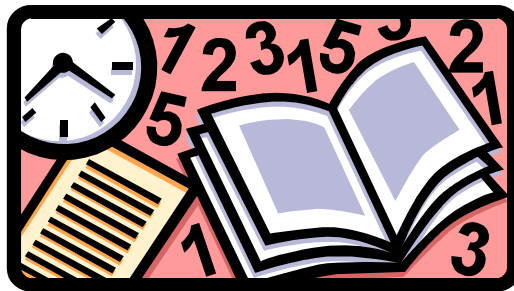


В.В.Обуховський

**Збірка задач
для контрольних робіт
з електродинаміки**



**Видавництво Київського національного університету
імені Тараса Шевченка**

Київ - 2003

В.В.Обуховський

Збірка задач
для контрольних робіт
з електродинаміки

**Видавництво Київського національного університету
імені Тараса Шевченка**

Київ - 2003

Зміст

	Передмова	6
§1	Математичний апарат електродинаміки	7
§1.1	Умови задач .	17
§2	Електростатика	25
§2.1	Умови задач .	30
§3	Магнетостатика	39
§3.1	Умови задач .	44
§4	Електромагнітні властивості речовин. . . .	54
§4.1	Умови задач .	61
§5	Поширення електромагнітних хвиль . . .	71
§5.1	Умови задач .	80
§6	Інтерференція та дифракція та електромагнітних хвиль .	87
§6.1	Умови задач	92
§7	Випромінювання електромагнітних хвиль .	102
§7.1	Умови задач	108
§8	Випромінювання антен.	119
§8.1	Умови задач .	123
	Додатки	
	А Дельта-функція та її властивості	131
	Б Теорія лишків	135
	В Інтеграл Френеля	139
	Г Пуассонівські інтеграли	142
	Д Деякі означені інтеграли.	144
	Е Розклад Фур'є	146
	Ж Одиниці вимірів та фізичні константи.	149
	Література	153

Передмова

Ця збірка включає в себе задачі, які призначені для закріплення теоретичного матеріалу з курсу Класичної електродинаміки. За основу взято завдання, які на протязі багатьох років використовувались автором на радіофізичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка при проведенні практичних занять з електродинаміки. Частина задач відноситься до традиційного типу, а частина є оригінальною. До збірки також включено довідковий і теоретичний матеріал.

Звичайно, в кожному університеті в залежності від наявності тих чи інших кафедр є специфічні потреби в практичному опануванні конкретних розділів електродинаміки. При цьому курси різних викладачів відрізняються розстановкою акцентів. В процесі відбору задач автор також не зміг цього уникнути, тому в збірці є частина матеріалу (наприклад, задачі по дифракції випромінювання в гаусівських системах), яка потребує вивчення спеціальних методів.

Нумерація задач в межах кожного параграфу ведеться окремо. Номери формул теоретичної частини починаються із номера розділу, а формули доданків – із відповідної літери.

Автор щиро дякує В.В.Лемешко, В.М.Нечаєву, Н.Л.Сітнікову, Л.Ф.Михайленко, за терпіння і велику роботу.

Київ, 2003 р.

§1. Математичний апарат електродинаміки.

1. Скалярним добутком векторів

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z; \quad \vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z \quad (1.1)$$

(де \vec{i} , \vec{j} і \vec{k} – одиничні вектори по осях координат X, Y, Z) називається скаляр, що дорівнює

$$(\vec{A}\vec{B}) = \vec{A}\vec{B} = \vec{B}\vec{A} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \quad (1.2)$$

2. Векторним добутком векторів \vec{A} і \vec{B} називається вектор \vec{C} , який напрямлено по перпендикуляру до площини, що містить \vec{A} і \vec{B} , а за абсолютною величиною дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах:

$$\begin{aligned} \vec{C} = [\vec{A}\vec{B}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}; \end{aligned} \quad (1.3.a)$$

Довжина вектора C :

$$|\vec{C}| = |[\vec{A}\vec{B}]| = AB \sin(\vec{A}, \vec{B}). \quad (1.3.b)$$

Напрямок вектора $\vec{C} = [\vec{A} \times \vec{B}]$ визначається вимогою, щоб вектори \vec{A} , \vec{B} і \vec{C} утворювали правогвинтову систему. Властивість векторного добутку:

$$[\vec{A}\vec{B}] = -[\vec{B}\vec{A}] \quad (1.3.v)$$

3. Змішаним добутком векторів \vec{A} , \vec{B} і \vec{C} називається скаляр, що чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах:

$$(\vec{A} [\vec{B}\vec{C}]) = (\vec{B} [\vec{C}\vec{A}]) = (\vec{C} [\vec{A}\vec{B}]) \quad (1.4)$$

4. Подвійний векторний добуток векторів \vec{A} , \vec{B} і \vec{C} :

$$[\vec{A} [\vec{B}\vec{C}]] = \vec{B} (\vec{A}\vec{C}) - \vec{C} (\vec{A}\vec{B}). \quad (1.5)$$

5. Оператор “набла” (вектор)

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.6)$$

6. Градієнт функції φ є вектор, що напрямлений в бік зростання функції і дорівнює

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (1.7)$$

7. Дивергенція вектора \vec{A} (в декартових координатах) :

$$\text{div } \vec{A} = (\nabla \vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (1.8)$$

8. Ротор (вихор) вектора (в декартових координатах) :

$$[\nabla \vec{A}] = \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

9. Оператор Лапласа (лапласіан) в декартових координатах :

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.10)$$

Лапласіан скалярної функції f (в декартових координатах):

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.11)$$

10. Деякі диференційні співвідношення:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} f &\equiv \nabla^2 f \equiv \Delta f; \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &\equiv [\nabla (\nabla f)] \equiv 0; \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &\equiv \Delta [\nabla \vec{A}] \equiv 0; \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &\equiv [\nabla [\nabla \vec{A}]] \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}; \\ \operatorname{div} [\vec{A} \vec{B}] &\equiv \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

11. **Теорема Остроградського-Гауса**

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{S}. \quad (1.13)$$

Тут dS – елемент замкненої поверхні S , що обмежує об'єм V . Вектор $d\vec{S}$, напрямлений вздовж зовнішньої нормалі до поверхні.

12. **Теорема Стокса**

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}, \quad (1.14)$$

Тут dl – елемент замкненого контуру L , що обмежує поверхню S . Напрямок обходу контуру L утворює із напрямком елемента поверхні інтегрування $d\vec{S}$ правої вентури систему. Інтеграл $\oint_L \vec{A} d\vec{l}$

називається **циркуляцією** вектора \vec{A} по контуру L .

1 Криволінійні координати

В довільній ортогональній системі координат q_1, q_2, q_3 квадрат елемента довжини визначається як

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \quad (1.15)$$

а елемент об'єму

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3, \quad (1.16)$$

Вище використано такі означення для коефіцієнтів Ламе

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (1.17)$$

(останні можуть бути функціями координат).

Диференціальні операції в довільній системі криволінійних координат :

- **градієнт**

$$(\text{grad } \varphi)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, \quad (1.18)$$

- **дивергенція**

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (1.19)$$

- **ротор**

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{e_1}{h_2 h_3} & \frac{e_2}{h_1 h_3} & \frac{e_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}; \quad (1.20)$$

- **лапласіан (оператор Лапласа)**

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right] \quad (1.21)$$

Нижче наводяться для довідок вирази для диференціальних операторів в двох найбільш уживаних системах координат – сферичній і циліндричній.

• **Сферична система координат:**

$$x = r \sin \vartheta \cos \alpha, \quad y = r \sin \vartheta \sin \alpha, \quad z = r \cos \vartheta; \quad (1.22)$$

$$h_r = l, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\alpha = r \sin \vartheta; \quad (1.23)$$

$$\text{grad } \varphi = \bar{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\bar{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\bar{e}_\alpha}{r \sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \quad (1.24)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}; \quad (1.25)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right]; \quad (1.26)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r}; \quad (1.27)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}; \quad (1.28)$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (1.29)$$

• **Циліндрична система координат:**

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z; \quad (1.30)$$

$$h_r = 1, \quad h_\alpha = r, \quad h_z = 1; \quad (1.31)$$

$$\text{grad } \varphi = \bar{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\bar{e}_\alpha}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \bar{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (1.32)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.33)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}; \quad (1.34)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_\alpha = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \quad (1.35)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha}; \quad (1.36)$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1.37)$$

Інші системи криволінійних координат (еліпсоїдальні, тороїдальні та ін.) розглянуто в [13-14].

Матриці і тензори

Сукупність чисел a_α

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \hat{a} \quad (1.38)$$

зветься **матрицею** \hat{a} , а самі числа a_α – **елементами матриці**.

Транспонована матриця \hat{a}^τ може бути знайдена із основної \hat{a} шляхом заміни рядків на стовпчики

$$a_{\alpha\beta}^\tau = a_{\beta\alpha}. \quad (1.39)$$

Добутком $\hat{a}\hat{b}$ двох матриць \hat{a} і \hat{b} зветься матриця \hat{c} , що визначається співвідношенням:

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}. \quad (1.40)$$

Комутуючі матриці задовольняють співвідношенню:

$$\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a}, \quad (1.41)$$

Символ Кронекера:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (1.42)$$

Визначник матриці третього порядку:

$$\begin{aligned}
|\hat{a}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\
&\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Зворотна матриця:

$$\hat{a}^{-1} \hat{a} = \hat{a} \hat{a}^{-1} = \hat{I}, \tag{1.44}$$

$$a_{\alpha\gamma}^{-1} a_{\gamma\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{1.45}$$

Матричні елементи зворотної матриці \hat{a}^{-1} можуть бути знайдені за правилом:

$$a_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{A_{\beta\alpha}}{|\hat{a}|}, \tag{1.46}$$

Тут $A_{\beta\alpha}$ – алгебраїчний додаток визначника матриці (1.38) по відношенню до елемента $a_{\beta\alpha}$. Зворотна матриця існує, якщо визначник $|\hat{a}| \neq 0$.

Симетрична матриця \hat{s} має властивість:

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}, \tag{1.47}$$

Антисиметрична матриця \hat{a} має властивість:

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}. \tag{1.48}$$

Довільну квадратну матрицю \hat{b} можна подати у вигляді суми симетричної і антисиметричної частин:

$$\hat{b} = \hat{s} + \hat{a}, \tag{1.49}$$

де

$$\hat{s} = \frac{1}{2}(\hat{b} + \hat{b}^\tau), \quad \hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{b} - \hat{b}^\tau). \quad (1.50)$$

Операції повороту, відбиття, інверсії описуються *лінійним перетворенням*:

$$x'_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (1.51)$$

де x'_α – компоненти вектору після перетворення, а матричні елементи $a_{\alpha\beta}$ являють собою косинуси кутів між осями вихідної і оберненої систем координат (декартових).

