n елементи першої чи другої системи. Для нас важливо те, що в обох випадках

$$\Phi_n'' = -n^2\Phi_n. \tag{55}$$

Відмінність від попереднього прикладу полягає в тому, що для побудови ситеми не обов'язково розв'язувати задачу ШЛ (утворену з (55) приєднанням умов періодичності виду (10), (11)).

Підставляємо гаданий вираз власної функції $R_n(\rho)\Phi_n(\varphi)$ у співвідношення (53). Зважаючи на (54), (55), маємо

$$\Delta\left(R_n\Phi_n\right) = \Big(\frac{1}{\rho}\left(\rho R_n'\right)' - \frac{n^2}{\rho^2}R_n\Big)\Phi_n.$$

У результаті отримуємо з (53) задачу ШЛ для R_n:

$$(\rho R_n')' - n^2\rho^{-1}R_n = -\lambda\rho R_n, \tag{56a}$$

$$R_n \in \mathcal{C}[0,b], \tag{56b}$$

$$\alpha R(b) + \beta R'(b) = 0 \tag{56c}$$

(індекс n нумерує не власні функції, а самі задачі, залежні від n як від параметра).

Рівняння (56a) є окремий випадок (40a) ($\nu = n$), тому (див. приклад 1.7) кожен його розв'язок, підпорядкований умові (56b), пропорційний $J_{|n|}\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)$. Щоб задовольнити також умову (56c), потрібно вибрати λ рівним μ^2/b^2, де μ — якийсь додатний корінь рівняння

$$\alpha J_{|n|}(\mu) + \beta b^{-1}\mu J_{|n|}'(\mu) = 0. \tag{57}$$

Тоді власні елементи задачі (56) вичерпуються списком

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{b^2}, \quad R_{nm}(\rho) = J_{|n|}\left(\mu_{nm}\rho/b\right),\ m \in \mathbb{N}, \tag{58}$$

де $(\mu_{nm}, m \in \mathbb{N})$ — послідовність `усіх` додатних коренів рівняння (57).

Функції

$$\Omega_{nm}(\rho,\varphi) = R_{nm}(\rho)\Phi_n(\varphi), \quad n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}, \tag{59}$$

за побудовою є власними для спектральної задачі (53). Міркуючи, як у попередньому прикладі, пересвідчуємося, що інших власних функцій вона не має.

Зауваження 6
У прикладі 1.9, на відміну від 1.8, за однією із змінних (а саме ρ) розв'язується не одна задача ШЛ, а ціла сім'я. Тому в правій частині (59) перший співмножник залежить від двох індексів, тоді як в аналогічній рівності (49) кожен співмножник залежить від одного індексу.

Зауваження 7
Як видно з (56а), функції R_{nm} при різних m ортогональні на відрізку $[0, b]$ з вагою ρ. Але функції Ω_{nm} при різних (n, m) ортогональні в крузі не з вагою ρ, а з вагою 1. Це пояснюється тим, що елемент площі круга дорівнює $\rho d\rho$.

Приклад 1.10

$$\Delta Y(\theta, \varphi) = -\lambda Y(\theta, \varphi), \qquad 0 < \theta < \pi, \ \varphi \in S^1, \tag{60a}$$

$$Y \in \mathcal{C}(S^2). \tag{60b}$$

Тут $D =]0, \pi[\times S^1$ — сфера з викинутим північним і південним полюсами, $\overline{D} = S^2$ — сфера.

Вираз оператора Лапласа на сфері

$$\Delta \equiv \Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{61}$$

показує, що слід діяти, як у прикладі 1.9. Підставивши гаданий вираз $\Theta_m(\theta)\Phi_m(\varphi)$ власної функції в (60), одержимо з урахуванням (61), (55) для кожного m двічі сингулярну задачу ШЛ на $[0, \pi]$

$$\left(\Theta'_m \sin\theta\right)' - m^2 \Theta_m / \sin\theta = -\lambda \Theta \sin\theta, \tag{62a}$$

$$\Theta_m \in \mathcal{C}[0, \pi], \tag{62b}$$

в якій $\rho(\theta) = \sigma(\theta) = \sin\theta$; $q(\theta) = m^2/\sin\theta$. Індекс m нумерує не власні функції, а самі задачі, залежні від m як від параметра.

Введемо нову невідому функцію Θ_m:

$$X(x) = (1 - x^2)^{-|m|/2}\Theta_m(\arccos x),$$

або, рівносильно,

$$\Theta_m(\theta) = X(\cos\theta)\sin^{|m|}\theta. \tag{63}$$

Далі міркуємо для $m \geq 0$, а в кінці замінимо m на $|m|$.

Диференціюючи (63), знаходимо

$$\begin{aligned} \Theta_m'(\theta) &= \left[-X'(\cos\theta)\sin^2\theta + X(\cos\theta)\cos\theta\right]\sin^{m-1}\theta, \\ \Theta_m''(\theta) &= \left[X''(\cos\theta)\sin^4\theta - (2m+1)X'(\cos\theta)\sin\theta\cos\theta\right. \\ &\quad \left. + (m^2\cos^2\theta - m)X(\cos\theta)\right]\sin^{m-2}\theta. \end{aligned} \tag{64}$$

Підставивши (63), (64) в (62a), дістанемо після спрощень і заміни $\cos\theta$ на x рівняння (22a). Умова ж (62b) заміною (63) переводиться у (22b). На підставі прикладу 1.3 записуємо власні функції задачі (62) в такому вигляді:

$$\Theta_{lm}(\theta) = P_l^{|m|}(\cos\theta)\sin^{|m|}\theta, \quad l \in \mathbb{Z}_+, l \geq |m|.$$

Тепер, повторюючи міркування прикладу 1.9, пересвідчуємося, що власні елементи задачі (60) вичерпуються списком

$$\lambda_{lm} = l(l+1),\ Y_{lm}(\theta,\varphi) = \Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi), \tag{65}$$

де $l \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $-l \leq m \leq l$. Функції Y_{lm} називаються *сферичними*. За побудовою вони утворюють повну ортогональну систему функцій в $L_2\left([0,\pi]\times S^1, \sin\theta\right) = L_2(S^2)$ і Y_{lm} задовольняє диференціальне рівняння

$$\Delta_{\theta\varphi}Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}.$$

Зауваження 8
У позначенні $L_2(S^2)$ вагову функцію не пишемо, оскільки відносно диференціала площі поверхні сфери $\sin\theta d\theta d\varphi$ вона дорівнює 1.

Приклад 1.11

$$\Delta\Omega(r,\theta,\varphi) = -\lambda\Omega(r,\theta,\varphi),\ 0<r<b, 0<\theta<\pi, \varphi\in S^1, \tag{66a}$$
$$\Omega \in \mathcal{C}(\overline{D}), \tag{66b}$$
$$\Omega(b,\theta,\varphi) = 0. \tag{66c}$$

Тут D — відкрита куля радіуса b з викинутою віссю (прямою, що сполучає два полюси), $\overline{D} = [0,\pi]\times S^2$ — замкнута куля.

Розв'язання. Нагадаємо вираз оператора Лапласа у сферичних координатах

$$\Delta \equiv \Delta_{r\theta\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}. \tag{67}$$

Оскільки повну ортогональну систему функцій на сфері вже побудовано в прикладі 1.10, то власні функції слід шукати за методом попередніх трьох прикладів у вигляді $R_l(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ (перший співмножник, як побачимо нижче, від m не залежить). Підставляючи цей вираз у (66) і враховуючи, що

$$\Delta\left(R_lY_{lm}\right) = r^{-2}\left[\left(r^2R_l'\right)' - l(l+1)\right]Y_{lm}$$

внаслідок (67), (65), одержуємо для кожної пари (l,m) спектральну задачу

$$r^2R_l'' + 2rR_l' + \left(\lambda r^2 - l(l+1)\right)R_l = 0, \tag{68a}$$
$$R_l \in \mathcal{C}[0,b], \tag{68b}$$
$$R_l(b) = 0. \tag{68c}$$

Це **не** задача ШЛ, оскільки, записавши рівняння (68a) у вигляді (5), матимемо $p(r) = r^2$, $\lim_{r\to 0} p(r)/r = 0$. Але вона зводиться до такої заміною невідомої функції

$$R_l(r) = r^{-1/2} Q_l(\sqrt{\lambda} r), \tag{69}$$

яка перетворює (68a) на рівняння Бесселя

$$r^2 Q_l'' + r Q_l' + \left(r^2 - (l+1/2)^2\right) Q_l = 0, \tag{70a}$$

а межові умови (68b), (68c) — на співвідношення

$$r^{1/2} Q_l \in \mathcal{C}[0,b], \tag{70b}$$

$$Q_l(\sqrt{\lambda} b) = 0. \tag{70c}$$

Як показано в прикладі 1.7, функції

$$Q_{lk}(r) = J_{l+1/2}\left(b^{-1}\mu_{lk} r\right),$$

де μ_{lk} — k-й додатний корень рівняння $J_{l+1/2}(\mu) = 0$, справджують співвідношення (70). З теорії циліндричних функцій відомо [5, 22, 26, 29], що лінійно незалежний від J_ν розв'язок рівняння Бесселя (42) при $\nu > 0$ має в околі нуля порядок $\rho^{-\nu}$. У нашому випадку $\nu = l + 1/2$, ($l \geq 0$), $\rho = r$, тому лінійно незалежний від Q_{lk} розв'язок рівняння (70a) не може справджувати умову (70b). Отже, спектральна задача (70) не має інших власних функцій, окрім Q_{lk}. Беручи до уваги (69), записуємо власні функції задачі (68) у вигляді

$$R_{lk}(r) = r^{-1/2} J_{l+1/2}\left(\mu_{lk} b^{-1} r\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{71}$$

За побудовою функції

$$\Omega_{lmk}(r,\theta,\varphi) = R_{lk}(r) Y_{lm}(\theta,\varphi), \quad l \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z},\ |m| \leq l, \tag{72}$$

є власними для задачі (66), і $\lambda_{lmk} = \mu_{lk}^2/b^2$ — відповідні їм власні числа. Покажемо, що інших власних функцій немає.

Функції Q_{lk}, $k \in \mathbb{N}$, є власними не тільки для задачі (70), але й для задачі ШЛ, утвореної з неї заміною умови (70b) на $Q_l \in \mathcal{C}[0,b]$. За властивостями 2°, 3° задач ШЛ при кожному l система $(Q_{lk},\ k \in \mathbb{N})$ ортогональна й повна в $L_2([0,b],r)$. Тоді згідно з (69) система (70c) ортогональна й повна в $L_2([0,b],r^2)$. Повторюючи міркування прикладу 1.9, переконуємося, що система (72) має ці ж властивості в

$$L_2([0,b]\times[0,\pi]\times S^1, r^2\sin\theta) = L_2(\overline{D}),$$

тож інших власних функцій задача (66) не має.

Зауваження 9
Функції R_{lk}, відтак і Ω_{lmk}, елементарні. Справді, за формулою (44)

$$J_{1/2}(r) = \sqrt{\frac{2}{r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n r^{2n+1}}{2^{2n+1}n!\Gamma(n+3/2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\sin r,$$

звідки на підставі (71) $R_{1k} = (2/\pi r)^{-1/2}\sin(\pi k r/b)$. Рекурентна формула

$$J_{\nu+1}(r) = \frac{2\nu}{r}J_\nu(r) - J_{\nu-1}(r),$$

яка також виводиться з (44) (див. [5, 22, 26, 29]), показує, що при будь–якому $l \in \mathbb{Z}_+$ $J_{l+1/2}(r)$ є раціональною функцією від $\sqrt{r}$ та $\sin r$. Але при $l > 0$ для μ_{lk} вже не можна вказати явного виразу на зразок $\mu_{0k} = k\pi$, а слід знаходити їх за таблицями (див., наприклад, [1, 33]).

Приклад 1.12

$$\Delta\Omega(\rho,\varphi,z) = -\lambda\Omega(\rho,\varphi,z), \tag{73a}$$
$$0<\rho<b, \quad \varphi\in S^1, \quad 0<z<l,$$
$$\Omega\in\mathcal{C}(\overline{D}), \quad \Omega(b,\varphi,z)=0, \tag{73b}$$
$$\Omega(\rho,\varphi,0)=\Omega(\rho,\varphi,l)=0. \tag{73c}$$

Тут D — відкритий циліндр із викинутою віссю, $\overline{D}$ — замкнутий циліндр (із віссю включно).

Розв'язання. Вираз оператора Лапласа в циліндричних координатах
$$\Delta_{\rho\varphi z} = \Delta_{\rho\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{74}$$
показує, що власні функції задачі є добутками власних функцій спектральних задач у крузі (приклад 1.9) і на відрізку $[0,l]$ (приклад 1.1):

$$\Omega_{nkm}(\rho,\varphi,z) = J_{|n|}\left(\frac{\mu_{nm}\rho}{b}\right)\Phi_m(\varphi)\sin\left(\frac{\pi kz}{l}\right),\ n\in\mathbb{Z}, m,k,\in\mathbb{N},$$

де μ_{nm} — m-й додатний корінь рівняння $J_{|n|}(\mu)=0$. Ці спектральні задачі, як і в прикладі 1.8, не залежать одна від одної.