Лінійне перетворення координат вигляду (1.51) зветься *ортогональним*, якщо коефіцієнти $a_{\alpha\beta}$ задовольняють умові:

$$a_{\alpha\beta}^{-1} = a_{\beta\alpha}. \quad (1.52)$$

Вектором \vec{A} зветься сукупність величин A_α , які при ортогональному перетворенні координат змінюються за законом:

$$A'_\alpha = a_{\alpha\beta} A_\beta, \quad (1.53)$$

Тут величини A'_α , являють собою компоненти вектору в штрихованій системі координат. По повторюючимся індексам розуміється операція підсумовування, а знак суми при цьому може не писатися.

Тензор другого рангу при ортогональному перетворенні координат змінюється за законом:

$$T'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} T_{\gamma\delta}, \quad (1.54)$$

де $T'_{\alpha\beta}$ – компоненти того ж тензору в штрихованій координатній системі

Закон перетворення компонент тензору третього рангу має такий вигляд:

$$T'_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\delta} a_{\beta\sigma} a_{\gamma\rho} T_{\delta\sigma\rho}. \quad (1.55)$$

Ортогональне перетворення координат, що полягає в одночасній зміні знаків усіх координат, зветься *інверсією*. Оператор інверсії:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

або $I_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$. Після інверсії права система координат змінюється на ліву.

Якщо однокомпонентна величина не змінює свій знак при інверсії, тобто

$$\hat{I}\varphi(\vec{r}) = +\varphi(\vec{r}) \quad (1.57)$$

то вона зветься *скаляром*. Якщо однокомпонентна величина змінює свій знак при інверсії

$$\hat{I}\varphi(\vec{r}) = -\varphi(\vec{r}) \quad (1.58)$$

то вона зветься *псевдоскаляром*.

Полярний вектор \vec{p} при інверсії змінює знак, а **аксіальний вектор** \vec{A} – ні.

$$\hat{I}\vec{p}(\vec{r}) = -\vec{p}(\vec{r}) \quad (1.59)$$

$$\hat{I}\vec{A}(\vec{r}) = +\vec{A}(\vec{r}) \quad (1.60)$$

Внаслідок скалярного добутку тензору $T_{\alpha\beta}$ на вектор A_β утворюється інший вектор

$$B_\alpha = T_{\alpha\beta} A_\beta \quad (1.61)$$

Цю операцію звать також *згорткою*.

Абсолютно антисиметричним одиничним (псевдо)тензором третього рангу зветься сукупність величин $e_{\alpha\beta\gamma}$, що змінюють знак при перестановці будь-яких двох індексів. Зрозуміло, що при цьому будуть відмінні від нуля лише ті компоненти цього тензора, у яких

індекси α , β і γ відмінні між собою. Наприклад, $e_{123} = 1$, а інші відмінні від нуля компоненти дорівнюють 1 або -1 , зважаючи на те, парне чи непарне число утворюють перестановки індексів 123.

Значимо деякі властивості згорток абсолютно антисиметричного тензору:

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} &= 6, \\
 e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\beta\gamma} &= 2\delta_{\alpha\lambda}, \\
 e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\gamma} &= \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}, \\
 e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu} &= \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{1.62}$$

За допомогою абсолютно антисиметричного тензору $e_{\alpha\beta\gamma}$ векторний добуток можна записати у вигляді:

$$\left[\vec{a} \times \vec{b} \right]_a = e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma.
 \tag{1.63}$$

Більш детальні відомості про вищезгаданий математичний апарат, що використовується в електродинамічних задачах, можна знайти в [1,4,6,8,14].

§1.1. Математичний апарат електродинаміки. Умови задач.

№ 100. Знайти градієнт від функцій :

$$\text{а) } \varphi = \left(\vec{a} \left[\vec{b} \times \vec{r} \right] \right),$$

$$\text{б) } \varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^3},$$

$$\text{в) } \varphi = \text{tg} \left((\vec{k} \cdot \vec{r})^2 \right),$$

де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{k}$ – сталі вектори.

№ 101. Знайти дивергенцію від функцій:

$$\text{а) } \vec{A} = [\vec{a} \times \vec{r}],$$

$$\text{б) } \vec{A} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{r}),$$

$$\text{в) } \vec{A} = [\vec{a} \times \vec{r}] \cdot \text{tg}(\vec{k} \cdot \vec{r}),$$

де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{k}$ - сталі вектори.

№ 102. Знайти ротор від функцій:

$$\text{а) } \vec{B} = [\vec{a} \times \vec{r}] \exp(-(\vec{b} \cdot \vec{r})),$$

$$\text{б) } \vec{B} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{r}) \text{sh}(\vec{k} \cdot \vec{r}),$$

$$\text{в) } \vec{B} = [\vec{a} \times \vec{r}] \cdot \text{tg}(\vec{k} \cdot \vec{r}),$$

де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{k}$ - сталі вектори.

№ 103. Знайти $\Delta \vec{A}$ (лаплас) від функцій:

$$\text{а) } \vec{A} = \vec{r}(\vec{a} \cdot \vec{r}),$$

$$\text{б) } \varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|},$$

$$\text{в) } \vec{A} = [\vec{a} \times \vec{r}] \cdot \cos(|\vec{a}| \cdot |\vec{r}|),$$

де \vec{a}, \vec{b} – сталі вектори.

№ 104. Знайти функції $u(|\vec{r}|)$, які залежать тільки від модуля $|\vec{r}|$ і задовольняють умові $\text{div}(u(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}) = 0$.

№ 105. Знайти функції $u(|\vec{r}|)$, які залежать тільки від модуля $|\vec{r}|$ і задовольняють умові $\text{rot}(u(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}) = 0$.

№ 106. Знайти дивергенцію та вихор таких векторів:

а) $[[\vec{a} \times \vec{r}] \times \vec{b}]$,

б) $\vec{r} \exp(\vec{a} \cdot \vec{r})$,

в) $[\vec{a} \times \vec{r}]$,

г) $(\vec{r})^2 [\vec{a} \times \vec{r}]$,

д) $[\vec{r} \times [\vec{a} \times \vec{r}]]$.

№ 107. Виразити через елементарні похідні такі вирази

а) $\text{grad}(\vec{r} \cdot [\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{r}])$,

б) $\text{grad}(\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}))$,

в) $\text{div}[\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]$,

г) $\text{rot}[\vec{B}(\vec{r}) \times \vec{A}(\vec{r})]$,

д) $[(\vec{K} \times \vec{V}) \vec{B}(\vec{r}) \times \vec{A}(\vec{r})]$,

де \vec{A}, \vec{B} – функції, що залежать лише від модуля $|\vec{r}|$, а \vec{K} – сталий вектор.

№ 108. Інтеграл по об'єму $\int_V (\text{grad} f(|r|) \cdot \text{rot} \vec{F}(|r|)) dV$ перетворити в

інтеграл по поверхні S , що оточує цей об'єм (V - довільний об'єм).

№ 109. Обчислити інтеграли

а) $\oint_S \vec{r} [\vec{a} \times \vec{n}] dS$,

$$\text{б) } \oint_S [\vec{a} \times \vec{r}] \vec{n} dS,$$

де \vec{a} – сталий вектор, S - коло одиничного радіуса на плоскій поверхні, \vec{n} – орт нормалі до поверхні.

№ 110. Інтеграл $\oint_S r^4 d\vec{S}$ по замкненій поверхні S перетворити в інтеграл по об'єму, що охоплюється поверхнею S .

№ 111. Інтеграл по замкненій поверхні S $\oint_S [\vec{n} \times \vec{b}] r^2 d\vec{S}$ перетворити в інтеграл по об'єму, що охоплюється поверхнею S (\vec{b} – сталий вектор, \vec{n} – орт нормалі до відповідної точки поверхні).

№ 112. Інтеграл по замкнутому контуру $\oint_L r^4 d\vec{l}$ перетворити в інтеграл по поверхні, що спирається на контур L .

№ 113. Функцію \vec{U} , що фігурує в рівнянні

$$\int_V (\vec{A} \times \text{rot rot } \vec{B} - \vec{B} \times \text{rot rot } \vec{A}) dV = \int_S [(\vec{B} \times \text{rot } \vec{A}) - \vec{U}] dS$$

виразити через функції $\vec{A}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})$.

№ 114. Скалярна функція $\Psi \equiv \Psi(\vec{r})$ задовольняє хвильовому рівнянню $\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0$, а векторна функція $\vec{L} = \text{grad } \Psi$. Знайти функцію \vec{F} , що задовольняє рівнянню $\vec{F} = \Delta \vec{L} + k^2 \vec{L}$.

№ 115. Скалярна функція $\Psi \equiv \Psi(\vec{r})$ задовольняє хвильовому рівнянню $\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0$, а векторна функція $\vec{M} = \text{rot}(\vec{a} \Psi)$. Знайти функцію \vec{F} , що задовольняє рівнянню $\vec{F} = \Delta \vec{M} + k^2 \vec{M}$, якщо \vec{a} - сталий вектор.

№ 116. Скалярна функція $\Psi \equiv \Psi(\vec{r})$ задовольняє хвильовому рівнянню $\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0$, а векторна функція $\vec{N} = \text{rot rot}(\vec{a} \Psi)$.

Знайти функцію \vec{F} , що задовольняє рівнянню $\vec{F} = \Delta \vec{N} + k^2 \vec{N}$, якщо \vec{a} - сталий вектор.

№ 117. Показати, що тензор другого рангу симетричний в декартовій системі відліку, залишається симетричним і в системі відліку, що повернута на довільний кут α відносно попередньої системи координат.

№ 118. Чому дорівнює величина згортки $F = S_{ik} A_{ik}$, якщо тензор S_{ik} - симетричний, а тензор A_{ik} - антисиметричний?

№ 119. Довести, що шпур $Sp\hat{D}$ (тобто сума діагональних компонент) тензору другого рангу \hat{D} є інваріантом відносно обертань системи координат.

№ 120. Записати матрицю перетворення компонент вектору при інверсії координатних осей одночасно із обертанням декартової системи координат навколо осі z на кут α .

№ 121. Довести, що можна знайти такий вектор \vec{F} , компоненти якого при обертаннях системи координат перетворюються як компоненти антисиметричного тензора другого рангу \hat{A} .

№ 122. Є симетричний тензор другого рангу ε_{ik} . Знайти компоненти тензору ε_{ik}^{-1} , зворотного до ε_{ik} .

№ 123. Є тензор третього рангу χ_{ijk} , симетричний по всім циклічним перестановкам індексів. Знайти компоненти оберненого тензору χ_{ijk}^{-1} .

№ 124. Є антисиметричний тензор другого рангу ε_{ik} . Знайти компоненти тензору ε_{ik}^{-1} , зворотного до ε_{ik} .

№ 125. Є тензор третього рангу χ_{ijk} , що задовольняє умовам $\chi_{ijk} = \chi_{jik} = -\chi_{ikj}$. Знайти компоненти тензору $(\chi_{ijk})^{-1}$, зворотного до χ_{ijk} .

№ 126. Інфінітезимальним оператором зветься оператор (матриця) повороту системи координат на нескінченно малий кут β . Показати, що інфінітезимальна матриця \hat{a} може бути записана у вигляді $\hat{a} = 1 + \beta \cdot \hat{\varepsilon}$, де $\hat{\varepsilon}$ – деяка антисиметрична матриця ($\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$).

№ 127. Є подвійна згортка $\sum_{ik} A_{ikl} B_{ik}$ тензорів третього і другого рангу. Вона утворює вектор чи псевдовектор?

№ 128. Є згортка $T_{ik} P_{ik}$, де T_{ik} – тензор другого рангу, а P_{ik} – псевдотензор другого рангу. Ця згортка утворює скаляр чи псевдоскаляр?

№ 129. Компоненти абсолютно антисиметричного тензора третього рангу e_{ikl} мають таку властивість: $e_{ikl} = -e_{ilk} = -e_{kil} = -e_{lki}$ (тобто при перестановці будь-яких двох індексів величина e_{ikl} змінює знак). Для ненульових компонент виконується умова нормування $|e_{ijk}| = 1$.

Знайти коефіцієнти $K_{1,2}$ в рівностях:

$$\text{а) } \sum_l e_{ikl} e_{lmn} = K_1 \cdot \delta_{im} \delta_{ln} - \delta_{in} \delta_{lm}, (\text{answer: } K_1 = 1, K_2 = 2)$$

$$\text{б) } \sum_{kl} e_{ikl} e_{klm} = K_2 \cdot \delta_{im}.$$

№ 130. Використовуючи абсолютно антисиметричний тензор e_{ikl} записати вирази для

а) компонент векторного добутку двох векторів \vec{A} і \vec{B} ,

б) вихору вектору \vec{A}

№ 131. Є три полярних вектори $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$. Які незалежні псевдоскаляри можна утворити із них, якщо можна використовувати операції згортки з абсолютно антисиметричним тензором e_{ikl} .?

№ 132. Нехай \vec{n} – одиничний вектор, усі просторові напрямки якого рівноімовірні. Знайти середнє значення таких виразів:

$$\begin{aligned} & \langle n_i \rangle, \\ & \langle n_i n_k \rangle, \\ & \langle n_i n_k n_l \rangle, \\ & \langle n_i n_k n_l n_m \rangle. \end{aligned}$$

№ 133. Нехай \vec{n} – одиничний вектор, усі просторові напрямки якого рівноімовірні, а \vec{a}, \vec{b} – сталі вектори. Знайти середні значення для таких виразів:

$$\begin{aligned} & \langle (\vec{a} \cdot \vec{n})^2 \rangle, \\ & \langle (\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{b} \cdot \vec{n}) \rangle, \\ & \langle (\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n} \rangle, \\ & \langle [\vec{a} \times \vec{n}]^2 \rangle. \end{aligned}$$

№ 134. Знайти усереднені по всім напрямкам значення таких виразів:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \langle [\vec{a} \times \vec{n}] \cdot [\vec{b} \times \vec{n}] \rangle, \\ \text{б) } & \langle (\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{b} \cdot \vec{n})(\vec{c} \cdot \vec{n}) \rangle, \\ \text{в) } & \langle (\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{b} \cdot \vec{n})(\vec{c} \cdot \vec{n})(\vec{d} \cdot \vec{n}) \rangle, \end{aligned}$$

якщо \vec{n} – одиничний вектор, усі напрямки якого рівноімовірні, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – сталі вектори.

№ 135. Виразити в циліндричній системі координат такі оператори:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \operatorname{div} \vec{A}, \\ \text{б) } & \operatorname{rot} \vec{A}, \end{aligned}$$

- в) $\Delta \varphi$,
- г) $\text{grad } \varphi$.

№ 136. Виразити в сферичній системі координат такі оператори:

- а) $\text{div } \vec{A}$,
- б) $\text{rot } \vec{A}$,
- в) $\Delta \varphi$,
- г) $\text{grad } \varphi$.

№ 137. Обчислити $\vec{A} = \text{grad} \left(\frac{\vec{p} \times \vec{r}}{r^3} \right)$ (\vec{p} – сталий вектор), скориставшись виразом для градієнта у сферичних координатах.

№ 138. Обчислити $\vec{B} = \text{rot} \left(\frac{\vec{p} \times \vec{r}}{r^3} \right)$ (\vec{p} – сталий вектор), скориставшись виразом для вихору у сферичних координатах.

№ 139. Обчислити $\vec{C} = \text{div} \left(\frac{\vec{p} \times \vec{r}}{r^3} \right)$ (\vec{p} – сталий вектор), скориставшись виразом для дивергенції у сферичних координатах.

№ 140. В сферичній системі координат знайдіть загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа для скалярної функції φ , яка залежить тільки:

- а) від r ,
- б) від θ ,
- в) від α .

№ 141. В циліндричній системі координат знайдіть загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа для скалярної функції φ , яка залежить тільки:

- а) від r ,
- б) від α ,
- в) від z .

№ 142. Знайти рівняння силових ліній для полів:

$$\text{a) } \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{i} y + \vec{j} x ,$$

$$\text{б) } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{i} \frac{1}{x} + \vec{j} \frac{1}{y} + \vec{k} \frac{1}{z} ,$$

$$\text{в) } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{i} x^2 + 2\vec{j} z ,$$

$$\text{г) } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{i} x^2 + \vec{j} y^2 + \vec{k} z^2 .$$

§2. Електростатика. Теоретичні основи.

В основі класичної теорії електрики лежить **закон Кулона** (Ch.A.Coulomb, 1785р.):

$$\vec{F}_2(\vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (2.1)$$

(вперше експериментально встановлений Cavendish у 1773 р.). Основними величинами, що характеризують електростатичне поле, є його напруженість $\vec{E}(\vec{r})$ і потенціал $\varphi(\vec{r})$.

Напруженість поля в точці \vec{r} називається сила, що діє на одиничний позитивний пробний заряд, що поміщено в дану точку.

Стаціонарне електричне поле може бути виражене через потенціал φ у такий спосіб:

$$E = -grad \varphi . \quad (2.2)$$

Різниця потенціалів поля

$$U = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \quad (2.3)$$

між точками простору \vec{r}_2 і \vec{r}_1 чисельно дорівнює роботі, яку необхідно виконати проти сил електричного поля, щоб перенести позитивний одиничний заряд з першої точки простору в другу.

В електростатиці справедливий **принцип суперпозиції**: електростатичне поле системи декількох зарядів являє собою суму полів, створених кожним зарядом окремо. У загальному випадку цей заряд може складатися з об'ємних, поверхневих, лінійних і точкових зарядів.

Точковий заряд q створює електричне поле з потенціалом і напруженістю

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (2.4)$$

де \vec{r} і \vec{r}' - радіуси-вектори відповідно точки спостереження і точки розташування заряду. У випадку, якщо заряди розподілені з об'ємною щільністю $\rho(\vec{r}')$, то

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned} \right\} . \quad (2.5)$$

Якщо заряди розподілені по поверхні S із щільністю σ і по контуру L з щільністю χ , то

$$\varphi(r) = \int_S \frac{\sigma(r') dS'}{|r - r'|} + \int_L \frac{\chi(r') dl'}{|r - r'|} . \quad (2.6)$$

Якщо заряджена система знаходиться в зовнішньому електричному полі \vec{E} , то на неї діє сила \vec{F}

$$\vec{F} = \int_V \rho \vec{E} dV , \quad (2.7)$$

і момент сили \vec{N}

$$\vec{N} = \int_V [\vec{r} \times \vec{E}] \rho dV . \quad (2.8)$$

В окремому випадку системи, що має дипольний момент \vec{d} , співвідношення (2.7) і (2.8) набувають вигляду

$$\vec{F} = \text{grad} (\vec{d} \cdot \vec{E}) \quad (2.9)$$

$$\vec{N} = [\vec{d} \times \vec{E}] . \quad (2.10)$$

Для електричного поля виконується теорема Гауса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q , \quad (2.11)$$

де Q – повний заряд, розміщений усередині замкненої поверхні S .

У випадку статичного (нерухомого) розміщення електричних зарядів напруженість електричного поля задовільнює рівнянням

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad (2.13)$$

(частковий випадок рівнянь Максвелла).

Електричні поля задовольняють таким граничним умовам :

$$[\vec{n} \times (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)] = 0, \quad (2.14)$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (2.15)$$

Тут індекси 1 і 2 відзначають характеристики електричного поля по різні сторони границі поділу. Одиничний вектор \vec{n} нормалі до цієї поверхні спрямовано з першого середовища в друге.

У статичному випадку потенціал φ задовольняє рівнянню Пуасона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad (2.16)$$

Граничні умови для потенціалу:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (2.18)$$

Відзначимо, що при наявності поверхневих зарядів умова неперервності (2.17) виконується тільки в тому випадку, коли поверхнева густина заряду σ не обертається на нескінченність.

Потенціал поля на великих відстанях $r \gg l$ від зарядженої системи можна подати у виді розкладу

$$\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{(\vec{d} \vec{r})}{r^3} + \frac{D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5} + \dots \quad (2.19)$$

У випадку точкових зарядів використовуються такі позначення:

дипольний момент

$$\vec{d} = \sum_{i=1}^N e_i \vec{r}_i, \quad (2.20)$$

тензор квадрупольного моменту

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N e_i (3x_{i\alpha}x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}). \quad (2.21)$$

У випадку неперервного розподілу зарядів використовуються такі означення:

$$\left. \begin{array}{l} \text{повний заряд} \quad Q = \int \rho(\vec{r}) dV, \\ \text{дипольний момент} \quad \vec{d} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV, \\ \text{квадрупольний} \\ \text{момент} \quad D_{\alpha\beta} = \int (3x_{\alpha}x_{\beta} - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\vec{r}) dV. \end{array} \right\} (2.22)$$

У випадку точкових зарядів об'ємну густину заряду $\rho(\vec{r}, t)$ й об'ємну щільність струму $\vec{j}(\vec{r}, t)$ можна виразити через дельта-функції

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \quad (2.23)$$

Електростатична енергія взаємодії системи точкових зарядів

$$U = \sum_{n \neq m} \frac{q_n q_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}. \quad (2.24)$$

При наявності об'ємних зарядів ця енергія може бути записана у вигляді

$$U = \int_V \int_{V'} \frac{\rho_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'. \quad (2.25)$$

Потенційна енергія системи зарядів розподілених з об'ємною густиною $\rho(\vec{r})$ в зовнішньому електричному полі з потенціалом $\phi(\vec{r})$ визначається виразом

$$U = \int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV . \quad (2.26)$$

Енергія електростатичного поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV \quad (2.27)$$

може бути перетворена до еквівалентного вигляду

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV . \quad (2.28)$$

Максвеловський тензор напруги

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (2.29)$$

дозволяє виразити електростатичну об'ємну силу (2.7) через інтеграли

$$F_\alpha = \int_V \rho E_\alpha dV = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\beta dS , \quad (2.30)$$

де \vec{n} - орт зовнішньої нормалі до замкнутої поверхні S , що обмежує об'єм V . Звідси випливає, що об'ємна сила \vec{F} еквівалентна системі поверхневих сил, прикладених до зовнішньої границі області V .