Зазначимо наостанок, що в сучасній математиці спеціальні функції часто вводяться як матричні елементи незвідних представлень (зображень) класичних груп, що характеризують симетрію диференціальних операторів математичної фізики [9, 24, 35]. Самі ж представлення виникають при вивченні диференціальних рівнянь у частинних похідних методами теорії неперервних груп.

2. Застосування спеціальних функцій у фізичних задачах

2.1. Задачі електродинаміки

Приклад 2.1

Знайти потенціал, створюваний заземленою металевою сферою радіуса R і точковим зарядом q, поміщеним на відстані a від центра сфери. Розглянути два випадки: а) заряд знаходиться всередині сфери ($a < R$); б) заряд зовні сфери ($a > R$).

Розв'язання. В обох випадках

$$u = u_1 + u_2, \tag{75}$$

де u_1 — потенціал, створюваний точковим зарядом у вільному просторі, u_2 — потенціал сфери. Введемо позначення: O — центр сфери, M_0 — точка розміщення заряду (фіксована), M — точка спостереження (змінна), $r = OM$, θ — кут між векторами $\boldsymbol{OM_0}$ та $\boldsymbol{OM}$. За умовою $OM_0 = a$.

Згідно із законом Кулона $u_1 = \frac{q}{M_0M}$, або, в координатному записі,

$$\begin{aligned} u_1(r,\theta) &= \frac{q}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{1 - 2(r/a)\cos\theta + (r/a)^2}}, & r < a, \\ \dfrac{q}{2a\sin(\theta/2)}, & r = a, \\ \dfrac{q}{r\sqrt{1 - 2(a/r)\cos\theta + (a/r)^2}}, & r > a. \end{cases} \end{aligned} \tag{76}$$

З теорії спеціальних функцій відоме розвинення (див., наприклад, [29])

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^n, \qquad |x|, |t| < 1, \tag{77}$$

де P_l — поліноми Лежандра, введені в прикладі 1.2. Зважаючи на (77), перепишемо (76) у вигляді

$$u_1(r,\theta) = \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r < a, \\ \dfrac{1}{2a\sin(\theta/2)}, & r = a, \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r > a. \end{cases} \tag{78}$$

Далі випадки а) і б) розглядаємо окремо.

а) Шукаємо спочатку потенціал у кулі (нижче ми покажемо, що зовні кулі він дорівнює нулеві). Функція u_2, будучи потенціалом, гармонічна всередині кулі. Окрім того, u_2 не залежить, очевидно, від сферичної координати φ (довготи). Тому в її розвиненні за сферичними функціями (див. приклад 1.10) відсутні Y_{lm} з $m \neq 0$ (бо вони залежать від φ), а є тільки $Y_{l0}(\theta) = (2l + 1/4\pi)^{1/2} P_l(\cos\theta)$. Таким чином,

$$u_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), \quad r \leq R. \tag{79}$$

(Доданки виду $B_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta)$, які також є гармонічними функціями, не можуть входити в розвинення, оскільки не обмежені в околі нуля). Коефіцієнти A_l знаходяться з умови заземленості, яка математично виражається рівністю

$$u(R,\theta) \equiv u_1(R,\theta) + u_2(R,\theta) = 0. \tag{80}$$

Підставляючи (78), (79) із $r = R > a$ у (80) і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при P_l, дістаємо

$$A_l = -\frac{qa^l}{R^{2l+1}}. \tag{81}$$

Це спільно з (75), (78), (79) дає такий вираз для u

$$u(r,\theta) = \begin{cases} q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{R^{2l+1} - a^{2l+1}}{a^{l+1}R^{2l+1}} r^l P_l(\cos\theta), & r < a, \\ \dfrac{q}{2a\sin(\theta/2)} - q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{a^{2l}}{R^{2l+1}} P_l(\cos\theta), & r = a, \\ q\sum\limits_{l=0}^{\infty} a^l \dfrac{R^{2l+1} - r^{2l+1}}{r^{l+1}R^{2l+1}} P_l(\cos\theta), & a < r \le R. \end{cases} \tag{82}$$

Далі,

$$u_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta), \quad r \ge R. \tag{83}$$

(Доданки з (79) не можуть входити в розвинення потенціалу в зовнішності кулі, оскільки вони не прямують до нуля при $r \to \infty$). З умови (80) і рівностей (78) (нижній рядок), (75) знаходимо

$$B_l = -qa^l, \tag{84}$$

звідки

$$u(r,\theta) = 0, \qquad r \ge R, \tag{85}$$

що і стверджувалось.

Ряд для u_2 легко підсумовується. Для цього потрібно виконати у зворотному порядку дії, що привели від (76) до (78). А саме, при $r \le R$

$$u_2(r,\theta) = -\frac{q}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{ar}{R^2}\right)^l P_l(\cos\theta) = -\frac{q}{R\sqrt{1 - \frac{2ar}{R^2}\cos\theta + \frac{a^2r^2}{R^4}}}$$

(перша рівність спирається на (79), (81), друга на (77)). Тотожно перетворивши останній вираз і взявши до уваги (75), (76), отримаємо для $r \le R$

$$u(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta + a^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2r^2 - 2R^2 ar\cos\theta + R^4}}. \quad (86)$$

Саме до такого виразу, рівносильного (82), приводить, обминаючи ряди, метод електростатичних зображень [28].

б) Тепер потенціал усередині кулі дорівнює нулю:

$$u(r,\theta) = 0, \qquad r \le R \quad (87)$$

і u шукається тільки при $r > R$. Підставляючи у (80) вирази (78) та (83) із $r = R < a$ і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при P_l, дістаємо

$$B_l = -a^{-l-1}R^{2l+1}. \quad (88)$$

Це спільно з (75), (78), (83) дає вираз для u:

$$u(r,\theta) = \begin{cases} q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{r^{2l+1} - R^{2l+1}}{a^{l+1}r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & R \le r < a, \\ \dfrac{q}{2a\sin(\theta/2)} - q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{R^{2l+1}}{a^{2l+2}} P_l(\cos\theta), & r = a, \\ q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{a^{2l+1} - R^{2l+1}}{a^{l+1}r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r > a. \end{cases} \quad (89)$$

І знову, як і в попередньому випадку, ряд для u_2 підсумовується. Внаслідок (83), (88), (77)

$$u_2(r,\theta) = -\frac{Rq}{ar\sqrt{1 - 2R^2(ar)^{-1}\cos\theta + (ar)^{-2}R^4}}$$

і ми отримуємо **той самий вираз** для u_2, отже й для u (рівність (86)), що й у випадку а), але вже в області $r \ge R$. Звичайно, він рівносильний (89).

Відповідь. а) Зовні кулі (85), усередині (82) або (86).

б) Усередині (87), зовні (89) або (86).

Приклад 2.2

Знайти потенціал, створюваний ізольованою зарядженою (заряд q_0) металевою сферою радіуса R і точковим зарядом q, поміщеним на відстані a від центра сфери. Розглянути два випадки: а) заряд знаходиться всередині сфери ($a < R$); б) заряд зовні сфери ($a > R$).

Розв'язання. Внаслідок ізольованості сфери її власний заряд не змінюється в присутності точкового заряду. Отже, поверхневий інтеграл від густини зарядів дорівнює q. Оскільки, очевидно, густина не залежить від сферичної довготи (за такого вибору осі, як у прикладі 2.1), то умова ізольованості виражається рівністю

$$2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta d\theta = q_0. \tag{90}$$

Густина вільних зарядів на провідній поверхні дається формулою [8, 20]

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(D_n^{(i)} - D_n^{(e)}\right), \tag{91}$$

де $D_n^{(i)}, D_n^{(e)}$ — нормальні складові вектора електричної індукції в частинах простору, розділених цією поверхнею, а вектор нормалі напрямлений від першої до другої. Для замкнутої, як у нашому випадку, поверхні прийнято вибирати напрям нормалі зсередини назовні. Тоді $\boldsymbol{D}^{(i)}$ — вектор електричної індукції в обмеженій цією поверхнею області, а $\boldsymbol{D}^{(e)}$ — в її доповненні (зовнішності), що й відображено в позначеннях. Якщо змінити напрям нормалі, то в правій частині (91) зменшуване і від'ємник поміняються ролями і водночас змінять знак, так що значення виразу не зміниться. При цьому у вакуумі $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$; за означенням потенціалу електричного поля $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$; на сфері $\partial/\partial \boldsymbol{n} = \partial/\partial r$; похідна $\partial u_1/\partial r$ неперервна. Це спільно з (75) зводить рівність (91) до вигляду

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\Big|_{r=R-0} - \frac{\partial u_2}{\partial r}\Big|_{r=R+0}\right),$$

і перетворює таким чином (90) на

$$\int\limits_0^\pi \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}(R-0,\theta) - \frac{\partial u_2}{\partial r}(R+0,\theta)\right)\sin\theta d\theta = \frac{2q_0}{R^2}. \tag{92}$$

Сам же потенціал — неперервна функція:

$$u_2(R-0,\theta) = u_2(R+0,\theta).$$

Це дає зв'язок між коефіцієнтами його розвинень (79), (83) усередині та зовні кулі:

$$B_l = R^{2l+1} A_l. \tag{93}$$

Звідси

$$u_2(r,\theta) = \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), & r \le R, \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r \ge R, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_2}{\partial r}(R-0,\theta) - \frac{\partial u_2}{\partial r}(R+0,\theta) \\ &= -\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)R^{l-1}A_l P_l(\cos\theta) \end{aligned} \tag{94}$$

Функції $P_l(\cos\theta)$, будучи сферичними, попарно ортогональні на $[0,\pi]$ з вагою $\sin\theta$ (див. приклад 1.10). Зокрема, ортогональність $P_l(\cos\theta)$ $(l \geq 1)$ і $P_0 = 1$ означає, що

$$\int\limits_0^\pi P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0, \qquad l \geq 1.$$

Звідси і з (92), (94) знаходимо

$$A_0 = q_0/R, \tag{95}$$

а тоді внаслідок (93)

$$B_0 = q_0. \tag{96}$$

Візьмемо до уваги еквіпотенціальність провідної поверхні (наявність різниці потенціалів зумовила би протікання струму), яка математично виражається рівністю

$$u(R,\theta) = \text{const}. \tag{97}$$

Вона означає, що розвинення $u(r,\theta)$ за сферичними фенкціями не містить залежних від θ функцій $P_l(\cos\theta)$, $l \geq 1$. Далі розглядаємо два випадки окремо.

а) Згідно з (78) (нижній рядок), (79), (83), (93)

$$u(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[qa^l R^{-l-1} + A_l R^l\right] P_l(\cos\theta),$$

звідки з огляду на (97)

$$A_l = -qa^l R^{-2l-1}, \quad l \geq 1, \tag{98}$$

що спільно з (95), (96) дає розвинення u, яке читач за аналогією з (82) випише сам. Ми ж наведемо отриманий підсумовуванням рядів вираз, аналогічний (86).

З (79), (83), (93), (95), (96), (98) маємо

$$u_2(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{q_0}{R} + \dfrac{q}{R} - q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{a^l r^l}{R^{2l+1}} P_l(\cos\theta), & r \le R, \\ \dfrac{q_0}{r} + \dfrac{q}{r} - q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r \ge R, \end{cases} \tag{99}$$

причому сума в нижньому рядку дорівнює, згідно з (78), $u_1(r,\theta)$. Звідси і з (75)-(77) одержуємо

$$u(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{q}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}} + \dfrac{q+q_0}{R} - \\ -\dfrac{qR}{\sqrt{a^2r^2 - 2arR^2\cos\theta + R^4}}, & r \le R, \\ \dfrac{q+q_0}{r}, & r \ge R. \end{cases} \tag{100}$$

б) Згідно з (78) (верхній рядок), (79), (83), (93), (75)

$$u(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[qR^l a^{-l-1} + A_l R^l \right] P_l(\cos\theta), \tag{101}$$

звідки з огляду на (97)

$$A_l = -qa^{-l-1}, \quad l \ge 1. \tag{102}$$

Це спільно з (95), (96), (79), (83), (93) дає такий вираз u_2:

$$u_2(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{q_0}{R} + \dfrac{q}{a} - q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r \le R, \\ \dfrac{q_0}{r} + \dfrac{Rq}{ar} - q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{R^{2l+1}}{a^{l+1}r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r \ge R, \end{cases} \tag{103}$$

причому, згідно з (78), сума ряду у верхньому рядку дорівнює

$u_1(r,\theta)$. Звідси і з (75)-(77) одержуємо

$$u(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{Rq+qq_0}{aR}, & r \le R, \\ \dfrac{q}{\sqrt{a^2-2ar\cos\theta+r^2}} + \dfrac{Rq+aq_0}{ar} - \\ -\dfrac{qR}{\sqrt{a^2r^2-2arR^2\cos\theta+R^4}}, & r \ge R. \end{cases} \tag{104}$$

Відповідь. а) (100); б) (104). Ці вирази можна отримати також методом електростатичних зображень [20, 28].

Приклад 2.3

Куля радіуса a з діелектричною сталою ε_1 перебуває в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На нескінченності задане стале однорідне електричне поле $\boldsymbol{E}_0$. Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі.

Розв'язання. Потенціал у кулі можна подати у вигляді

$$u_1(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Оскільки потенціал у середовищі на нескінченності має асимптотику

$$u_2(r,\theta,\varphi) \sim -E_0 z = -E_0 r\cos\theta, r\to\infty,$$

то його можна подати так:

$$u_2(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} B_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta,\varphi) - E_0 r\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} Y_{10}(\theta,\varphi).$$

На межі кулі та середовища повинні виконуватись умови неперервності потенціалу і нормальної складової електричної індукції

$$u_1\Big|_{r=a} = u_2\Big|_{r=a}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial r}\Big|_{r=a} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial r}\Big|_{r=a}.$$

Підставляючи в межові умови вирази для потенціалу в кулі та середовищі і прирівнюючи коефіцієнти Фур'є при сферичних функціях з однаковими індексами, встановлюємо, що тільки два коефіцієнти Фур'є відмінні від нуля:

$$A_{10} = -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}, \quad B_{10} = -E_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3.$$

Відповідь.

$$\begin{aligned} u_1 &= -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} r \cos\theta, \\ u_2 &= -E_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \frac{a^3}{r^3}\right) r \cos\theta. \end{aligned}$$

Приклад 2.4

Сферичний діелектричний шар із зовнішнім радіусом a, внутрішнім радіусом b і з діелектричною сталою ε перебуває в однорідному електричному полі $\boldsymbol{E}_0$. Знайти електричне поле всередині шару.

Розв'язання. Потенціал u задовольняє рівняння Лапласа і має вигляд:

$$u(r,\theta) = \begin{cases} -E_0\left(r - \frac{A}{r^2}\right)\cos\theta, & a < r < \infty, \\ -BE_0(r - \frac{C}{r^2})\cos\theta, & b < r < a, \\ -DE_0 r\cos\theta, & 0 \le r < b. \end{cases}$$

Тут ми взяли до уваги, що потенціал зовнішнього електричного поля пропорційний $\cos\theta$, і з огляду на це виписали всі пропорційні $\cos\theta$ члени загального розв'язку рівняння Лапласа.

Сталі A, B, C, D визначаються з умов неперервності потенціалу u та нормальної компоненти діелектричної індукції $\varepsilon(\partial u/\partial r)$ для $r = a$ та $r = b$.

Відповідь. Поле всередині шару $(0 \leq r < b)$ має вигляд:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \frac{9\varepsilon}{(\varepsilon+2)(2\varepsilon+1) - 2(\varepsilon-1)^2(b/a)^3}.$$

Приклад 2.5 'Задача про клин, H.M. Macdonald, 1895(

Знайти потенціал, створюваний точковим зарядом q, поміщеним між двома металевими заземленими півплощинами, що перетинаються під кутом β. Циліндричні координати заряду $\boldsymbol{r}_0 = (a, \alpha, 0)$.

Розв'язання. Шуканий потенціал $u(\rho, \varphi, z)$ є розв'язком рівняння Пуассона $\Delta u = -4\pi\rho(\boldsymbol{r})$, де ρ — густина заряду. Оскільки заряд точковий, то густина пропорційна δ-функції: $\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$. У циліндричних координатах $\boldsymbol{r} = (\rho, \varphi, z)$

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{a}\delta(\rho - a)\delta(\varphi - \alpha)\delta(z),$$

тому рівняння Пуассона набуває вигляду

$$\Delta u = -\frac{4\pi q}{a}\delta(\rho - a)\delta(\varphi - \alpha)\delta(z).$$

Пригадавши вирази (74), (54) оператора Лапласа в циліндричних і полярних координатах, пересвідчуємося, що перетвір Фур'є цього потенціалу

$$u_k(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\rho, \varphi, z)\cos kz dz, \qquad k \in \mathbb{R}_+,$$

є розв'язком крайової задачі

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u_k}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial\varphi^2}-k^2u_k=$$

$$=-\frac{4q}{a}\delta(\rho-a)\delta(\varphi-\alpha), \tag{105a}$$

$$u_k(\rho,0)=u_k(\rho,\beta)=0, \tag{105b}$$

$$u_k(\infty,\varphi)=0. \tag{105c}$$

У кожній з областей $\rho<a$, $\rho>a$ рівняння (105a) однорідне. За теоремою Стеклова [22, 29] для будь–якого $\rho\neq a$ функція $u_k(\rho,\varphi)$ розкладається в ряд

$$u_k(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}R_{kn}(\rho)\Phi_n(\varphi) \tag{106}$$

за системою (Φ_n) власних функцій задачі ШЛ

$$\Phi''=-\nu^2\Phi,\qquad \Phi(0)=\Phi(\beta)=0. \tag{107}$$

Останню вже розв'язано (в інших позначеннях) в прикладі 1.1, тому відразу скористаємось відповіддю (16):

$$\Phi_n(\varphi)=\sin\nu_n\varphi,\quad \nu_n=\frac{n\pi}{\beta},\ n\in\mathbb{N}. \tag{108}$$

Із (107), (108), (54) одержуємо (деталі можна знайти в [32])

$$\rho^2R''_{kn}+\rho R'_{kn}-(k^2\rho^2+\nu_n^2)R_{kn}=0. \tag{109}$$

Це рівняння відрізняється від (40a), окрім позначень, знаком перед $k^2\rho^2$ і утворюється з останнього заміною ρ на $i\rho$. Тому його розв'язки утворюються з розв'язків рівняння (40a) заміною ρ на $i\rho$. При цьому сталий множник, від якого залежить розв'язок усякого однорідного рівняння, добирають так, щоб утворені функції на дійсній осі набирали дійсних значень. Позначивши

$$I_\nu(\rho) = e^{-\pi\nu i/2} J_\nu(i\rho) \overset{(44(}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)} \qquad (110)$$

(*модифікована функція Бесселя*) і

$$K_\nu(\rho) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(\rho) - I_\nu(\rho)}{\sin \nu\pi} \qquad (111)$$

(*функція Макдональда*), запишемо (пор. із прикладом 1.7) фундаментальну систему розв'язків

$$I_{\nu_n}(k\rho), \qquad K_{\nu_n}(k\rho)$$

рівняння (109). Її вронскіан дається формулою [29]

$$K_\nu(x) I'_\nu(x) - I_\nu(x) K'_\nu(x) = \frac{1}{x}. \qquad (112)$$

Як видно із (110), при $\nu > 0$ модифікована функція Бесселя $I_\nu(\rho)$ обмежена в околі нуля і прямує до ∞ при $\rho \to \infty$. Тоді з виразу для вронскіана випливає, що функція Макдональда $K_\nu(\rho)$ необмежена в околі нуля і прямує до 0 при $\rho \to \infty$.

Ці властивості функцій I_ν, K_ν спільно зі (105c) показують, що в розвиненні (106) $R_{kn}(\rho)$ пропорційне $I_{\nu_n}(k\rho)$ при малих ρ і $K_{\nu_n}(k\rho)$ при великих. Вигляд правої частини рівняння (105a) показує, що за межу між малими та великими значеннями слід узяти a. Тоді розвинення (106) набуває вигляду

$$u_k(\rho,\varphi) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{kn} I_{\nu_n}(k\rho) \sin \nu_n\varphi, & \rho < a, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_{kn} K_{\nu_n}(k\rho) \sin \nu_n\varphi, & \rho > a. \end{cases} \qquad (113)$$

Щоб визначития сталі A_{kn} та B_{kn}, скористаємось, по–перше, умовою неперервності потенціалу в точці a:

$$u(a-0) = u(a+0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{B_{kn}}{A_{kn}} = \frac{I_{\nu_n}(ka)}{K_{\nu_n}(ka)}. \tag{114}$$

По–друге, вимагатимемо, щоб потенціал (113) задовольняв рівняння (105a). Помножимо обидві частини (105a) на $\Phi_m(\varphi)$ і проінтегруємо за змінною $\varphi \in [0, \beta]$. З урахуванням ортогональності $\Phi_m(\varphi)$ на відрізку $[0, \beta]$, дістанемо рівняння

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho R'_{km}\right)' - \left(k^2 + \frac{\nu_m^2}{\rho^2}\right) R_{km} = -\frac{8q}{\beta a}\delta(\rho - a)\sin \nu_m \alpha, \tag{115}$$

де

$$R_{km}(\rho) = \begin{cases} A_{km} I_{\nu_m}(k\rho), & \rho < a, \\ B_{km} K_{\nu_m}(k\rho), & \rho > a. \end{cases} \tag{116}$$

Функція R_{km} неперервна (див. умову (114)). Її похідна в кожній з областей $\rho < a$, $\rho > a$ є гладка функція, але, згідно із (116) у самій точці $\rho = a$ вона має стрибок:

$$\begin{aligned} \left[R'_{km}\right]_a &\equiv R'_{km}(a+0) - R'_{km}(a-0) \\ &= kB_m K'_{\nu_m}(ka) - A_m I'_{\nu_m}(ka). \end{aligned} \tag{117}$$

Нехай $\{R''_{km}\}$ позначає класичну похідну функції функції R'_{km}, тобто $R''_{km}(\rho) = \{R''_{km}(\rho)\}$ для будь–яких $\rho \neq a$. Врахувавши (117), подамо похідну R''_{km} у вигляді [10])

$$R''_m(\rho) = \left\{R''_{km}(\rho)\right\} + \left[R'_{km}\right]_a \cdot \delta(\rho - a). \tag{118}$$

Підставивши (118) у (115), дістанемо рівняння

$$\begin{aligned} &\left\{R''_{km}\right\} + \left[R'_{km}\right]_a \cdot \delta(\rho - a)\frac{1}{\rho}R'_{km} - \left(k^2 + \frac{\nu_m^2}{\rho^2}\right) R_{km} = \\ &= -\frac{8q}{\beta a}\delta(\rho - a)\sin \nu_m \alpha. \end{aligned} \tag{119}$$

Врахувавши, що Функції R_{km} із (116) за побудовою задовольняють рівняння (109), перепишемо (119) у вигляді

$$\left[R'_{km}\right]_a \cdot \delta(\rho - a) = -\frac{8q}{\beta a}\delta(\rho - a)\sin\nu_m\alpha.$$

Із (117) маємо друге співвідношення між A_{kn} і B_{kn}:

$$kB_{kn}K'_{\nu_n}(ka) - kA_{kn}I'_{\nu_n}(ka) = -\frac{8q}{\beta a}\sin\nu_n\alpha. \qquad (120)$$

Розв'язуючи рівняння (114), (120) з урахуванням співвідношення (112), знаходимо явний вираз для коефіцієнтів A_{kn} та B_{kn}:

$$\begin{aligned} A_{kn} &= \frac{8q}{\beta}K_{\nu_n}(ka)\sin\nu_n a, \\ B_{kn} &= \frac{8q}{\beta}I_{\nu_n}(ka)\sin\nu_n a. \end{aligned}$$

Отже, розв'язок задачі можна подати у вигляді інтеграла Фур'є

$$u(\rho,\varphi,z) = \int\limits_0^\infty u_k(\rho,\varphi)\cos kz\,dk, \qquad (121a)$$

де

$$u_k(\rho,\varphi) = \frac{8q}{\beta}\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_{\nu_n}(ka)I_{\nu_n}(k\rho)\sin\nu_n\alpha\sin\nu_n\varphi, & \rho < a, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{\nu_n}(ka)K_{\nu_n}(k\rho)\sin\nu_n\alpha\sin\nu_n\varphi, & \rho > a. \end{cases} \qquad (121b)$$

Скориставшись формулою [11]

$$\int\limits_0^\infty K_\nu(k\rho)I_\nu(ka)\cos kzdk = \frac{1}{2\sqrt{2a\rho}}Q_{\nu-1/2}\left(\operatorname{ch}\eta\right),$$

де

$$\operatorname{ch}\eta = \frac{a^2+\rho^2+z^2}{2a\rho}, \qquad \eta > 0,$$

Q_ν — функція Лежандра другого роду [4, 22, 26], і проінтегрувавши ряди (121) почленно, матимемо

$$u(\rho,\varphi,z) = \frac{4q}{\beta\sqrt{a\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{\nu_n-1/2}\,(\operatorname{ch}\eta) \sin\nu_n\alpha \sin\nu_n\varphi.$$

Цей ряд легко підсумовується. Використовуючи інтегральне зображення Q_ν [4, 11]

$$Q_{\nu-1/2}\,(\operatorname{ch}\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\xi\nu}d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}\eta}}$$

і формулу підсумовування [11]

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} p^n \cos nx = \frac{1-p^2}{1-2p\cos x + p^2}, \qquad |p| < 1,$$

отримаємо інтегральний вираз для потенціалу:

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi,z) = &\frac{q}{\beta\sqrt{2a\rho}} \int\limits_{\eta}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\zeta}{\beta}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos\frac{\pi(\varphi-\alpha)}{\beta}} \right. \\ &\left. - \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\zeta}{\beta}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos\frac{\pi(\varphi+\alpha)}{\beta}} \right] \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch}\eta}}. \end{aligned} \tag{122}$$

Відповідь. Розподіл потенціалу, створюваного точковим зарядом q поблизу металевого заземленого клину, дається формулою Макдональда (122).