§2.1. Електростатика. Умови задач.

№ 200. Знайти напруженість електричного поля \vec{E} , потенціал якого дорівнює $\varphi = (\vec{a}[\vec{b} \times \vec{r}])$. (\vec{a}, \vec{b} – сталі вектори).

№ 201. Знайти напруженість електричного поля \vec{E} , потенціал якого дорівнює $\varphi = (\vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$. (\vec{k} – сталий вектор).

№ 202. Знайти напруженість електричного поля \vec{E} , потенціал якого дорівнює $\varphi = \varphi_0 \cdot \text{th}(\vec{b} \cdot \vec{r}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})$. (\vec{b}, \vec{k} – сталі вектори, φ_0 – константа).

№ 203. Методом Пуассона знайти потенціал φ та напруженість поля \vec{E} , що утворюється рівномірно зарядженою кулею радіуса a з діелектричною проникністю ε . Густина заряду ρ_0 . Зовнішнє середовище – вакуум.

№ 204. Методом Пуассона знайти потенціал φ поля нескінченно довгого циліндра радіуса R_0 , зарядженого з об'ємною густиною $\rho = b|\vec{R}|$, $b - \text{const}$. Зовнішнє середовище – вакуум.

№ 205. Методом Пуассона знайти потенціал φ і напруженість \vec{E} поля, яке утворюється нескінченним рівномірно зарядженим циліндром радіуса R_0 . Діелектрична проникливість циліндра ε , об'ємна густина заряду ρ_0 . Зовнішнє середовище – вакуум.

№ 206. За допомогою рівняння Пуассона знайти потенціал та напруженість поля, що утворюється нескінченно довгим зарядженим циліндром радіуса R_0 зарядженого з об'ємною

густиною $\rho = bR^2$, $b = \text{const}$, R – відстань від осі системи. Зовнішнє середовище – вакуум.

№ 207. Простір між двома концентричними сферами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$) заряджений з об'ємною густиною $\rho = \frac{a}{r^4}$. Знайти потенціал поля, утвореного такою системою.

№ 208. Частинка із зарядом $+|q|$ знаходиться в електричному полі з потенціалом $\varphi(\vec{r}) = a \cdot x \cdot (x - x_0)^2 + b((y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)$, де $a > 0, b > 0$. Чи досягається стан стійкої рівноваги в точці $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$?

№ 209. Частинка із зарядом $q > 0$ знаходиться в електричному полі з потенціалом $\varphi(\vec{r}) = a \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$, де $a > 0$. Знайти точки стійкої рівноваги заряду.

№ 210. Рівномірно заряджені дротини знаходяться одна від одної на відстані a . Вони несуть лінійні заряди b_1 та b_2 (на одиницю довжини). При деякому співвідношенні між b_1 та b_2 серед поверхонь рівного потенціалу будуть колові циліндри. Знайти це співвідношення, а також радіуси та положення центрів циліндричних поверхонь рівного потенціалу.

№ 211. Чотири заряди розташовано у верхівках квадрата зі стороною a . Величини зарядів чергуються у такій послідовності: $+q_0, -q_0, +q_0, -q_0$ (плоский квадруполь). Знайти потенціал і поле такого квадруполя на відстані $|r| \gg a$ від центру системи.

№ 212. На поверхні циліндру радіуса a розташовано чотири рівновіддалених одна від одної нескінчених нитки. Вони заряджені з однаковою лінійною густиною $|\gamma|$, але знаки зарядів чергуються (якщо обходити циліндр вздовж кола). Знайти потенціал і поле такого квадруполя на відстані $|r| \gg a$ від центру системи.

№ 213. Лінійний квадруполь утворено чотирма зарядами, що розташовані вздовж осі z на відстані a_0 один від одного. Всі заряди рівні за величиною, але їхні знаки чергуються в такій послідовності: $+ - + -$. Знайти поле та рівняння силових ліній квадруполя на відстані $|r| \gg a_0$ від його центру.

№ 214. Лінійний квадруполь утворено трьома зарядами, що розташовані на відстані a_0 один від одного у такій послідовності: $-q_0, +2q_0, -q_0$. Знайти потенціал та електричне поле, утворене таким квадруполем на відстані $|r| \gg a_0$ від його центру.

№ 215. Заряди розташовані у вершинах правильного шестикутника так, що їх знаки в сусідніх вершинах є протилежними. Абсолютні значення всіх зарядів дорівнюють q_0 . Шестикутник вписується у коло радіуса R_0 . Знайти потенціал і поле такої системи.

№ 216. У центрі діелектричної сфери радіуса a з діелектричною проникністю ϵ знаходиться точковий заряд q . Знайти сумарну величину зв'язаного заряду на поверхні сфери.

№ 217. Потенціал електростатичного поля заданий такою функцією:

$$\varphi = \begin{cases} -ax + bx^2, & x > 0 \\ +ax + bx^2, & x < 0 \end{cases}$$

Знайти розподіл зарядів, що утворюють таке поле.

№ 218. В сферичній системі координат потенціал поля в вакуумі задається такою функцією:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{r} & (r > a) \\ -\frac{1}{2} \frac{q}{a^3} r^2 + C_1 & (r < a) \end{cases}$$

де q та a – сталі. Знайти константу C_1 , якщо відомо, що на сфері $|r|=a$ поверхневий заряд відсутній. Визначити електричне поле \vec{E} та розподіл зарядів всередині сфери.

№ 219. Знайти розподіл зарядів, що утворює в просторі потенціал $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 \left(\frac{a}{|r|} + 1 \right) \exp\left(-\frac{2|r|}{a} \right)$ (φ_0, a – константи системи).

№ 220. Проводяща куля радіуса R_0 несе заряд q_0 . Вона занурена до половини в однорідний рідкий діелектрик із діелектричною проникливістю ε . Знайти поле цієї системи.

№ 221. Заряджена проводяща куля з радіусом R_0 занурена до половини у рідкий діелектрик з проникністю ε . Заряд кулі дорівнює q_0 . Знайти розподіл зарядів на поверхні кулі.

№ 222. Поле утворюється металевою кулею радіуса R_0 з зарядом q . Знайти потік поля крізь диск радіуса R_0 , що знаходиться на відстані R_0 від центра кулі. Площина розташування диску перпендикулярна до радіус-вектора \vec{R}_0 .

№ 223. Поле утворюється в вакуумі рівномірно зарядженою ниткою. Лінійна густина зарядів дорівнює χ . В просторі біля нитки є прямокутник $a \times b$, розташований таким чином, що два ребра довжиною a паралельні зарядженій нитці, а два інші ребра b перпендикулярні до неї. Відстань по нормалі між центром квадрату та ниткою дорівнює b . Обчислити потік вектора напруженості поля нитки крізь поверхню прямокутника.

№ 224. Нескінчена пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною заряду χ . Вона розташована в центрі діелектричного циліндру радіуса R_0 , який характеризується

діелектричною проникливістю ϵ . Зовні цього циліндру - вакуум. Визначити поверхневу густину зарядів на границі діелектрика.

№ 225. Нескінченна площина $x = 0$ заряджена з густиною, що змінюється за періодичним законом $\sigma = \sigma_0 \sin(ay)$, де σ_0, a – сталі, $\{y, z\} \in (-\infty, +\infty)$. Знайти потенціал $\varphi(\vec{r})$ цієї системи зарядів.

№ 226. Нескінченна площина $x = 0$ заряджена з густиною, що змінюється за періодичним законом $\sigma = \sigma_0 \cos(ay)\cos(bz)$, де σ_0, a, b – сталі, $\{y, z\} \in (-\infty, +\infty)$. Знайти потенціал $\varphi(\vec{r})$ цієї системи зарядів.

№ 227. Електричний заряд розподілено в просторі за періодичним законом

$$\rho = \rho_0 \sin(ax)\cos(by)\sin(cz), \{x, y, z\} \in (-\infty, +\infty)$$

(нескінченна тривимірна просторова ґратка). Знайти потенціал електростатичного поля, що утворюється цією ґраткою.

№ 228. Нескінченно тонкий плоский лист діелектричного матеріалу має розміри $L_x \rightarrow \infty, L_y \rightarrow \infty$. Його розділили на дві половини щілиною завширшки d_0 . Поверхня листа рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ_0 . Знайти напруженість електричного поля такої системи на великих відстанях від щілини з точністю до членів другого порядку по малому параметру $\alpha = \frac{d_0}{|\vec{r}|} \ll 1$.

№ 229. Куля радіусу r_0 заряджена сферично-симетричним чином з об'ємною густиною $\rho = \beta r^3$. Знайти потенціал та енергію електростатичного поля, що створюється такою кулею.

№ 230. Простір між двома концентричними сферами радіусів R_0 та $R_1 > R_0$ заряджений з об'ємною густиною $\rho = bR^{-2}$. Знайти енергію електростатичного поля.

№ 231. Знайти енергію електростатичного поля сфери радіуса R_0 , по об'єму якої рівномірно розподілено заряд Q .

№ 232. Об'ємна густина заряду у середині кулі радіуса R_0 задана таким чином: $\rho(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$, де \vec{a} – сталий вектор, а \vec{r} – радіус-вектор, проведений із центра кулі. Знайти напруженість електричного поля всередині та зовні кулі, а також енергію електростатичного поля.

№ 233. Напруженість електричного поля має таку просторову залежність: $\vec{E} = \frac{l_0 \vec{r}}{|\vec{r}|^3} (1 + b|\vec{r}|) \exp(-b|\vec{r}|)$. Визначити розподіл об'ємної густини заряду, що створює таке поле, і електростатичну енергію цього поля.

№ 234. Об'ємна густина заряду електронної хмари атому водню в основному стані має таку просторову залежність: $\rho(\vec{r}) = \frac{e_0}{\pi a_0^3} \exp(-2r/a_0)$. Знайти поле та енергію взаємодії електронної хмари в з ядром.

№ 235. У центрі діелектричної сфери радіуса R_0 знаходиться точковий заряд Q_0 . Знайти поверхневу густину зарядів σ на поверхні сфери, якщо діелектрична проникність сфери задається таким розподілом: $\varepsilon(r) = 1 + (\varepsilon_0 - 1) \frac{a^2}{a^2 + r^2}$.

№ 236. Плоский конденсатор заповнений на одну чверть діелектриком з $\varepsilon = \varepsilon_0$, а інша частина конденсатора порожня. Площина обкладинок – S_0 , відстань між обкладинками – d . Нехтуючи крайовими ефектами знайти ємність C такого конденсатора.

№ 237. Плоский конденсатор заповнений діелектриком з $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \left(\frac{x+a}{a} \right)$, де a – відстань між обкладинками. Координата x вимірюється від однієї обкладки до іншої по нормалі. Площина обкладинок - S_0 . Нехтуючи крайовими ефектами знайти ємність C такого конденсатора.

№ 238. Знайти ємність циліндричного конденсатора з радіусами обкладинок R_1 і R_2 ($R_1 < R_2$) та діелектричною проникливістю ε . Довжина конденсатора L . Граничними ефектами знехтувати.

№ 239. Нехтуючи крайовими ефектами знайти ємність C циліндричного конденсатора з радіусами обкладинок R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$), якщо всередині конденсатора знаходиться діелектрик з таким розподілом діелектричної проникності: $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \left(\frac{R_1}{R} \right) \left(1 + \frac{R_2}{R} \right)$. Довжина конденсатора L .

№ 240. Сферичний конденсатор з радіусами обкладинок a та b ($a < b$) заповнений діелектриком із змінною діелектричною проникністю: $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \left(\frac{a^2}{a^2 + r^2} \right)^2$, де ε_0 – константа. Знайти ємність C такого конденсатора.

№ 241. Знайти ємність сферичного конденсатора із радіусами обкладинок R_1 і R_2 . Між обкладинками знаходиться діелектрик з проникністю ε , що заповнює половину внутрішнього простору (як зображено на малюнку).

№ 242. Сферичний конденсатор з радіусами обкладинок a та b ($b > a$) заповнений діелектриком $\epsilon(|\vec{r}|) = \epsilon_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2$. Знайти ємність цього конденсатора.

№ 243. Дводротова лінія складається з циліндричних провідників радіусів a і b , які знаходяться на відстані $D \gg a, b$ один від одного. Знайти ємність одиниці довжини такої лінії.

№ 244. Довгий циліндричний дріт діаметром d_0 розташовано паралельно до нескінченної металевої площини. Відстань від дроту до площини $H \gg d_0$. Знайти погонну ємність (тобто ємність одиниці довжини) такої системи.

№ 245. Нескінчена металева пластина зігнута під прямим кутом вздовж деякої прямої (що нанесена на поверхню пластини). На бісектрисі цього кута на відстані h від кожної із плоских сторін зігнутої пластини розташований металевий циліндричний дріт з діаметром $d_0 \ll h$. Знайти погонну ємність такої системи.

№ 246. На відстані a від заземленого металевого нескінченного циліндра радіуса b паралельно його осі протягнуто нескінчену тонку заряджену нитку з лінійною густиною заряду χ_0 . Знайти потенціал поля в просторі поза циліндром.

№ 247. На відстані h від металевої площини знаходиться електричний диполь з дипольним моментом \vec{d} . Диполь нахилено під кутом θ до поверхні. Знайти обертальний момент \vec{M} , що прикладений до диполю.

№ 248. У провіднику знаходиться сферична порожнина радіуса R_0 . На відстані $a < R_0$ від центра порожнини знаходиться точковий заряд q . Знайти поле \vec{E} у порожнині.

№ 249. Всередині діелектричної кулі радіуса R_0 існує кулеподібна порожнина радіуса a , зміщена від центру на вектор \vec{b} . Діелектрична стала матеріалу кулі ϵ_0 . Вся куля (за винятком порожнини) заряджена із сталою об'ємною густиною заряду ρ . Знайти поле всередині цієї порожнини.

№ 250. Неоднорідна діелектрична куля радіуса a виготовлена з діелектрика з діелектричною проникністю $\epsilon(r) = 1 + br^2$. У центрі кулі знаходиться точковий заряд q . Знайти поле всередині та поза кулею, а також величину зв'язаного заряду на поверхні кулі.

§3. Магнетостатика. Теоретичні основи.

Магнітне поле $\vec{H}(\vec{r})$ лінійного струму J визначається *законом Біо-Савара-Лапласа* (Bio-Savare-Laplas):

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{J [d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{c |\vec{r} - \vec{r}'|^3} . \quad (3.1)$$

Тут \vec{r} і \vec{r}' – радіуси-вектори точки спостереження і точки розташування елемента струму $J d\vec{l}$. Для магнітного поля у вакуумі справедливий *принцип суперпозиції*:

повне магнітне поле дорівнює сумі полів, створених кожним елементом струму окремо.

При цьому

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{J}{c} \int_V \frac{[d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} . \quad (3.2)$$

У магнітному полі на елемент $d\vec{l}$ контуру, по якому тече струм J , діє сила

$$d\vec{F} = \frac{J}{c} [d\vec{l} \times \vec{H}] . \quad (3.3)$$

Напруженість сталого магнітного поля задовольняє диференціальним рівнянням (частковий випадок рівнянь Максвела):

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} , \quad (3.4)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (3.5)$$

З (3.4), (3.5) випливають інтегральні співвідношення

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I , \quad (3.6)$$

$$\int_S \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (3.7)$$

Тут I – алгебраїчна сума струмів, охоплених замкнутим контуром L . У загальному випадку струм I складається з об'ємних, поверхневих і лінійних струмів, що пронизують поверхню S , натягнуту на контур інтегрування L .

Магнітні поля у вакуумі задовольняють граничній умові:

$$[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = \frac{4\pi}{c} \vec{i} . \quad (3.8)$$

Індекси 1 і 2 визначають напруженість магнітного поля в областях, що лежать по різні сторони границі поділу. Вектор \vec{n} нормалі цієї поверхні спрямований з першої області в другу; \vec{i} – поверхнева густина струму на границі поділу двох середовищ. Проектуючи (3.8) на відповідні осі і пам'ятаючи, що поверхневий струм \vec{i} тече тільки по границі поділу, неважко переписати (3.8) в еквівалентному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} H_{2n} - H_{1n} &= 0, \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} &= \frac{4\pi}{c} i_\sigma . \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Вище використано позначення: $H_n = (\vec{H} \vec{n})$ – нормальний компонент, $H_\tau = (\vec{H} \vec{\tau})$ – тангенціальний компонент напруженості магнітного поля, $i_n = (\vec{i} \vec{\sigma})$. Одиничні вектори $\vec{n}, \vec{\tau}$ й $\vec{\sigma}$ утворюють правогвинтову трійку, причому $[\vec{n} \times \vec{\tau}] = \vec{\sigma}$.

Магнітне поле \vec{H} визначається векторним потенціалом \vec{A}

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} . \quad (3.10)$$

Останній вводиться неоднозначно, тому що два потенціали \vec{A} і \vec{A}'

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f \quad (3.11)$$

(де $f = f(\vec{r})$ – довільна скалярна функція координат) породжують однакові магнітні поля.

В задачах магнетостатики на векторний потенціал часто накладають додаткову умову, що зветься **статичним калібруванням Лоренца**

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 . \quad (3.12)$$

У цьому калібруванні справедливе **рівняння Пуассона** для векторного потенціалу статичного поля:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} . \quad (3.13)$$

Граничні умови для векторного потенціалу :

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}_1 &= \vec{A}_2 , \\ \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial \vec{n}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{i} . \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Для випадку об'ємних струмів векторний потенціал і напруженість магнітного поля можна записати у вигляді інтегралів

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (3.15)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} . \quad (3.16)$$

На великих відстанях r від області V струму векторний потенціал і напруженість магнітного поля можуть бути знайдені по наближених формулах:

$$\vec{A} \cong \frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} , \quad (3.17)$$

$$\vec{H} \cong \frac{3(\vec{\mu} \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} . \quad (3.18)$$

Тут $\vec{\mu}$ – питомий *магнітний момент* струму. У випадку об'ємних струмів

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r} \times \vec{j}] dV . \quad (3.19)$$

У випадку лінійних струмів

$$\vec{\mu} = \frac{J\vec{S}}{c} , \quad (3.20)$$

де \vec{S} – орієнтована плоска поверхня, вздовж контуру якої тече струм. Напрямок вектора \vec{S} зв'язаний з напрямком струму J правилом правого гвинта.

Енергія магнітного поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H})^2 dV \quad (3.21)$$

може бути перетворена до еквівалентного вигляду:

$$W = \frac{1}{2c} \int (\vec{j} \vec{A}) dV . \quad (3.22)$$

Магнітна енергія взаємодії об'ємних струмів \vec{j}_1 і \vec{j}_2 визначається інтегралом

$$W = \frac{1}{c^2} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\vec{j}_1(\vec{r}_1) \vec{j}_2(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dV_1 dV_2 , \quad (3.23)$$

де V_1, V_2 – об'єми існування відповідних струмів. На струм у зовнішньому магнітному полі діє сила

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_V [\vec{j} \times \vec{H}] dV , \quad (3.24)$$

а магнітна енергія W_1 взаємодії цього струму з зовнішнім магнітним полем відрізняється від (3.22) тільки числовим множником:

$$W_1 = \frac{1}{c} \int_V (\vec{j}_1 \vec{A}) dV . \quad (3.25)$$

Якщо напруженість \vec{H} зовнішнього магнітного поля постійна в області простору, де $\mu \neq 0$, то магнітна енергія W_1 взаємодії магнетиків із зовнішнім полем визначається у такий спосіб:

$$U = -(\vec{\mu} \vec{H}). \quad (3.26)$$

В магнетодипольному наближенні сила \vec{F} і момент сил \vec{N} , прикладених до тіла, знаходяться за законом

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= -grad U, \\ N &= [\vec{\mu} \times \vec{H}] \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Як видно, формули (3.27) аналогічні відповідним формулам (2.30) електростатики із заміною: $\vec{d} \rightarrow \vec{\mu}$, $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$.

§3.1 Магнетостатика. Умови задач.

№300 Дротяне кільце має радіус R_0 . По ньому тече струм I_0 . Знайти вектор-потенціал $\vec{A}(0,0,z)$ на осі цього кільця.

№301 Дротяне кільце має радіус R_0 . По ньому тече струм I_0 . Знайти магнітне поле $\vec{H}(0,0,z)$ на осі цього кільця.

№302 По металевому циліндру радіуса R_0 тече струм I_0 , який рівномірно розподілено по поперечному перерізу. Знайти магнітне поле всередині циліндра і поза ним.

№303 Циліндрична котушка має радіус R_0 та довжину L . На неї намотано дріт із густиною N витків на 1 см. Сила струму в котушці - I_0 . Знайти напруженість магнітного поля на осі котушки.