Розглянемо граничні випадки. Якщо $\beta = 2\pi$, клин вироджується в півплощину. У цьому випадку інтеграл (122) легко обчислюється і для потенціалу u отримуємо вираз

$$u\Big|_{\beta=2\pi} = \frac{q}{\pi}\left[\frac{1}{R}\arccos\left(-\frac{\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}\right) - \frac{1}{R'}\arccos\left(-\frac{\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}\right)\right], \tag{123}$$

в якому

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos(\varphi-\alpha)}, \\ R' &= \sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos(\varphi+\alpha)}. \end{aligned}$$

В іншому граничному випадку, коли точка спостереження наближається до точки знаходження заряду q, потенціал (123) матиме вигляд

$$u = \frac{q}{R} + u', \qquad u' = -\frac{q}{2\pi a}\left(1 + \frac{\pi-\varphi}{\sin\varphi}\right). \tag{124}$$

Перший доданок в (124) є кулонів потенціал, необмежено зростаючий при $R \to 0$, а вираз u' — це частина потенціалу в точці спостереження, що виникає за рахунок взаємодії з провідником. У цьому випадку енергія взаємодії заряду q з металевою півплощиною є (див. [20])

$$E = \frac{qu'}{2} = -\frac{q}{4\pi a}\left(1 + \frac{\pi-\varphi}{\sin\varphi}\right).$$

Приклад 2.6 'Скін-ефект у циліндричному провіднику(

По циліндричному провіднику радіуса R з питомою провідністю σ тече змінний струм повної величини I_0 і частоти ω. Знайти густину j електричного струму.

Розв'язання. Виберемо циліндричну систему координат (ρ, φ, z) із віссю z уздовж осі циліндра. У цій системі координат електричне і магнітне поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ мають вигляд:

$$\boldsymbol{E} = (0, 0, E_z(\rho)), \qquad \boldsymbol{H} = (0, H_\varphi(\rho), 0). \tag{125}$$

Електричне поле задовольняє рівняння

$$\Delta \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0, \qquad k^2 = i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}.$$

Звідси випливає, що E_z задовольняє рівняння

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dE_z}{d\rho}\right) + k^2 E_z = 0, \quad k = \frac{1+i}{c}(2\pi\sigma\omega)^{1/2} = \frac{1+i}{l}. \quad (126)$$

На поверхні провідника повинна виконуватись умова неперервності тангенціальної складової магнітного поля,

$$H_\varphi(R) = \frac{2I_0}{cR}.$$

Рівняння Максвелла $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}$ за умови (125) набуває вигляду

$$\frac{dE_z}{d\rho} = i\frac{\omega}{c}H_\varphi.$$

Тому функція E_z задовольняє таку межову умову:

$$\left.\frac{dE_z}{d\rho}\right|_{\rho=R} = -i\frac{2\omega}{c^2 R}I_0. \qquad (127)$$

Очевидно також, що $|E_z(0)| < \infty$. Розв'язавши рівняння (126) для E_z, знаходимо

$$E_z(\rho) = AJ_0(k\rho),$$

де J_0 — функція Бесселя. З межової умови (127), спираючись на відоме співвідношення [5, 22, 26, 29] $J_0'(x) = -J_1(x)$, знаходимо

$$A = -i\frac{2\omega I_0}{kc^2 R J_1(kR)}.$$

Відповідь. Густина змінного електричного струму в циліндричному провіднику дається формулою

$$j(\rho) = \sigma E_z(\rho) = \frac{I_0 k}{2\pi R J_1(kR)} J_0(k\rho) = j(R)\frac{J_0(k\rho)}{J_0(kR)}. \qquad (128)$$

Проаналізуємо отриманий результат. Нехай $R/l \ll 1$. Тоді із співвідношень [5, 22, 26, 29]

$$J_0(x) = 1 - O(x), \quad J_1(x) = x/2 + O(x^3) \qquad (x \to 0)$$

дістаємо

$$j(\rho) \approx I_0/\pi R^2.$$

Нехай $R/l \gg 1$. Із співвідношень [5, 22, 26, 29]

$$J_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right))^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-3/2}\right) \qquad (x \to \infty)$$

дістаємо

$$\frac{J_0(k\rho)}{J_1(kR)} \approx \left(\frac{R}{\rho}\right)^{1/2} \exp[-k(R-\rho)],$$

звідки

$$j(\rho) \approx j(R)\left(\frac{R}{\rho}\right)^{1/2} \exp[-k(R-\rho)].$$

Отже, змінний струм високої частоти тече в основному вздовж поверхні провідника в шарі завтовшки l.

2.2. Задачі гідродинаміки

Приклад 2.7

Куля радіуса R рухається в ідеальній нестисливій рідині густини ρ зі швидкістю $\boldsymbol{v}_0(t)$. Знайти: швидкість $\boldsymbol{v}$ рідини в околі кулі; тиск рідини на поверхні кулі; повну кінетичну енергію E, повний імпульс $\boldsymbol{P}$ рідини; силу опору $\boldsymbol{F}$, діючу на кулю.

Розв'язання. Швидкість рідини виражається через її потенціал відомим чином
$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} u.$$

У сферичних координатах, віднесених до центра кулі, потенціал зовні кулі, будучи гармонічною функцією, записується так:
$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Тут кут θ відкладається від напряму $\boldsymbol{v}$.

Потенціал зовні кулі можна подати також в інакшому вигляді, ближчому до інтуїції фізика, скориставшись теоремою Максвелла про мультипольне зображення сферичних функцій [2, 16]. Вона стверджує, що обмеження на сферу l-кратної похідної функції $1/r$ уздовж l сталих напрямів є сферичною функцією порядку l і навпаки, кожну сферичну функцію порядку l можна побудувати в такий формі. Відповідно до цієї теореми потенціал зовні кулі записується у вигляді
$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{a+b+c=l} A^l_{abc} \frac{\partial^l}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c} \left(\frac{1}{r}\right),$$

де A^l_{abc} — деякий сталий сферичний тензор порядку $2l+1$, який буде знайдено з умов задачі. Ми використаємо таке зображення гармонічної функції як у цій, так і в наступних задачах.

Оскільки задача характеризується вектором $\boldsymbol{v}_0$, тобто сферичним тензором порядку 1, то потенціал рідини, згідно з теоремою Максвелла, можна подати у вигляді:
$$u(r,\theta,\varphi) = A_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} + A_2 \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} + A_3 \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} =$$
$$= \sum_{m=-1,0,1} A_m \frac{Y_{1m}(\theta,\varphi)}{r^2} = \boldsymbol{A} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}}{r^2},$$

де $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{v}_0$ — вектор, колінеарний векторові $\boldsymbol{v}_0$, a — стала, $\boldsymbol{n}$ — одиничний вектор співнапрямлений радіус–векторові, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$. Скориставшись формулами

$$\mathrm{grad}(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}_0, \qquad \mathrm{grad}\, r = \boldsymbol{n}$$

обчислимо за цим потенціалом швидкість:

$$\boldsymbol{v} = \frac{a}{r^3}\left[3(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}_0\right].$$

Враховуючи, що на поверхні кулі нормальні компоненти швидкостей $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_0$ повинні бути рівними, тобто $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n})$ при $r = R$, знаходимо сталу $a = R^3/2$. Таким чином,

$$\boldsymbol{v} = \frac{R^3}{2r^3}[3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v}_0]. \tag{129a}$$

Для ідеальної нестисливої рідини зберігається інтеграл Бернуллі, згідно з яким тиск у рідині p визначається через швидкість $\boldsymbol{v}$ таким чином

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{129b}$$

де p_0 — тиск на нескінченності.

Повна кінетична енергія рідини дається формулою

$$E = \frac{\rho}{2}\int\limits_{r>R} v^2 dV = \frac{\pi}{3}\rho R^3 v_0^2. \tag{129c}$$

Звідси знаходимо повний імпульс рідини

$$\boldsymbol{P} = \frac{dE}{d\boldsymbol{v}_0} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\boldsymbol{v}_0 \tag{129d}$$

та силу опору

$$\boldsymbol{F} = -\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}. \tag{129e}$$

Відповідь. Формули (129). Зокрема, з (129e) випливає, що при стаціонарному обтіканні кулі ідеальною рідиною сила опору дорівнює нулю (парадокс Д'Аламбера).

Приклад 2.8 'G. Stokes, 1851(

Куля радіуса R повільно рухається зі сталою швидкістю $\boldsymbol{v}_0$ у в'язкій рідині з коефіцієнтом в'язкості η. Знайти силу опору рухові.

Розв'язання. Шукана сила виражається через тензор напруги σ_{ik} в рідині за формулою

$$F_i = -\int\limits_{S^2(R)} \sigma_{ik} n_k ds, \quad i,k = 1,2,3, \tag{130}$$

а той у свою чергу — через швидкість v_i та тиск рідини p [19]

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \tag{131}$$

Тут $S^2(R)$ — сфера радіуса R; n_i — компоненти вектора зовнішньої нормалі до неї; δ_{ik} — одиничний тензор. Очевидно, на сфері $\sum\limits_k \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} n_k = \dfrac{\partial v}{\partial r}$, так що вираз для сили опору набуває вигляду

$$\boldsymbol{F} = -\int\limits_{S^2(R)} \boldsymbol{n}\, ds + 2\eta \int\limits_{S^2(R)} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r} ds. \tag{132}$$

Задача звелась до знаходження $\boldsymbol{v}$ та p.

Повільний рух в'язкої рідини описується лінійними рівняннями [19]

$$\eta \Delta \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} p, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

де $\boldsymbol{v}$ — швидкість, а p — тиск рідини, до яких слід приєднати дві фізично очевидні умови

$$\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0, \qquad \boldsymbol{v}\big|_{r=R}=0.$$

Діючи на рівняння $\Delta\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}p$ оператором rot і враховуючи, що $\operatorname{rot}\operatorname{grad}p=0$, легко вивести рівняння

$$\Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0.$$

Шукаємо швидкість рідини у вигляді

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0 f(r)=\boldsymbol{v}_0+(\operatorname{grad}\operatorname{div}-\Delta)\boldsymbol{v}_0 f(r),$$

де f — скалярна функція, а r — відстань від центра сфери.

Підставививши цей вираз у рівняння $\Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0$, дістанемо

$$\Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=-\Delta^2\operatorname{rot}f(r)\boldsymbol{v}_0=-\Delta^2\operatorname{grad}f(r)\times\boldsymbol{v}_0,$$

де знаком $\times$ позначено векторний добуток. З останньої рівності отримуємо рівняння для функції f:

$$\Delta^2\operatorname{grad}f=0.$$

У цьому рівнянні замість оператора Лапласа Δ ми маємо право враховувати лише його радіальну частину $\Delta_r=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)$, оскільки функція f від кутів не залежить. Інтегруючи рівняння за умови, що $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}_0$ при $r\to\infty$, знаходимо

$$f(r)=ar+\frac{b}{r}\ ,$$

де a,b — деякі сталі.

Тепер для швидкості рідини можемо написати

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0-\frac{a}{r}\left[\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{n})\right]+\frac{b}{r^3}\left[3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{n})-\boldsymbol{v}_0\right].$$

Швидкість рідини на поверхні кулі повинна бути нулем, тобто

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 \left[1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}\right] + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n}) \left[\frac{3b}{R^3} - \frac{a}{R}\right] = 0.$$

Звідси знаходимо $a = \dfrac{3}{4}R$, $b = \dfrac{R^3}{4}$. Отже, $f(r) = \dfrac{3}{4}Rr + \dfrac{R^3}{4r}$,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 - \frac{3R}{4r}\left[\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n})\right] + \frac{R^3}{4r^3}\left[3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v}_0\right].$$

У сферичних координатах, пов'язаних із центром кулі та віссю z у напрямі $\boldsymbol{v}$ компоненти швидкості мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} v_r &= v_0 \cos\theta \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right], \\ v_\theta &= -v_0 \sin\theta \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right]. \end{aligned}$$

Тиск рідини виражається через $f(r)$:

$$p = p_0 + \eta \boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad} \Delta f,$$

де p_0 — тиск рідини на нескінченності. На поверхні кулі

$$p = p_0 - \frac{3R}{2r^2}\eta(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n}).$$

Знання швидкості рідини і тиску дає можливість обчислити за формулою (130) силу, діючу на поверхню кулі. Інтегруючи, отримуємо

Відповідь.

$$F = 6\pi R\eta v_0.$$

Приклад 2.9 'В. Рибчинський, 1911(

Кругла крапля рідини з в'язкістю η_1 повільно рухається під впливом сили тяжіння в рідині з в'язкістю η. Знайти силу опору руху краплі F та її швидкість v_0.

Розв'язання. Розглянемо систему координат, у якій крапля нерухома. Повільний рух в'язкої рідини зовні кулі описується лінійними рівняннями

$$\eta \Delta \boldsymbol{v}^{(e)} = \operatorname{grad} p^{(e)}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{(e)} = 0,$$

де $\boldsymbol{v}^{(e)}$ — швидкість, а $p^{(e)}$ — тиск рідини. Розв'язок цієї системи рівнянь ми отримали в попередній задачі. Отже, швидкість рідини зовні кулі описується такими формулами:

$$\boldsymbol{v}^{(e)} = \boldsymbol{v}_0 + \frac{a}{r}\left[\boldsymbol{v}_0 + \mathbf{n}(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n})\right] + \frac{b}{r^3}\left[3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v}_0\right],$$

де a, b — сталі.

Повільний рух в'язкої рідини всередині кулі описується лінійними рівняннями

$$\eta_1 \Delta \boldsymbol{v}^{(i)} = \operatorname{grad} p^{(i)}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{(i)} = 0,$$

де $\boldsymbol{v}^{(i)}$ — швидкість, а $p^{(i)}$ — тиск рідини. Шукаємо швидкість рідини всередині краплі у вигляді (пор. із попередньою задачею)

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} f_1(r)\boldsymbol{v}_0 = (\operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta) f_1(r)\boldsymbol{v}_0,$$

де $f_1(r)$ — скалярна функція, а r — відстань від центра сфери. Підставляючи цей вираз у рівняння для швидкості рідини, отримуємо рівняння для функції $f_1(r)$:

$$\Delta^2 \operatorname{grad} f_1(r) = 0.$$

При розв'язуванні цього рівняння замість оператора Лапласа Δ можна приймати до уваги лише його радіальну частину $\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr^2}\right)$. Враховуючи це, неважко довести, що розв'язок цього рівняння, скінченний разом зі своїми похідними при $r = 0$, є поліномом відносно r і має вигляд

$$f_1(r) = \frac{A}{4}r^2 + \frac{B}{8}r^4,$$

де A, B — сталі.

Таким чином, швидкість рідини всередині краплі дається формулою

$$\mathbf{v}^{(i)} = -A\boldsymbol{v}_0 + Br^2[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n}) - 2\mathbf{v}_0].$$

На поверхні краплі нормальні компоненти швидкості повинні дорівнювати нулю:

$$v_r^{(e)} = 0,\ v_r^{(i)} = 0,$$

а дотичні компоненти швидкості повинні бути неперервними,

$$v_\theta^{(e)} = v_\theta^{(i)}.$$

Так само неперервними повинні бути нормальні та дотичні компоненти тензора напруги:

$$\sigma_{rr}^{(e)} = \sigma_{rr}^{(i)}, \qquad \sigma_{r\theta}^{(e)} = \sigma_{r\theta}^{(i)}.$$

Із цих межових умов знаходимо сталі a, b, A, B:

$$a = R\frac{2\eta + 3\eta_1}{4(\eta+\eta_1)},\ b = R^3\frac{\eta_1}{4(\eta+\eta_1)},\ A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta+\eta_1)},$$

звідки на підставі (130) отримуємо вираз:

$$F = 2\pi v_0\eta R\frac{2\eta + 3\eta_1}{\eta+\eta_1}. \tag{133a}$$

При $\eta_1 \to \infty$ (що відповідає твердій кулі) цей вираз переходить у формулу Стокса. При $\eta_1 \to 0$ (що відповідає газовій кулі) сила опору становить 2/3 від сили опору твердої кулі.

Прирівнюючи силу опору F до сили тяжіння $\frac{4\pi}{3}R^3(\rho - \rho_1)g$, отримуємо вираз для швидкості краплі

$$v_0 = \frac{2R^2 g(\rho-\rho_1)(\eta+\eta_1)}{3\eta(2\eta+3\eta_1)}. \tag{133b}$$

Відповідь. Формули (133).

2.3. Задачі переносу

Приклад 2.10 'J. Stefan(

Знайти закон руху межі твердої та рідкої фаз речовини внаслідок тверднення (або плавлення).

Розв'язання. Нехай тверда фаза речовини розташована на відрізку $0 < x < s(t)$, а рідка — на півпрямій $s(t) < x < +\infty$. Позначимо через $T_1(x,t), T_2(x,t)$ температури твердої та рідкої фаз у точці x у момент часу t, а через χ_1, χ_2 — відповідні коефіцієнти температуропровідності. У цих позначеннях задача описується такою системою рівнянь температуропровідності у твердій і рідкій фазах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \chi_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s,\ t > 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \chi_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad s < x < +\infty,\ t > 0. \end{aligned}$$

На межі твердої та рідкої фаз їхні температури повинні дорівнювати температурі тверднення T_f, яку ми візьмемо за 0. Крім того, на цій межі різниця теплових потоків із твердої та рідкої фаз повинна дорівнювати кількості використовуваного для тверднення тепла. Таким чином, межові умови на межі твердої та рідкої фаз мають вигляд:

$$\begin{gathered} T_1(s,t) = T_2(s,t) = 0, \qquad (134a) \\ \left(\varkappa_1 \frac{\partial T_1(s,t)}{\partial x} - \varkappa_2 \frac{\partial T_2(s,t)}{\partial x} \right) = \lambda \rho \frac{ds}{dt}. \end{gathered}$$

Тут $\varkappa_1, \varkappa_2$ — коефіцієнти теплопровідності твердої та рідкої фаз, відповідно, λ — теплота тверднення, а ρ — масова густина речовини.

Температуру зовнішньої межі твердої фази задано:

$$T_1(0,t) = C_1 = \text{const}, \quad t > 0. \qquad (135)$$

Так само ми вважаємо даною температуру рідини в початковий момент часу:

$$T_2(x,0) = C_2 = \mathrm{const}, \quad 0 < x < +\infty. \tag{136}$$

Оскільки рівняння й додаткові умови задачі інваріантні відносно зміни масштабу довжини в γ разів і масштабу часу в γ^2 разів (так звана *властивість автомодельності*), то розв'язок задачі повинен залежати від $x/\sqrt{t}$, тобто

$$T_i(x,t) = w_i(x/\sqrt{t}), \qquad i = 1, 2. \tag{137}$$

Підставивши вирази (137) у рівняння (134) і позначивши $y = x/\sqrt{t}$, дістанемо

$$2w_i''(y) + \chi_i w_i'(y) = 0,$$

звідки

$$w_i(y) = A_i + B_i \Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\chi_i}}\right),$$

де

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^y e^{-u^2} du \quad —$$

інтеграл помилок. Тоді на підставі (137)

$$T_i(x,t) = A_i + B_i \Phi_i\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi_i t}}\right), \tag{138}$$

відтак

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} = \frac{B_i}{\sqrt{\pi \chi_i t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi_i^2 t}\right). \tag{139}$$

З (138) і (134а) випливає, що

$$s = \alpha\sqrt{t}. \tag{140}$$

Константи α, A_i, B_i знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1 = C_1, \\ A_2 + B_2 = C_2, \\ A_i + B_i \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\chi_i}}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\varkappa_1 C_1 \exp(-\alpha^2/4\chi_1)}{\sqrt{\chi_1}\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_1})} + \frac{\varkappa_2 C_2 \exp(-\alpha^2/4\chi_2)}{\sqrt{\chi_2}[1-\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_2})]} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda\rho\alpha, \end{cases} \tag{141}$$

в якій перше рівняння отримане з (138), (135); друге — з (138), (136) і рівності $\Phi(\infty) = 1$ (інтеграл Пуассона); третє й четверте — із (138), (134a), (140); п'яте — із (134b), (139), (140).

З перших чотирьох рівнянь знаходимо

$$A_1 = C_1, \qquad B_1 = \frac{C_1}{\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_1})},$$
$$A_2 = -\frac{C_2\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_2})}{1-\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_2})}, \quad B_2 = \frac{C_2}{1-\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_2})}.$$

Розв'язання останнього трансцендентного рівняння дає значення α. Існування хоча б одного розв'язку за умов $C_1 < 0, C_2 > 0$ випливає з того, що при зростанні α від 0 до ∞ ліва частина рівняння змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, а права від 0 до $-\infty$.

Якщо $C_2 = 0$, тобто температура рідини в початковий момент часу дорівнює температурі тверднення, то формули спрощуються:

$$A_1 = C_1, B_1 = \frac{C_1}{\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_1})}, A_2 = 0, B_2 = 0,$$
$$\frac{\varkappa_1 C_1 \exp(-\alpha^2/4\chi_1)}{\sqrt{\chi_1}\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_1})} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda\rho\alpha.$$

Докладніше про задачу Стефана розглянуто в [13, 23].

Відповідь. Координата s межі між твердою та рідкою фазами при твердненні (або плавленні) змінюється за законом (140), де константа α визначається з рівняння

$$\frac{\varkappa_1 C_1 \exp(-\alpha^2/4\chi_1)}{\sqrt{\chi_1}\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_1})} + \frac{\varkappa_2 C_2 \exp(-\alpha^2/4\chi_2)}{\sqrt{\chi_2}[1-\Phi(\alpha/2\sqrt{\chi_2})]} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda\rho\alpha.$$

Приклад 2.11

Температура на межі однорідної круглої пластини радіуса R змінюється за синусоїдним законом. Знайти розподіл температури всередині пластини.

Розв'язання. Позначимо коефіцієнт теплопровідності пластини через a^2, температуру в точці (ρ, φ) в момент часу t через $u(\rho, \varphi, t)$ і запишемо для u рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 \Delta u. \tag{142a}$$

За припущенням межова умова має вигляд

$$u(R, \varphi, t) = g(\varphi)\cos(\omega t + \alpha), \tag{142b}$$

де ω, α — задані числа, g — задана достатньо гладка функція. Гладкість g повинна бути такою, щоб забезпечити достатньо швидке прямування до нуля послідовності її коефіцієнтів Фур'є і тим самим уможливити почленне диференціювання розглядуваних нижче рядів. Початкова умова не потрібна: розв'язок задачі (142) виявляється, як і слід було чекати, періодичною функцією.

Шукаємо u у вигляді

$$u = \mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t + \alpha)} T\right], \tag{143}$$

де комплекснозначна функція $T(\rho, \varphi)$ є розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{i\omega}{a^2} T, && \text{(144a)} \\ T(R, \varphi) &= g(\varphi). && \text{(144b)} \end{aligned}$$

Очевидно, функція u, задана співвідношеннями (143), (144), задовольняє умову (142b). Умова ж (142a) перевіряється так:

$$u_t \overset{(143(}{=} \operatorname{Re}\left[i\omega e^{i(\omega t+\alpha)}T\right] \overset{(144a(}{=} a^2 \operatorname{Re}\left[i\omega e^{i(\omega t+\alpha)}\Delta T\right] \overset{(143(}{=} a^2 \Delta u.$$

При кожному ρ функція T аргументу φ, будучи 2π-періодичною і (слідом за g) достатньо гладкою, розкладається в ряд Фур'є за системою (Φ_n) (див. приклад 1.9):

$$T(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(\rho)\Phi_n(\varphi). \tag{145}$$

Для подальшого зручнішою з двох можливих є тригонометрична форма запису:

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, & n \geq 0, \\ \sin|n|\varphi, & n < 0. \end{cases} \tag{146}$$

Оскільки ці функції дійсні, то підстановка (145) у (143) дає такий вираз для u:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(\varphi) \operatorname{Re}\left[T_n(\rho)e^{i(\omega t+\alpha)}\right]. \tag{147}$$

За цією ж системою розкладається й функція g:

$$g(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n\Phi_n(\varphi). \tag{148}$$

Функція g відома, тож її коефіцієнти Фур'є знаходяться за явною формулою

$$g_n = \frac{1}{\pi(1+\delta_{n0})} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\Phi_n(\varphi)d\varphi. \tag{149}$$

Позначимо
$$b = \sqrt{\omega}/a. \tag{150}$$
Підставивши розвинення (145) у рівняння (144a) і пригадавши вираз (54) оператора Лапласа в полярних координатах, одержимо з урахуванням (55)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\rho^2 T_n'' + \rho T_n' - \left(ib^2\rho^2 + n^2\right) T_n\right] \Phi_n = 0.$$

Оскільки Φ_n попарно ортогональні, то остання рівність може мати місце лише тоді, коли коефіцієнти при всіх Φ_n дорівнюють нулю. Беручи також до уваги співвідношення (144b), (148) і неперервність температури як функції від ρ, φ, приходимо до послідовності сингулярних на лівому кінці крайових задач

$$\rho^2 T_n'' + \rho T_n' - \left(ib^2\rho^2 + n^2\right) T_n = 0, \tag{151a}$$
$$T_n \in \mathcal{C}[0, R], \tag{151b}$$
$$T_n(R) = g_n. \tag{151c}$$

Записавши $-ib^2$ як $\left(e^{3\pi i/4}b\right)^2$, пересвідчуємося, що рівняння (151a) є перепозначенням (40a). Тому (див. приклад 1.7) кожен його неперервний на $[0, R]$ (умова (151b)) розв'язок має вигляд
$$T_n(\rho) = C_n J_{|n|}\left(e^{3\pi i/4}b\rho\right). \tag{152}$$
Щоб задовольнити умову (151c), мусимо покласти

$$C_n = g_n / J_{|n|}\left(e^{3\pi i/4}b\rho\right). \tag{153}$$

Формули (147), (146), (152), (153), (149), (150) дають `відповідь` до задачі. Але в такій формі вона малопридатна для обчислювання хоча б тому, що виражає функцію u дійсних змінних через функцію комплексної змінної. Тому продовжимо міркування з метою отримання практичнішого виразу.