№304 Металева труба має внутрішній радіус R_1 і зовнішній R_2 ($R_1 < R_2$). По трубі тече струм I_0 . Він однорідно розподілений по поперечному перерізу труби і паралельний осі системи. Знайти напруженість \vec{H} магнітного поля в середині труби і зовні.

№305 Нескінчена в двох вимірах пластина має товщину h . Всередині пластини паралельно її поверхні тече однорідний струм з густиною \vec{j} . Знайти напруженість \vec{H} магнітного поля всередині і зовні пластини.

№306 Два нескінченно тонких плоских листи розташовані на відстані h паралельно один одному. По цих листах течуть струми у взаємопротилежних напрямках. Абсолютні значення густини двох струмів однакові і дорівнюють $|i_0|$. Знайти напруженість \vec{H} магнітного поля як між пластинами, так і в зовнішній частині простору.

№307 Два нескінченно тонких плоских листи розташовані на відстані h паралельно один одному. По цих листах течуть струми в одному напрямку. Абсолютні значення густини двох струмів однакові і рівні $|i_0|$. Знайти напруженість \vec{H} магнітного поля як між пластинами, так і в зовнішній частині простору.

№308 У сферичних координатах компоненти векторного потенціалу мають вигляд

$$A_r = 0, \quad A_\theta = 0,$$

$$A_\varphi = a \left[(5R_0^2 - 3r^2) \theta_k(R_0 - r) + \frac{2R_0^5}{r^2} \theta_k(r - R_0) \right] \sin \theta,$$

де a і R_0 – константи, а $\theta_k(x)$ – функція сходимки ($\theta_k(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta_k(x) = 0$ при $x < 0$). Знайти розподіл струму, що створює цей потенціал.

№309 У циліндричних координатах компоненти векторного потенціалу мають вигляд

$$A_\varphi = ar \left(2R_0^2 - r^2 \right) \theta_k(R_0 - r) + \frac{aR^4}{r} \theta_k(r - R_0),$$

$$A_R = 0, \quad A_Z = 0$$

де a і R_0 – константи, а $\theta_k(x)$ – функція сходимки ($\theta_k(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta_k(x) = 0$ при $x < 0$). Знайти розподіл струму, що створює цей потенціал.

№310 У сферичних координатах компоненти векторного потенціалу мають вигляд

$$A_r = 0, \quad A_\theta = 0, \quad A_\varphi = b \left[r \cdot \theta_k(R_0 - r) + \frac{R_0^3}{r^2} \cdot \theta_k(r - R_0) \right] \sin \theta,$$

де a і R_0 – константи, а $\theta_k(x)$ – функція сходимки ($\theta_k(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta_k(x) = 0$ при $x < 0$). Знайти розподіл струму, що створює цей потенціал.

№311 У середині нескінченного циліндра радіуса R_0 паралельно його осі тече струм з об'ємною густиною $j = j(|r|)$, де $|r|$ – відстань від осі циліндра. Знайти магнітне поле і векторний потенціал усередині і зовні циліндра.

№312 По поверхні нескінченного циліндра радіуса R_0 паралельно його осі покладено N дуже тонких провідників поруч один з одним. Сусідні провідники ізольовані між собою. Положення n -того провідника визначається кутом $\varphi_n = 2\pi n/N$, ($0 \leq n \leq N$). По n -тому провіднику тече струм $i_n = (I_0/N)\cos(m\varphi_n)$, де $m \geq 1$ – ціле число. Знайти векторний потенціал \vec{A} і напруженість \vec{H} магнітного поля в довільній точці простору, якщо $N \rightarrow \infty$, а товщиною провідників можна знехтувати.

№313 Вздовж нескінченної циліндричної поверхні радіуса R_0 тече струм I_0 . Знайти векторний потенціал \vec{A} і напруженість \vec{H} магнітного поля в довільній точці простору, якщо товщиною цієї поверхні можна знехтувати. Порівняти з результатом попередньої задачі при $m = 0$.

№314 Об'ємна густина струму в циліндричних координатах має вигляд

$$\vec{j} = \vec{j}_0 \left[\left(\frac{r}{R_0} \right)^m \theta(R_0 - r) + \left(\frac{R_0}{r} \right)^m \theta(r - R_0) \right] \cos(m\varphi),$$

де $\vec{j}_0 = \vec{e}_z j_0$, R_0, j_0 – константи задачі, а $m \geq 1$ – ціле число. Знайти векторний потенціал \vec{A} і напруженість \vec{H} магнітного поля в довільній точці простору.

№315 Усередині нескінченно довгого циліндра радіуса R паралельно осі Z тече струм з об'ємною густиною $j_z = j_0 r^2 \cos(3\varphi)$. Вісь Z збігається з віссю циліндра, r – циліндрична координата, φ – полярний кут. Знайти векторний потенціал \vec{A} і напруженість магнітного поля усередині і зовні циліндра.

№316 Щільність струму міняється в просторі $-\infty < \{x, y, z\} < +\infty$ по періодичному закону $\vec{j} = \vec{j}_0 \cos(\vec{k}\vec{r})$, де постійні вектори \vec{j}_0 й \vec{k} ортогональні один до одного. Знайти напруженість \vec{H} магнітного поля в довільній точці простору.

№317 Пластина, виготовлена з проводячого матеріалу, має товщину L в напрямку осі Z і нескінченні розміри вздовж осей X, Y . Усередині пластини тече струм з об'ємною щільністю $j_z = j_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y)$. Знайти векторний потенціал \vec{A} магнітного поля в довільній точці простору.

№318 У площині $Z=0$ знаходиться нескінченно тонка провідна плівка. Уздовж неї тече струм із щільністю $i_x = i_0 \cos(k_y y)$. Знайти векторний потенціал \vec{A} магнітного поля в довільній точці простору, що оточує плівку, якщо остання покриває нескінченну область $-\infty < \{x, y\} < +\infty$.

№319 У сферичній системі координат магнітне поле має такі компоненти

$$H_r = H_0 \left(1 - \frac{3r^2}{5R_0^2} \right) \cos \theta, \quad H_\theta = H_0 \left(\frac{6r^2}{5R_0^2} - 1 \right) \sin \theta, \quad H_\varphi = 0 \quad \text{при} \\ r < R_0$$

$$H_r = \frac{2H_0}{5} \left(\frac{R_0}{r} \right)^3 \cos \theta, \quad H_\theta = \frac{H_0}{5} \left(\frac{R_0}{r} \right)^3 \sin \theta, \quad H_\varphi = 0 \quad \text{при}$$

$r > R_0$,

де R_0 – радіус циліндра, H_0 – константа задачі. Знайти для цього поля векторний потенціал, що задовольняє додатковій умові $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

№320 При орбітальному русі електрона в атомі водню (який знаходиться в збудженому стані) виникає електричний струм, що може бути представлений (у сферичній системі координат) у вигляді

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\varphi = j_0 \left(\frac{r}{a_0} \right)^3 e^{-\frac{2r}{3a_0}} \sin^3 \theta, \quad j_0 = \frac{1}{2 \cdot 3^8} \frac{eh}{\pi m a_0^4},$$

де a_0 – борівський радіус, а r – відстань до протона. Яка напруженість \vec{H} магнітного поля створюється при цьому в місці перебування протона?

№321 При орбітальному русі електрона в атомі водню (який знаходиться в збудженому стані) виникає електричний струм, що може бути представлений у вигляді (у сферичній системі координат)

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\varphi = j_0 \left(\frac{r}{a_0} \right) e^{-\frac{r}{a_0}} \sin \theta, \quad j_0 = \frac{1}{2^6} \frac{eh}{\pi m a_0^4}.$$

Протон має внутрішній магнітний момент μ , спрямований вздовж осі Z . Знайти енергію W взаємодії магнітного моменту протона з орбітальним струмом.

№322 Спін електрона створює в просторі таке магнітне поле $\vec{H}_s(\vec{r})$, яке в атомі водню еквівалентно наявності формально введеної щільності «спінового струму» $\vec{j} = c \operatorname{rot} [\vec{\mu}_0 F(r)]$, де

$F(r) = \frac{1}{\pi a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$. Тут a_0 – борівський радіус, r – відстань до протона, а $\vec{\mu}_0$ – внутрішній магнітний момент електрона. Знайти напруженість магнітного поля $\vec{H}_s(0)$ в центрі атома водню.

№323 Для попередньої задачі знайти енергію W взаємодії магнітного моменту протона $\vec{\mu}_p$ зі знайденим вище магнітним полем¹.

№324 Оскільки електрон в атомі водню “розмазаний” в просторі, то його внутрішній магнітний момент (спінового походження) теж можна вважати неперервно розподіленим у просторі. При цьому щільність магнітного моменту описується функцією $\vec{\mu}_0 F(r)$, де $\vec{\mu}_0$ – внутрішній магнітний момент електрона, а $F(r)$ – густина електронної хмари на відстані r від протона. Показати, що «розмазаний» власний магнітний момент електрона створює в навколишньому просторі магнітне поле еквівалентне полю, що створюється струмом провідності $\vec{j} = c \operatorname{rot} [\vec{\mu}_0 F(r)]$.

№325 Два циліндричних провідники однакового радіуса R_0 розташовані паралельно один одному. Відстань між їхніми осями дорівнює $L > R_0$. По одному з провідників тече струм J_0 (однорідно розподілений по перетину), а по іншому – антипаралельний струм тієї ж величини. Дослідити просторову залежність напруженості магнітного поля на великих відстанях від цих циліндрів.

№326 Нескінченний стрижень виготовлений з діелектричного матеріалу і має в перетині форму правильного трикутника зі

¹ Це оцінка спін-спінової взаємодії електрона з протоном в атомі водню.

стороною рівною a . Бічна поверхня цього стрижня покрита тонкою плівкою провідного матеріалу. По цій провідній поверхні уздовж осі стрижня тече струм з поверхневою густиною J . Знайти напруженість магнітного поля на ребрі стрижня й у центрі грані.

№327 Нескінченний стрижень виготовлений з діелектричного матеріалу і має в перетині форму правильного квадрата зі стороною рівною a . Бічна поверхня цього стрижня покрита тонкою плівкою провідного матеріалу. По цій провідній поверхні уздовж осі стрижня тече струм з поверхневою густиною J . Знайти напруженість магнітного поля на осі стрижня і на одному з ребер.

№328 Нескінченний стрижень виготовлений з діелектричного матеріалу і має в перетині форму правильного квадрата зі стороною рівною a . Дві бічні поверхні цього стрижня, що граничать одна з одною, покриті тонкою плівкою провідного матеріалу, а по двох інших бічних поверхнях струм проходити не може. По провідних поверхнях уздовж осі стрижня тече струм з поверхневою щільністю J . Знайти напруженість магнітного поля \vec{H} в точках бісектриси між провідними гранями на відстані $r \ll a$ від його вершини.