Для цього нам знадобляться *функції Кельвіна* [5]:

$$\mathrm{ber}_\nu x = \mathrm{Re}\, J_\nu\left(e^{3\pi i/4}x\right),\ \mathrm{bei}_\nu x = \mathrm{Im}\, J_\nu\left(e^{3\pi i/4}x\right),\ x \in \mathbb{R}. \tag{154}$$

Вони виникають у багатьох фізичних та математичних задачах і у зв'язку з цим протабульовані (див., наприклад, [1, 33]). Тому вираз через функції Кельвіна є розрахунковою формулою.

З (152)–(154) знаходимо

$$T_n(\rho) = g_n \frac{\mathrm{ber}_{|n|}(b\rho) + i\mathrm{bei}_{|n|}(b\rho)}{\mathrm{ber}_{|n|}(bR) + i\mathrm{bei}_{|n|}(bR)},$$

звідки

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Big[T_n(\rho)e^{i(\omega t+\alpha)}\Big] = g_n &\left[\mathrm{ber}^2_{|n|}(bR) + \mathrm{bei}^2_{|n|}(bR)\right]^{-1}\Big[\big(\mathrm{ber}_{|n|}(bR)\\ &\times \mathrm{ber}_{|n|}(b\rho) + \mathrm{bei}_{|n|}(bR)\mathrm{bei}_{|n|}(b\rho)\big)\cos(\omega t+\alpha)\\ &+ \big(\mathrm{ber}_{|n|}(bR)\mathrm{ber}_{|n|}(b\rho) - \mathrm{bei}_{|n|}(bR)\mathrm{bei}_{|n|}(b\rho)\big)\\ &\times \sin(\omega t+\alpha)\Big].\end{aligned}$$

Ця формула спільно з (147), (146), (149), (150) і таблицями функцій Кельвіна дає спосіб обчислювання u.

2.4. Задачі квантової механіки

Приклад 2.12

Квантовомеханічна частинка маси m перебуває в полі з потенціалом

$$U(x) = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{\mathrm{ch}^2\,\alpha x}, \qquad \nu > 0.$$

а) Знайти енергетичний спектр зв'язаних станів для від'ємних енергій. б) Знайти коефіцієнт відбивання та проходження для додатних енергій. в) Проаналізувати спектр для спеціального випадку безвідбивального потенціалу ($\nu \in \mathbb{N}$).

Розв'язання. Як відомо з квантової механіки, власні стани квантовомеханічної частинки є розв'язками рівняння Шредінгера $\widehat{H}\psi = E\psi$ з гамільтоніаном

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x). \tag{155}$$

Завдяки тому, що $U(\infty) = 0$, спектр додатних енергій неперервний, від'ємних — дискретний.

а) **Дискретний спектр, $\boldsymbol{E < 0}$**. Перейшовши в рівнянні Шредінгера до нової змінної

$$\xi = \frac{1}{2}\,(1 - \operatorname{th}\alpha x) \in [0, 1], \tag{156}$$

дістаємо рівняння

$$\big(\xi(1-\xi)\psi'\big)' + \Big(\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2/4}{\xi(1-\xi)}\Big)\psi = 0, \tag{157a}$$

в якому

$$\mu = \frac{\sqrt{-2E}}{\hbar\alpha}.$$

Додаткова умова для рівняння (157a) має вигляд

$$\psi \in \mathcal{C}^1[0, 1]. \tag{157b}$$

Отже, для функції $\psi(\xi)$ маємо двічі сингулярну задачу ШЛ. Щоб розв'язати її, проаналізуємо поведінку ψ-функції в околі особливих точок. З рівняння (157a) маємо: $\psi(\xi) \sim \xi^{\pm\mu/2}$ при

$\xi \to 0$ і $\psi(\xi) \sim (1-\xi)^{\pm\mu/2}$ при $\xi \to 1$. Щоб забезпечити обмеженість функції, обираємо знак «+», а щоб виділити поведінку в околі особливих точок, робимо підстановку

$$\psi(\xi) = \xi^{\mu/2}(1-\xi)^{\mu/2}u(\xi). \tag{158}$$

Функція u є розв'язком диференціальної задачі

$$\xi(1-\xi)u'' + (\beta - (\alpha_1+\alpha_2+1)\xi)\,u' - \alpha_1\alpha_2 u = 0, \tag{159a}$$
$$u \in \mathcal{C}^1[0,1]. \tag{159b}$$

Тут позначено

$$\alpha_1 = \mu - \nu, \quad \alpha_2 = \mu + \nu + 1, \quad \beta = \mu + 1. \tag{160}$$

Задача (159) є диференціальною задачею для гіпергеометричного рівняння. Вона співпадає[2] з розглянутим у розділі 1 прикладом 1.6. Тому нагадаємо лише висновки. Розв'язками задачі є гіпергеометричні функції

$$u(\xi) = \mathrm{F}(\alpha_1, \alpha_2; \beta|\xi). \tag{161}$$

Згідно з (39) спектр задачі (159) дискретний ($\alpha_2-\beta+1 \equiv \nu+1 > 0$), власні числа $-\alpha_1 = n \in \mathbb{Z}_+$, а власні функції є поліноми. Отже, $\mu = \nu - n$,

$$\alpha_1 = -n,\ \alpha_2 = 2\nu+1-n,\ \beta = \nu+1-n.$$

$$\psi_n(\xi) = \Big[\xi(1-\xi)\Big]^{\frac{\nu-n}{2}}\mathrm{F}(-n, 2\nu+1-n; \nu+1-n|\xi), \tag{162a}$$

[2] Зі зрозумілих причин (див. с. 6) ми не можемо вжити в цьому значенні слово *збігаеться*.

Відповідні власні значення енергії —

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}(\nu - n)^2, \qquad 0 \le n < \nu. \tag{162b}$$

Таким чином, спектр даної системи має лише скінченну множину рівнів енергії E_n.

Основний стан системи визначається за формулою

$$E_0 = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\nu^2, \qquad \psi_0 = \frac{1}{\operatorname{ch}^\nu \alpha x}. \tag{163a}$$

При $\nu = 1$ система має лише один зв'язаний (основний) стан

$$E_0 = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}, \qquad \psi_0 = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha x}. \tag{163b}$$

б) **Неперервний спектр, $\boldsymbol{E > 0}$**. Хвильові функції неперервного спектра описуються тим же рівнянням (157a). Тому ці хвильові функції виражаються, згідно з (158), (161), через гіпергеометричні функції, треба лише вважати параметр μ уявним числом. Межові умови для випадку неперервного спектра мають вигляд асимптотичних рівностей

$$\psi(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x \to -\infty \\ e^{ikx}, & x \to +\infty \end{cases}, \tag{164}$$

де нормування хвильової функції $\psi(x)$ вибрано так, щоб амплітуда хвилі, яка пройшла через потенціал, дорівнювала 1. Записуючи (164), ми ввели хвильове число $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, пов'язане з величиною μ співвідношенням $k = i\alpha\mu$. У термінах $u(\xi)$ асимптотична умова (164) набуває вигляду

$$u(\xi) \sim 1, \qquad \xi \to 0, \tag{165a}$$

$$u(\xi) \sim A(1-\xi)^{-\mu} + B, \qquad \xi \to 1. \tag{165b}$$

Очевидно, гіпергеометрична функція (161) задовольняє умову (165a). Асимптотичний вигляд $u(\xi)$ в околі $\xi = 1$ знаходимо за допомогою рекурентних співвідношень між гіпергеометричними функціями [4]

$$\mathrm{F}\,(\alpha_1, \alpha_2; \beta|x) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(-s)}{\Gamma(\beta-\alpha_1)\Gamma(\beta-\alpha_2)}\,\mathrm{F}\,(\alpha_1, \alpha_2; 1+s|1-x)$$
$$+\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(s)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\,(1-x)^{-s}\,\mathrm{F}\,(\beta-\alpha_1, \beta-\alpha_2; 1-s|1-x)\,,$$

звідки

$$u(\xi) \underset{\xi=1-0}{\sim} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\mu+\nu+1)}(1-\xi)^{-\mu} + \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(-\mu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}. \tag{166}$$

Порівнюючи (165b) ы (166), знаходимо явний вигляд для амплітуд падаючої та відбитої хвилі

$$a = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\mu+\nu+1)}, \quad b = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(-\mu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}. \tag{167}$$

Коефіцієнти відбивання $R = |b/a|^2$ і проходження $D = |1/a|^2$ визначаються, згідно з (167), як

$$R = \frac{p^2}{1+p^2}, \qquad D = \frac{1}{1+p^2}, \tag{168a}$$

де позначено

$$p = \frac{\sin \pi\nu}{\operatorname{sh} \pi k/\alpha}. \tag{168b}$$

Зазначимо, що при цілих значеннях параметра потенціалу ν, коефіцієнт проходження $D = 1$, тобто потенціал стає *безвідбивальним* (прозорим) для `будь,яких` значень енергії.

в) **Випадок безвідбивального потенціалу, $\nu \in \mathbb{N}$.** Як показано вище, спектр від'ємних енергій дискретний. Система містить ν рівнів E_n, де $n \in [0, \nu - 1]$ із відповідними власними функціями ψ_n з (162a). Спектр додатних енергій неперервний. Для знаходження власних функцій неперервного спектра, як було зазначено вище, можна скористатися формулами (158), (161), але доцільнішим є прийом, який називається *перетворенням Дарбу*. Продемонструємо його спочатку в найпростішому випадку $\nu = 1$.

У цьому випадку дискретний спектр має лише один рівень $E_0 < 0$, див. (163b). Відповідна власна фукнція основного стану ψ_0 задовольняє рівняння

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_0'' + U(x)\psi_0 = E_0\psi_0,$$

звідки

$$U(x) = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_0''}{\psi_0}. \tag{169}$$

Підставляючи цей вираз у гамільтоніан (155), перепишемо останній у вигляді

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= E_0 + \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\psi_0''}{\psi_0}\right) \\ &= E_0 + \left[\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\psi_0'}{\psi_0} + \frac{d}{dx}\right)\right] \cdot \left[\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\psi_0'}{\psi_0} - \frac{d}{dx}\right)\right], \end{aligned} \tag{170}$$

де враховано тотожність

$$\frac{\psi_0''}{\psi_0} \equiv \left(\frac{\psi_0'}{\psi_0}\right)' + \left(\frac{\psi_0'}{\psi_0}\right)^2.$$

Отже, гамільтоніан $\widehat{H}$ подано у факторизованому вигляді

$$\widehat{H} = E_0 + \widehat{a}^\dagger\widehat{a}, \tag{171a}$$

де $\widehat{a}$ і $\widehat{a}^\dagger$ — ермітово-спряжені оператори

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\psi_0'}{\psi_0} - \frac{d}{dx}\right), \\
a^\dagger &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\psi_0'}{\psi_0} + \frac{d}{dx}\right).
\end{aligned}
\tag{171b}
$$

Зазначимо, що хвильова функція основного стану ψ_0 є власною для оператора $\widehat{a}$, відповідаючого нульовому власному значенню,

$$\widehat{a}\psi_0 = 0.$$

Уведемо новий оператор $\widehat{\mathcal{H}}$ за законом

$$\widehat{\mathcal{H}} = E_0 + \widehat{a}\widehat{a}^\dagger. \tag{171c}$$

Неважко переконатися в тому, що його спектр суто неперервний, тому можна сподіватися, що він матиме простіший вигляд.

Функція

$$\phi(x) = \widehat{a}\psi(x) \tag{171d}$$

задовольняє рівняння $\widehat{\mathcal{H}}\phi = E\phi$, де $\widehat{\mathcal{H}}$ є оператор Шредінгера, відповідаючий потенціалові

$$\mathcal{U} = E_0 - U + \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{\psi_0'}{\psi_0}\right)^2. \tag{171e}$$

Перетворення (171) є прикладом перетворення Дарбу. При його конструюванні ми використали лише той факт, що функція ψ_0 відома. Підставляючи явний вираз ψ_0 з (163b) в (171e), неважко встановити, що перетворений потенціал

$$\mathcal{U} = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} = |E_0|$$

сталий, звідки випливає, що загальний розв'язок перетвореного рівняння Шредінгера є суперпозиція плоских хвиль,

$$\phi_k(x) = A_k e^{ikx} + B_k e^{-ikx}. \tag{172}$$

Застосовуючи оператор $\widehat{a}^\dagger$, знаходимо хвильові функції ψ

$$\psi_k = \frac{1}{E - E_0}\widehat{a}^\dagger \phi_k \implies \psi_k(x) = \Big(-\alpha \operatorname{th} \alpha x + \frac{d}{dx}\Big)\phi_k(x). \tag{173}$$

Отже, з урахуванням асимптотичного співвідношення (164), хвильові функції (173) мають такий вигляд:

$$\psi_k(x) = \frac{\operatorname{th} \alpha x - ik/\alpha}{1 - ik/\alpha} \cdot e^{ikx}. \tag{174}$$

Формула (174) дає явний вираз хвильових функцій неперервного спектра. З (174), зокрема, випливає, що коефіцієнт проходження $D = 1$ для будь-яких енергій.

Розглянутий на прикладі $\nu = 1$ метод перетворень Дарбу можна досить просто узагальнити на випадок довільних цілих ν. Неважко переконатися [14], що

$$\psi_k(x) = \prod_{n=1}^{\nu}\Big(-n\alpha \operatorname{th} \alpha x + \frac{d}{dx}\Big)\phi_k(x),$$

де, як і раніше, $\phi_k(x)$ є розв'язком перетвореної задачі (див. (172)).

Докладніше про безвідбивальні потенціали див. в [14].

Зазначимо, що Дарбу сформулював свій метод у теорії звичайних диференціальних рівнянь ще в XIX столітті. Пізніше Е. Шредінгер перевідкрив його у квантовій механіці під назвою *метод факторизації*, де він виявився доволі ефективним при розв'язуванні багатьох задач [12]. Тепер цей метод відіграє важливу роль також у деяких розділах математичної фізики, таких, наприклад, як теорія нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних солітонного типу [34].

Приклад 2.13

Знайти власні функції та власні значення енергії стаціонарних станів ізотропного 4–вимірного осцилятора:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{m\omega^2}{2}|\boldsymbol{x}|^2, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4. \tag{175}$$

Зазначимо, що за певних умов ця задача зводиться до відомих задач про рух у кулоновому потенціалі та рух симетричного гіроскопу (дзиґи). Це пов'язано з тим, що всі три системи мають однакову групу симетрії — $O(4)$.

Розв'язання. 4–вимірний осцилятор із гамільтоніаном (175) описується рівнянням Шредінгера

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2}{2}|\boldsymbol{x}|^2\right)\psi = 0.$$

Геометрія системи визначається 4–вимірним простором $\mathbb{R}^4$ з координатами x_1, x_2, x_3, x_4. Квадрат елемента довжини в цьому просторі

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{4}(dx_i)^2,$$

оператор Лапласа Δ має вигляд

$$\Delta = \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

З огляду на ізотропність системи шукатимемо розв'язок рівняння Шредінгера в координатах $R, \theta, \varphi, \gamma$, пов'язаних із декартовими такими співвідношеннями [31]:

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi+\gamma}{2}, \qquad & x_2 &= R\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi-\gamma}{2}, \\
x_3 &= R\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi+\gamma}{2}, \qquad & x_4 &= R\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\gamma}{2},
\end{aligned} \tag{176}$$

де кутові змінні θ, φ, γ (*кути Ейлера* [18, 26]) змінюються в межах $\theta \in [0, \pi]$, $\quad \varphi, \gamma \in S^1$. У цих координатах

$$ds^2 = dR^2 + \frac{R^2}{4}\left(d\theta^2 + d\varphi^2 + d\gamma^2 + 2\cos\theta d\varphi d\gamma\right), \tag{177}$$

так що оператор Лапласа розбивається на радіальну і кутову частини

$$\Delta = \Delta_R + \frac{4}{R^2}\Delta_\Omega, \tag{178a}$$

$$\Delta_R = \frac{1}{R^3}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3\frac{\partial}{\partial R}\right), \tag{178b}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\Omega &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \\
&+ \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} - 2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\gamma}\right).
\end{aligned} \tag{178c}$$

Рівняння Шредінгера в координатах (176) набуває вигляду

$$\left[\Delta_R + \frac{4}{R^2}\Delta_\Omega\right]\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2}{2}R^2\right)\psi = 0. \tag{179}$$

Покладемо $r = R^2$, тоді $\Delta_R = 4r\Delta_r$, де

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

є радіальна частина звичайного тривимірного оператора Лапласа. У нових позначеннях рівняння (179) має вигляд

$$\left[\Delta_r + \frac{\Delta_\Omega}{r^2}\right]\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\mathcal{E} - \frac{\varkappa}{r}\right)\psi = 0, \tag{180}$$

де $\mathcal{E} = -m\omega^2/8$, $\varkappa = -E/4$. Якщо на систему накласти зв'язок

$$\frac{\partial\psi}{\partial\gamma} = 0, \tag{181}$$

то Δ_Ω перетвориться на оператор Лапласа на сфері (див. формулу (61)), а рівняння (180) — на звичайне рівняння Шредінгера, що описує рух частинки маси m у кулоновому полі $U(r) = \varkappa/r$.

Відокремивши в рівнянні (180) змінні за допомогою підстановки $\psi = R(r)Y(\theta, \varphi, \gamma)$, дістанемо два рівняння

$$\Delta_{\theta\varphi} Y = -\lambda Y, \tag{182a}$$

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left(\frac{2m}{\hbar^2}\left(\mathcal{E} - \frac{\varkappa}{r}\right) - \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0, \tag{182b}$$

λ — константа відокремлення. До них слід долучити сингулярні межові умови (можливі форми їх запису розглядаються в зауваженні 1)

$$Y \in \mathcal{C}^1\left([0,\pi]\times S^1\right), \tag{182c}$$

$$R \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho^2). \tag{182d}$$

Перше з них є рівнянням симетричного гіроскопа.

При кожному θ функція Y аргументів φ, γ, будучи 2π-періодичною і рівномірно неперервною за кожним із них, розкладається в ряд Фур'є

$$Y(\theta, \varphi, \gamma) = \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} \Theta(\theta) e^{im\varphi} e^{ik\gamma}.$$

Тоді згідно із (178c)

$$\Delta_\Omega Y = \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} \Big[\frac{1}{\sin\theta}\left(\Theta'_{mk}\sin\theta\right)' +$$
$$+ \frac{1}{\sin^2\theta}\left(2mk\cos\theta - m^2 - k^2\right)\Big] e^{i(m\varphi+k\gamma)}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових експонентах у лівій і правій частинах рівності (182a) і взявши до уваги неперервність функцій Θ_{mk}, дістанемо для кожної пари (m,k) сингулярну задачу ШЛ

$$\Big(\Theta'_{mk}\sin\theta\Big)' + \frac{m^2+k^2-2mk\cos\theta}{\sin\theta}\Theta_{mk}$$
$$= -\lambda\Theta_{mk}\sin\theta, \tag{183a}$$
$$\Theta_{mk} \in \mathcal{C}^1[0,\pi]. \tag{183b}$$

Розв'язок задачі (183) зручно шукати, ввівши нову змінну $z = (1-\cos\theta)/2$, у результаті чого рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} &4z(1-z)\Big(z(1-z)\cdot\Theta'\Big)' + \Big(\lambda-(m+k)^2 \\ &-4kmz\Big)\Theta = 0. \end{aligned} \tag{184}$$

Проаналізуємо асимптотичну поведінку $\Theta(z)$ в околах особливих точок. З рівняння (184) маємо: $\Theta(z) \sim z^{\pm\frac{|m-k|}{2}}$ при $z\to 0$ і $\Theta(z) \sim (1-z)^{\pm\frac{|m+k|}{2}}$ при $z \to 1$. Вибраши знак «+» з умови обмеженості, виділимо асимптотику в околах особливих точок підстановкою

$$\Theta(z) = z^{\frac{|m-k|}{2}}\cdot(1-z)^{\frac{|m+k|}{2}}\cdot u(z). \tag{185}$$

Одержимо диференціальну задачу з гіпергеометричним рівнянням для функції u

$$z(1-z)u'' + (\beta - (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)z)\, u' - \alpha_1\alpha_2 u = 0, \quad (186a)$$
$$u \in \mathcal{C}^1[0,1]. \quad (186b)$$

Тут позначено

$$\begin{gathered} \alpha_1 = -l + \frac{|m-k|}{2}, \qquad \alpha_2 = l + \frac{|m+k| + |m-k|}{2}, \\ \lambda = l(l+1), \qquad \beta = |m-k| + 1. \end{gathered} \quad (187)$$

Задача (186) співпадає з розглянутим у розділі 1 прикладом 1.6. Тому нагадаємо лише висновки. Розв'язками задачі є гіпергеометричні функції

$$u(z) = \mathrm{F}(\alpha_1, \alpha_2; \beta | z).$$

Згідно з (39) спектр системи дискретний ($\beta - \alpha_2 \leq 1$), власні числа визначаються цілим індексом $l \in \mathbb{Z}_+$, власні функції $u(z)$ є поліноми, звідки лінійно незалежні поліноми мають показники m і k в межах $[-l, l]$. Знайдені таким чином функції

$$\begin{gathered} Y_l^{mk}(\theta, \varphi, \gamma) = e^{im\varphi + ik\gamma} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{|m+k|} \times \\ \times \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{|m-k|} \mathrm{F}\left(\alpha_1, \alpha_2; \beta | \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \end{gathered} \quad (188)$$

є власними функціями симетричного гіроскопа. З точністю до сталої нормування вони співпадають із *D-функціями Вігнера* (або *узагальненими сферичними функціями*) $D_{km}^{(l)}(\theta, \varphi, \gamma)$ [18, 26]. Звернімо увагу на окремий випадок $k = 0$. Очевидно, $Y_l^{m0}(\theta, \varphi, \gamma)$ є, з точністю до сталої нормування, звичайна сферична функція $Y_l^m(\theta, \varphi)$ (див. приклад 1.10).

Перейдемо до аналізу радіального рівняння (182b), яке з урахуванням (187) перетворюється до вигляду

$$R'' + \frac{2}{\rho}R' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) R = 0, \tag{189}$$

$$\rho = m\omega r, \qquad n = \frac{E}{2\hbar\omega}.$$

Проаналізуємо асимптотику його розв'язків в околах особливих точок: функція $R(\rho)$ асимптотично пропорційна ρ^l або $\rho^{-(l+1)}$ при $\rho \to 0$ і $e^{\pm\rho/2}$ при $\rho \to \infty$. Вибираючи з-поміж цих розв'язків обмежені, виділимо поведінку в околах цих точок підстановкою

$$R(\rho) = e^{-\rho/2}\rho^l w(\rho).$$

Функція w задовольняє диференціальне рівняння

$$\rho w'' + (\beta - \rho)\, w' - \alpha w = 0, \tag{190a}$$

$$\alpha = l + 1 - n, \qquad \beta = 2(l+1).$$

З (182d) маємо додаткову умову для функції w

$$w \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho^{2(l+1)} e^{-\rho}). \tag{190b}$$

Як показано в прикладі 1.5, розв'язками задачі (190) є поліноми Лягерра (33)). Отже,

$$R_{nl}(\rho) = e^{-\rho/2}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho). \tag{191}$$

Таким чином, власні функції чотиривимірного осцилятора мають вигляд

$$\psi^{osc} = R_{nl}(\rho) Y_l^{mk}(\theta, \varphi, \gamma) \tag{192a}$$

і їм відповідають власні значення енергії

$$E_n^{osc} = 2n\hbar\omega, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{192b}$$

Кратність виродження n-го рівня дорівнює

$$d^{osc} = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1). \tag{192c}$$

Розв'язок задачі про рух у кулоновому полі можна отримати з (192), поклавши $k = 0$, тобто

$$\begin{aligned} \psi^{Coulomb} &= R_{nl}(\rho) Y_l^m(\theta, \varphi), && (193a) \\ \mathcal{E}_n^{Coulomb} &= -\frac{m\varkappa^2}{2\hbar^2 n^2}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, && (193b) \\ d^{Coulomb} &= \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2. && (193c) \end{aligned}$$

Розв'язок задачі для симетричного гіроскопа дається, згідно з (188), рівностями:

$$\begin{aligned} \psi^{gyr} &= Y_l^{m,k}(\theta, \varphi, \gamma), && (194a) \\ \lambda^{gyr} &= -l(l+1), \qquad l \in \mathbb{N}, && (194b) \\ d^{gyr} &= (2l+1)^2. && (194c) \end{aligned}$$

Докладніше про розглянуту задачу див. [31].

3. Задачі для самостійного розв'язування

Задачі до розділу 1

1. $X'' = -\mu X$, $X'(0) - cX(0) = X(a) = 0$.

2. $X'' = -\mu X$, $X'(0) - cX(0) = X'(a) + cX(a) = 0$.

3. $X'' - X' = -\lambda X$, $X(0) = X(\pi) = 0$. Яка в цій задачі вагова функція?

4. $(1 - x^2)X'' - 2xX' + \lambda X = 0$, $X \in \mathcal{C}[0, 1]$. Межова умова на лівому кінці: а) $X(0) = 0$, б) $X'(0) = 0$.