№329 Нескінченно тонкий диск радіуса R_0 рівномірно заряджений з поверхневою густиною σ . Він обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω . Знайти напруженість \vec{H} магнітного поля в довільних точках осі обертання, а також магнітний момент M такого диска.

№330 Нескінченний циліндр радіуса R , рівномірно заряджений з об'ємною густиною ρ_0 . Він обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω . Знайти векторний потенціал і напруженість магнітного поля усередині і зовні циліндра.

№331 Нескінченна циліндрична поверхня радіуса R рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ . Вона обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω і одночасно рухається зі швидкістю v уздовж тієї ж осі. Знайти векторний

потенціал і напруженість магнітного поля в довільній точці простору.

№332 Куля радіуса R рівномірно заряджена з об'ємною щільністю ρ . Вона обертається навколо осі, що проходить через її центр, з постійною кутовою швидкістю ω . Знайти векторний потенціал і напруженість магнітного поля в довільній точці простору. Знайти магнітний момент кулі.

№333 Нескінченно тонка сферична поверхня радіуса R рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ . Вона обертається навколо осі, що проходить через її центр, з постійною кутовою швидкістю ω . Знайти векторний потенціал і напруженість магнітного поля в довільній точці простору. Знайти також магнітний момент обертової сфери.

№334 Заряд Q рівномірно розподілений по об'єму еліпсоїда обертання з півсями a і b ($a < b$). Еліпсоїд обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо самої довгої з осей симетрії. У центрі еліпсоїда знаходиться маленька порожнина, в якій розміщено точкову частинку з магнітним моментом \vec{M} . Визначити момент сил \vec{N} , що діє на частинку.

№335 Заряд розподілений у просторі за законом

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi a^2 b} \delta\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right),$$

(a , b – сталі) і обертається навколо осі Z з постійною кутовою швидкістю ω . Знайти напруженість магнітного поля на початку координат.

№336 Знайти енергію W магнітного поля однорідно зарядженої кулі радіуса R , що обертається навколо свого діаметра з постійною кутовою швидкістю ω . Повний заряд кулі Q . Виразити енергію W через магнітний момент \vec{M} кулі, що обертається.

№337 Знайти енергію W магнітного поля однорідно зарядженої нескінченно тонкої сферичної поверхні радіуса R , що обертається навколо свого діаметра з постійною кутовою швидкістю ω . Повний заряд сфери Q . Виразити енергію W через магнітний момент \vec{M} обертової сфери.

№338 Однорідно заряджений по об'єму циліндр радіуса R обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω . Знайти енергію W магнітного поля, що припадає на одиницю довжини цього циліндра. Заряд на одиницю довжини циліндра дорівнює Q . Виразити енергію W через магнітний момент \vec{M} одиниці довжини обертового циліндра.

№339 Однорідно заряджена нескінченно тонка циліндрична поверхня радіуса R обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω . Знайти енергію W магнітного поля, що припадає на одиницю довжини цієї поверхні. Заряд на одиницю довжини циліндра дорівнює Q . Виразити енергію W через магнітний момент \vec{M} одиниці довжини циліндра, що обертається.

№340 Обчислити коефіцієнт самоіндукції одиниці довжини циліндричного кабелю, який складається з двох коаксіальних трубок з радіусами R_1 і R_2 .

№341 Розглядається довгий соленоїд радіуса a з густиною витків n на одиницю довжини. Біля центру соленоїда поверх його обмотки намотано коротку котушку з N витків. Коротка котушка електрично ізольована від обмотки соленоїда. Знайти коефіцієнт взаємної індукції цих котушок.

№342 Знайти коефіцієнт самоіндукції одиниці довжини прямого колового дроту діаметра a , що виготовлено із матеріалу з магнітною проникливістю μ .

№343 Вздовж металевого дроту радіуса a тече однорідно розподілений струм I_0 . Знайти тиск магнітного поля на поверхню цього циліндра.

№344 Вздовж тонкого металевого циліндра радіуса a тече однорідно розподілений по поверхні струм I_0 . Знайти тиск магнітного поля на цей циліндр.

№345 Циліндр, що проводить, виготовлено із матеріалу із магнітною проникливістю μ . Він має діаметр a , по ньому тече повний струм I . Знайти магнітну енергію, що припадає на одиницю довжини циліндра.

№346 Квадратна рамка зі стороною a знаходиться в одній площині із прямолінійним струмом J і орієнтована так, що сторони рамки або паралельні, або перпендикулярні струму. На якій відстані r від струму розташована найближча сторона рамки, якщо потік магнітного поля через поверхню рамки дорівнює Φ_0 ?

№347 Прямолінійний струм J_1 знаходиться в одній площині зі струмом J_2 , що тече по квадратній рамці зі стороною a . Рамка орієнтована так, що сторони рамки або паралельні, або перпендикулярні струму J_1 . Найближча сторона рамки розташована на відстані r від струму J_1 і має однаковий з ним напрямок струму. Чому дорівнює сила \vec{F} , прикладена до рамки?

§ 4. Електромагнітні властивості речовин. Теоретичні основи.

В динамічному випадку треба мати на увазі, що внаслідок інерції руху після “включення” поля \vec{E} потрібен ще час, щоб іони (атоми) речовини змінили свої позиції. Тому поляризація \vec{P} буде формуватися із запізненням. І навпаки, коли поле \vec{E} “виключається”, індукція \vec{D} (поляризація) може існувати деякий час, бо частинки ще будуть рухатись далі по інерції. При цьому

$$P(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-t')E(t')dt'. \quad (4.1)$$

або

$$P(t) = \int_0^{\infty} \chi(\tau)E(t-\tau)d\tau. \quad (4.2)$$

Останні формули виражають *принцип причинності*. Головною перевагою форми запису (4.2) є те, що границі області інтегрування тепер є фіксованими. Для анізотропної речовини замість (4.2) маємо

$$P_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{ij}(\tau)E_j(t-\tau)d\tau. \quad (4.3)$$

Для того, щоб зробити границі інтегрування симетричними, в (4.3) тензор $\chi_{ij}(\tau)$ було доозначено

$$\chi_{ij}(\tau \geq 0) \neq 0, \quad \chi_{ij}(\tau < 0) = 0. \quad (4.4)$$

Тензорна функція відгуку повинна задовольняти таким умовам:

$$\chi_{ij}(\tau = 0) = 0, \quad \chi_{ij}(\tau \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.5)$$

Перша із умов (4.5) є наслідком інерційності речовини (зміщення зарядів запізнюється по відношенню до імпульсу сили). Друга умова (4.5) є математичним наслідком гіпотези: “нескінченно довгої пам’яті в природі не існує”.

За означенням

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + 4\pi \vec{P}(t), \quad (4.6)$$

звідки випливає

$$D_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{ij}(\tau) E_j(t - \tau) d\tau. \quad (4.7)$$

Тут введено тензор діелектричної проникливості

$$\varepsilon_{ij}(\tau) = \delta_{ij} \delta(\tau) + 4\pi \chi_{ij}(\tau). \quad (4.8)$$

Аналогічно розглядаються і нелінійні явища. Наприклад, ефекти другого порядку описуються нелінійною поляризацією:

$$P_i^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \chi_{ijk}(\tau_1, \tau_2) E_j(t - \tau_1) E_k(t - \tau_2), \quad (4.9)$$

де введено **нелінійну поляризованість другого порядку** $\chi_{ijk}(\tau_1, \tau_2)$. Як наслідок принципу причинності для функцій відгуку другого порядку існують такі умови:

$$\left. \begin{aligned} \chi_{ijk}(\tau_1 < 0, \tau_2) &= 0 \\ \chi_{ijk}(\tau_1, \tau_2 < 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Цікавлячись частотною залежністю польових величин, треба представляти довільну електромагнітну хвилю у вигляді інтегралів Фур'є.

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \vec{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{D}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.11)$$

При цьому в лінійному наближенні існує зв'язок

$$\vec{D}(\omega) = \hat{\varepsilon}(\omega) \vec{E}(\omega), \quad (4.12)$$

де

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varepsilon}(\tau) e^{+i\omega\tau} d\tau, \quad (\varepsilon(\tau \geq 0) \neq 0, \varepsilon(\tau < 0) = 0). \quad (4.13)$$

В межах моделі гармонійних осциляторів діелектрична проникність має таку частотну залежність

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi N \sum_i \frac{f_i \omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\gamma_i \omega}, \quad (4.14)$$

де N , f_i , ω_i , γ_i – константи системи. Для пустого простору (вакууму)

$$\varepsilon_{ij}^{vak}(\tau) = \delta_{ij} \delta(\tau), \quad \varepsilon_{ij}^{vak}(\omega) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{+i\omega\tau} d\tau = \delta_{ij}. \quad (4.15)$$

Якщо $\varepsilon(\omega)$ – безрозмірна величина, то функція відгуку $\varepsilon(\tau)$ має розмірність частоти: $[\varepsilon(\tau)] = T^{-1}$.

Для поляризації другого порядку:

$$P_i^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 \chi_{ijk}(\tau_1 \tau_2) E_j(t - \tau_1) E_k(t - \tau_2), \quad (4.16.a)$$

$$P_i^{(2)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \chi_{ijk}(\omega_1, \omega - \omega_1) E_j(\omega_1) E_k(\omega - \omega_1). \quad (4.16.b)$$

Вище використовуються позначення:

$$\chi_{ijk}(\omega_1 \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 \chi_{ijk}(\tau_1 \tau_2) e^{i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} \quad (4.17)$$

Бігармонійним називається таке поле:

$$\vec{E}(\omega) = \vec{A}_1 \cos(\omega_{01} t) + \vec{A}_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_0). \quad (4.18)$$

В цьому випадку нелінійна поляризація $\vec{P}^{(2)}(\omega)$ відмінна від нуля на таких частотах

$$\omega = 2\omega_{01}, \quad \omega = 2\omega_{02}, \quad \omega = \omega_{01} + \omega_{02}, \quad \omega = \omega_{01} - \omega_{02}, \quad \omega = \omega_{02} - \omega_{01}. \quad (4.19)$$

В речовинах із нелінійністю другого порядку з'являються принципово нові ефекти: генерація **другої гармоніки**, генерація **сумарних частот** і генерація **різницевої частоти**.

Діелектрична проникливість має такі властивості. Якщо функція відгуку $\hat{\varepsilon}(\tau)$ – дійсна, то $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ – комплексна. При цьому

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'(-\omega), \quad \varepsilon''(\omega) = -\varepsilon''(-\omega) \quad (4.20)$$

дійсна частина діелектричної проникливості парна функція частоти, а уявна частина є непарною функцією. При $\omega = 0$ величина $\varepsilon'(\omega = 0)$ може бути довільною, але уявна частина діелектричної проникливості для статичних полів $\varepsilon''(\omega = 0) = 0$.