Вказівка
Скористатись тим, що поліноми Лежандра з парними (непарними) номерами — парні (непарні) функції.

5. $(1-x^2)X''-2(m+1)xX'+(\lambda - m(m+1))\,X = 0$, $X \in \mathcal{C}[0, 1]$. Межова умова на лівому кінці: а) $X(0) = 0$, б) $X'(0) = 0$.

Вказівка
Скористатися прийомом прикладу 1.3 і тим, що похідна парної (непарної) функції — непарна (парна) функція.

6. $(\Theta' \sin\theta)' - m^2\Theta/\sin\theta = -\lambda\Theta\sin\theta$, $\Theta \in \mathcal{C}[0, \pi/2]$. Межова умова на лівому кінці: а) $\Theta(0) = 0$, б) $\Theta'(0) = 0$.

Вказівка
Зводиться до прикладу 1.7 так само, як (53b) до (18).

7. $\Delta\Omega(\rho, \varphi) = -\lambda\Omega(\rho\varphi)$, $0 < \rho < b$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2 < \varphi_2 + 2\pi$, $\Omega \in \mathcal{C}\left([0, b] \times [\varphi_1, \varphi_2]\right)$, $\Omega_\rho(b, \varphi) = 0$. Межові умови на сторонах кута: а) $\Omega(\rho, \varphi_j) = 0$, $j = 1, 2$; б) $\Omega_\varphi(\rho, \varphi_j) = 0$, $j = 1, 2$; в) $\Omega_\varphi(\rho, \varphi_1) - c\Omega(\rho, \varphi_1) = \Omega_\varphi(\rho, \varphi_2) + c\Omega(\rho, \varphi_2) = 0$.

8. $\Delta\Omega(\rho, \varphi) = -\lambda\Omega(\rho\varphi)$, $0 < a < \rho < b$, $\varphi \in S^1$; $\alpha_1\Omega(a, \varphi) - \beta_1\Omega_\rho(a, \varphi) = 0$, $\alpha_2\Omega(b, \varphi) + \beta_2\Omega_\rho(b, \varphi) = 0$.

9. $\Delta\Omega(\rho,\varphi) = -\lambda\Omega(\rho\varphi)$, $0 < a < \rho < b$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2 < \varphi_2 + 2\pi$, $\Omega_\rho(a,\varphi) = \Omega_\rho(b,\varphi) = 0$. $\Omega(\rho,\varphi_1) = \Omega_\varphi(\rho,\varphi_2) = 0$.

10. $\Delta Y(\theta,\varphi) = -\lambda Y(\theta,\varphi)$, $0 < \theta < \pi/2$, $\varphi \in S^1$; $Y \in \mathcal{C}\big([0,2\pi] \times S^1\big)$. Межова умова на екваторі: а) $Y(\pi/2,\varphi) = 0$; б) $Y_\theta(\pi/2,\varphi) = 0$.

Вказівка
Скористатися результатом задачі 1.8 і міркуваннями прикладу 1.10.

11. $\Delta Y(\theta,\varphi) = -\lambda Y(\theta,\varphi)$, $\theta,\varphi \in]0,\pi[$, $Y \in \mathcal{C}\left([0,\pi]^2\right)$, $Y(\theta,0) = Y(\theta,\pi) = 0$.

12. $\Delta Y(\theta,\varphi) = -\lambda Y(\theta,\varphi)$, $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \varphi < \pi$; $Y \in \mathcal{C}\left([0,\pi] \times [0,\pi]\right)$, $Y_\theta(\pi/2,\varphi) = 0$, $Y(\theta,0) = Y(\theta,\pi) = 0$.

13. $\Delta\Omega(r,\theta,\varphi) = -\lambda\Omega(r,\theta\varphi)$, $0 < r < b$, $(\theta,\varphi) \in S^2$; $\Omega \in \mathcal{C}\left([0,b] \times S^2\right)$, $\alpha\Omega(b,\theta,\varphi) + \beta\Omega_r(b,\theta,\varphi) = 0$.

14. $\Delta\Omega(r,\theta,\varphi) = -\lambda\Omega(r,\theta\varphi)$, $0 < a < r < b$, $(\theta,\varphi) \in S^2$; $\Omega \in \mathcal{C}\left([a,b] \times S^2\right)$, $\Omega(a,\theta,\varphi) = \Omega(b,\theta,\varphi) = 0$.

15. $\Delta\Omega(r,\theta,\varphi) = -\lambda\Omega(r,\theta\varphi)$, $0 < r < b$, $0 < \theta < \pi/2$, $\varphi \in S^1$; $\Omega \in \mathcal{C}\left([0,b] \times [0,\pi/2] \times S^2\right)$, $\Omega(b,\theta,\varphi) = 0$. Межова умова на площині екватора: а) $\Omega(r,\pi/2,\varphi) = 0$; б) $\Omega_\theta(r,\pi/2,\varphi) = 0$.

16. $\Delta\Omega(r,\theta,\varphi) = -\lambda\Omega(r,\theta\varphi)$, $0 < r < b$, $\theta,\varphi \in]0,\pi[$; $\Omega \in \mathcal{C}\left([0,b] \times [0,\pi]^2\right)$, $\Omega(b,\theta,\varphi) = 0$, $\Omega_\varphi(r,0,0) = \Omega_\varphi(r,\theta,\pi) = 0$.

17. $\Delta\Omega(r,\theta,\varphi) = -\lambda\Omega(r,\theta\varphi)$, $0 < r < b$, $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \varphi < \pi$; $\Omega \in \mathcal{C}\left([0,b] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi]\right)$, $\Omega_r(b,\theta,\varphi) = 0$, $\Omega(r,\pi/2,\varphi) = 0$, $\Omega(r,\theta,0) = \Omega(r,\theta,\pi) = 0$.

18. $\Delta\Omega(\rho,\varphi,z) = -\lambda\Omega(\rho,\varphi,z)$, $0 < a < \rho < b$, $\varphi \in S^1$, $0 < z < l$; $\Omega(a,\varphi,z) = \Omega(b,\varphi,z) = 0$, $\Omega_z(\rho,\varphi,0) = \Omega(\rho,\varphi,l) = 0$.

19. $\Delta\Omega(\rho,\varphi,z) = -\lambda\Omega(\rho,\varphi,z)$, $0 < \rho < b$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2 < \varphi_1 + 2\pi$, $0 < z < l$; $\Omega \in \mathcal{C}\left([0,b] \times [\varphi_1,\varphi_2] \times [0,l]\right)$, $\Omega_\rho(b,\varphi,z) = 0$, $\Omega(\rho,\varphi_j,z) = 0$, $j = 1,2$, $\Omega(\rho,\varphi,0) = \Omega(\rho,\varphi,l) = 0$.

20. $\Delta\Omega(\rho,\varphi,z) = -\lambda\Omega(\rho,\varphi,z)$, $0 < a < \rho < b$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2 < \varphi_2 + 2\pi$, $0 < z < l$; $\Omega(a,\varphi,z) = \Omega(b,\varphi,z) = 0$, $\Omega_\varphi(\rho,\varphi_1,z) = \Omega(\rho,\varphi_2,z) = 0$, $\Omega_z(\rho,\varphi,0) = \Omega_z(\rho,\varphi,l) + c\Omega(\rho,\varphi,l) = 0$.

Задачі до розділу 2

21. Циліндричний діелектричний шар із зовнішнім радіусом a, внутрішнім радіусом b і діелектричною сталою ε перебуває в однорідному електричному полі E_0, напрямленому а) вздовж осі циліндра; б) перпендикулярно. Знайти електричне поле всередині циліндра.

22. Знайти потенціал, створюваний металевою заземленою (ізольованою) сферою радіуса R і точковим диполем величини d, поміщеним на відстані a від центра сфери і напрямленим уздовж її радіуса. Розглянути випадки, коли диполь знаходиться а) всередині сфери; б) зовні сфери.

23. Куля радіуса a з діелектричною сталою ε_1 міститься в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На відстані b від центра кулі розташований точковий заряд величини e. Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі. Розглянути випадки, коли заряд знаходиться а) всередині сфери; б) зовні сфери.

24. Нескінченний металевий циліндр із питомою провідністю σ, магнітною проникністю μ і радіусом R знаходиться в зовнішньому сталому однорідному магнітному полі $\boldsymbol{H}_0$, спрямованому вздовж його осі. У деякий момент часу поле вимикають та підтримують нульовим. Знайти хід згасання з часом магнітного поля всередині циліндра.

25. Рівномірно заряджена з об'ємною густиною заряду ρ куля радіуса a, обертається навколо своєї осі симетрії з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$. Знайти векторний потенціал $\boldsymbol{A}$ та напруженість $\boldsymbol{H}$ магнітного поля: а) всередині та б) зовні кулі. У випадку б) виразити відповіді через магнітний момент $\boldsymbol{\mu}$ кулі.

26. Знайти власні частоти дипольно-електричних та дипольно-магнітних коливань електромагнітного поля у сферичному резонаторі радіуса a з металевими стінками.

27. Квантова частинка маси m рухається в однорідному електричному полі E. Знайти власні значення енергії та власні функції зв'язаних станів одновимірного руху (заряд частинки дорівнює q).

28. Знайти рівні енергії та хвильові функції зв'язаних станів квантовомеханічної частинки маси m у полі, визначеному потенціалом Пешля—Теллера:

$$U(x) = \frac{U_0}{2}\left(\frac{\mu(\mu+1)}{\sin^2 \alpha x} + \frac{\nu(\nu+1)}{\cos^2 \alpha x},\right)$$

де $U_0 = \hbar^2\alpha^2/m$, $\mu, \nu > 0$. Обмежитися розглядом інтервалу $x \in]0; \pi/2\alpha[$, на кінцях якого потенціал $U(x)$ прямує до нескінченості.

29. Знйати енергії зв'язаних станів із нульовим моментом ($l = 0$) квантовомеханічної частинки маси m у полі, визначеному сферично-симетричними потенціалами: а) Вуда—Саксона (195a), б) Хюльтена (195b), в) Морса (195c),

$$U(r) = -\frac{U_0}{1+e^{\frac{r-R}{a}}}, \qquad a \ll R; \tag{195a}$$

$$U(r) = -U_0\frac{e^{-r/a}}{1-e^{-r/a}}; \tag{195b}$$

$$U(r) = -U_0\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right), \quad x = \frac{r-a}{a}. \tag{195c}$$

Література

[1] Абрамовиц М., Стиган И., Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — М., 1979.

[2] Арнольд В.И. Лекции по уравнениям с частными производными. — М., 1997.

[3] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М., 1966.

[4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М., 1965. — Т. 1.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1966. — Т. 2.

[6] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — К., 1965.

[7] Боголюбов А.Г, Кравцов В.В. Задачи математической физики. — М., 1998.

[8] Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. — М., 1985.

[9] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М., 1965.

[10] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М., 1988.

[11] Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1962.

[12] Грин Х. Матричная квантовая механика. — М., 1968.

[13] Данилюк И.И. Задача Стефана // Успехи математических наук. — 1985.– Т.40, №5.-С.133–185.

[14] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М., 1988.

[15] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 1958.

[16] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — М.;Л., 1951. — Т.1.

[17] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М.;Л., 1963.

[18] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т., — М., 1989. — Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория).

[19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика: В 10 т., — М., 1988. — Т. 6. Гидродинамика.

[20] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика: В 10 т., — М., 1992. — Т. 5. Электродинамика сплошных сред.

[21] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. — М., 1970.

[22] Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. — К., 1981.

[23] Мейранов А.М. Задача Стефана. — Новосибирск, 1986.

[24] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М., 1981.

[25] Морен К. Методы гильбертова пространства. — М., 1965.

[26] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — М., 1984.

[27] Смирнов В.И. Курс высшей математики. — М., 1974. — Т. 3, ч. 2.

[28] Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 5 т., — М., 1977. — Т. 3. Электричество.

[29] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики. — М., 1977.

[30] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н., Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. — М., 1963.

[31] Харт Н. Геометрическое квантование в действии. — М., 1985.

[32] Юрачківський А.П., Грязнова В.О., Метод відокремлення змінних у задачах математичної фізики. — К., 1998.

[33] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М., 1977.

[34] Matveev V.B., Salle V.A. Darboux Transformations and Solitons. — Berlin, 1991.

[35] Wigner E. The application of group theory to the special functions of mathematical physics. — Princeton, 1955.

Зміст

Навчальне видання

Білоколос Євген Дмитрович
Юрачківський Андрій Павлович
Шека Денис Дмитрович

Спеціальні функції в задачах математичної фізики

Навчальний посібник для студентів природничих факультетів

Редактор В.Р. Філь

Редакційно,видавничий центр «Київський університет»
252017, Київ, бульв- Т- Шевченка, 14, кімн- 43, тел: 221,32,22-
Підписано до друку Формат Вид- №
Друк офсетний- Наклад Умовн- друк- арк-
Надруковано у «Поліграфцентрі Київського університету ім- Тараса Шевченка»
252017, Київ, бульв- Т- Шевченка, 14, тел: 224,01,05-