Коливання зв'язаних зарядів дають такий внесок у струм:

$$\vec{j}_{зв}(t) = \frac{\partial \vec{P}(t)}{\partial t}, \quad \vec{j}_{зв}(\omega) = -i\omega \vec{P}(\omega) \quad (4.21)$$

Вільні носії заряду обумовлюють струм провідності

$$\vec{j}_{провідн} = \sigma \vec{E}_0 \quad (4.22)$$

(\vec{E}_0 – стале поле). Розширюючи означення (4-22) на інші типи струмів (в тому числі – на поляризаційні струми) і використовуючи (4.21) можна ввести коефіцієнт високочастотної провідності $\sigma(\omega)$, що пов'язаний із уявною частиною діелектричної проникливості

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} \quad (4.23)$$

Загалом при розгляді низькочастотних явищ частіше вводять провідність σ , а в області високих частот – $\varepsilon''(\omega)$.

Для того, щоб ввести макроскопічні характеристики речовини (в тому числі – $\varepsilon(\omega)$) треба робити усереднення по фізично нескінченно малому об'ємі (ФНМО), лінійні розміри якого задовольняють умовам

$$a_0 \ll \Delta l \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (4.24)$$

Це накладає обмеження на верхню границю частот

$$\omega \ll \omega_{\text{верхн}} \sim \frac{2\pi c}{a_0}, \quad (4.25)$$

до якої можна використовувати рівняння Максвелла (a_0 – середня відстань між частинками речовини).

Що стосується магнітної сприйнятливості, то для того, щоб ввести μ треба зробити операцію усереднення за часом ΔT , більшим, ніж характерний період руху електронів в атомах, тобто

$$\Delta T \gg \frac{1}{\omega_{\text{хар}}} \quad (4.26)$$

Але при цьому само введення μ має сенс тільки на частотах $\omega \ll \omega_{\text{хар}} \ll \omega_{\text{верхн}}$. Звичайно, характерні частоти обертань електронів $\omega_{\text{хар}} \sim 10^{15} \text{ гц}$ знаходяться в оптичній області. Тому починаючи з оптичних частот і далі до ультрафіолету треба покладати $\mu(\omega) = 1$.

Виходячи із принципу причинності можна показати, що дійсна та уявна частини лінійної діелектричної проникливості $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ пов'язані між собою формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \\ \varepsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned} \quad (4.27)$$

(дисперсійні *співвідношення Крамерса-Кронига*). Символом $P \int$ тут позначено головне значення інтеграла. У випадку металів, де $\varepsilon(\omega)$ має полюс при $\omega = 0$, друга із формул (4.27) приймає вигляд

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (4.28)$$

Тут σ – статична провідність метала.

Для дійсної функції $\chi_{ijk}(\tau_1, \tau_2)$ із (4.17) впливає зв'язок між дійсною та уявною частинами $\hat{\chi}'$ і $\hat{\chi}''$ аналогічний тому, який має місце для лінійної сприйнятливості (аналог(2.27)).

Рух вектора намагніченості у ферромагнетику описується **рівнянням Ландау—Ліфшиця**

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma [\vec{M} \times \vec{H}] \quad , \quad \gamma = \frac{e_0}{mc}. \quad (4.29)$$

Тут \vec{M} – вектор намагніченості, \vec{H} – середнє магнітне поле.

Для того, щоб рівняння (4.29) враховувало втрати електромагнітної енергії в речовині, його треба доповнити дисипативним членом:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \left[\vec{M} \times \left(\vec{H} - p \frac{d\vec{M}}{dt} \right) \right], \quad (4.30)$$

де p – коефіцієнт втрат. Якщо втрати малі, а повне магнітне поле $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}(t)$ являє собою суму сталого поля \vec{H}_0 і змінного поля $\vec{h}(t)$, то рівняння (4.30) приймає більш простий вигляд:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma [\vec{M} \times \vec{H}] + \omega_r (\chi_0 \vec{H} - \vec{M}). \quad (|h| \ll |H_0|) \quad (4.31)$$

Тут $\chi_0 = M_0 / H_0$, $\omega_r = p\gamma^2 M_0^2 / \chi_0$, $M_0 = |\vec{M}|$ – намагніченість насичення. Рівняння Ландау-Ліфшиця у вигляді (4.31) звичайно використовується для рішення задач про ферромагнітний резонанс.

Можна показати, що для опису електромагнітного поля в речовині достатньо ввести, окрім напруженостей електричного та магнітного полів ще тільки один вектор індукції $\vec{D}'(r, t)$ (а не два, \vec{D} та \vec{B} , як звичайно):

$$\vec{D}'(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \vec{j}(\vec{r}, t') dt' . \quad (4.32)$$

Тут $\vec{j}(\vec{r}, t')$ — усереднена густина струму, що наводиться в речовині. Остання задовольняє рівнянню неперервності

$$\operatorname{div} \vec{j} + \partial \rho / \partial t = 0 , \quad (4.33)$$

де ρ — середня густина заряду в речовині.

§ 4.1. Електромагнітні властивості речовин. Умови задач.

№400 Функція відгуку $\chi(t)$, що визначає зв'язок між $\vec{D}(t)$ та $\vec{E}(t)$, має вигляд $\chi(t) = \chi_0 \exp[-t/\tau]$, де χ_0 і τ – константи. Знайти Фур'є-компоненту діелектричної проникливості $\varepsilon(\omega)$ на частоті ω .

№401 Часова функція відгуку $\chi(t)$ має вигляд $\chi(t) = \frac{a}{1+b^2t^2}$, де $-\infty < t < \infty$, $a > 0$. Знайти дійсну частину діелектричної проникливості $\varepsilon'(\omega)$.

№402 Часова функція відгуку $\chi(t)$ має вигляд $\chi(t) = \frac{a \cdot t}{1+b^2t^2} \theta(t)$, де $a > 0$, $b > 0$, а $\theta(t)$ – функція Хевісайда. Знайти дійсну частину діелектричної проникливості $\varepsilon'(\omega)$.

№403 Які компоненти тензора діелектричної проникливості будуть відмінні від нуля в кристалах, що мають вісь симетрії третього порядку C_3 і три площини симетрії σ_V ?

№404 Які компоненти тензора діелектричної проникливості будуть відмінні від нуля в кристалах, що мають² вісь симетрії четвертого порядку C_4 і чотири площини симетрії σ_V ?

² У всіх задачах, де задається симетрія, перелічено тільки основні елементи. При цьому розуміється, що існують ще інші елементи, необхідні для утворення групи (одичний елемент, обернені елементи, всі можливі добутки).

№405 Які компоненти тензора діелектричної проникливості будуть відмінні від нуля в кристалах, що мають вісь симетрії шостого порядку C_6 і шість площин симетрії σ_V ?

№406 Чи може існувати піроелектричний ефект в кристалах, де існує вісь симетрії четвертого порядку та перпендикулярна до неї площина симетрії?

№407 Знайти найпростіший вигляд тензора діелектричної проникливості в кристалах, де існують такі елементи симетрії: C_4^X, C_4^Y, C_4^Z .

№408 Одновимірний гармонічний осцилятор описується класичним рівнянням руху із потенційною енергією $U(x) = -k_0 x^2$. Маса осцилятора m , його заряд $-q$. Знайти для нього тензор лінійної поляризації.

№409 Одновимірний ангармонічний осцилятор описується класичним рівнянням руху із потенційною енергією $U(x) = -k_0 x^2 + bx^3$. Маса осцилятора m , його заряд $-q$. Знайти для нього тензор нелінійної поляризації другого порядку, що відповідає за генерацію другої гармоніки. Параметр “ b ” вважати малим.

№410 Одновимірний ангармонічний осцилятор описується класичним рівнянням руху із потенційною енергією $U(x) = -k_0 x^2 + gx^4$. Маса осцилятора m , його заряд $-q$. Знайти для нього тензор нелінійної поляризації третього порядку, що відповідає за генерацію третьої гармоніки. Параметр “ g ” вважати малим.

№411 Одновимірний ангармонічний осцилятор описується класичним рівнянням руху із потенційною енергією $U(x) = -k_0 x^2 + bx^3$. Маса осцилятора m , його заряд $-q$. На осцилятор діє зовнішнє електромагнітне поле $E_x = A_1 \exp(-i\omega_1 t) + A_2 \exp(-i\omega_2 t)$, $\omega_1 \neq \omega_2$. Знайти для нього тензор

нелінійної поляризації другого порядку, що відповідає за генерацію сумарної частоти $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Параметр “ b ” вважати малим.

№412 Одновимірний ангармонічний осцилятор описується класичним рівнянням руху із потенційною енергією $U(x) = -k_0x^2 + bx^3$. Маса осцилятора m , його заряд – q . На осцилятор діє зовнішнє електромагнітне поле $E_x = A_1 \exp(-i\omega_1 t) + A_2 \exp(-i\omega_2 t)$, $\omega_1 \neq \omega_2$. Знайти для нього тензор нелінійної поляризації другого порядку, що відповідає за генерацію різницевої частоти $\omega_4 = \omega_1 - \omega_2$. Параметр “ g ” вважати малим.

№413 Діелектрична речовина має такі елементи симетрії: а) вісь обертання C_4^Z , б) площини відбивання σ_V^X, σ_V^Y . Визначити, які компоненти тензору третього рангу, що відповідають за генерацію другої гармоніки, можуть бути відмінними від нуля?

№414 Діелектрична речовина має такі елементи симетрії: три осі обертання C_2^X, C_2^Y, C_2^Z (при цьому нема площин відбивання). Визначити, які компоненти тензору третього рангу, що відповідають за генерацію другої гармоніки, можуть бути відмінними від нуля?

№415 Система складається із двоатомних молекул типу $NaCl$, що не взаємодіють між собою і розташовані хаотично із середньою густиною N . Знаючи резонансну частоту Ω коливань окремих молекул, її силу осцилятора і вважаючи, що затухання коливань є повільним, знайти часову функцію відгуку такої системи.

№416 Розглянемо нейтральну плазму, що складається із електронів та іонів з однаковою концентрацією N . Знайти частотну залежність дійсної частини діелектричної проникливості плазми при умові, що втратами енергії (затуханням коливань) можна знехтувати

³У всіх задачах вважається, що рух електронів описується законами класичної механіки.

№417 Розглянемо нейтральну плазму, що складається із електронів та іонів з однаковою концентрацією N . Знайти питому провідність плазми при умові, що внеском іонів в провідність можна знехтувати. Втрати енергії під час руху електронів вважати пропорційними їх швидкості.

№418 Знайти часову функцію відгуку для плазми, що складається із частинок масою m і зарядом q . Густина частинок N . Втрати енергії вважати пропорційними швидкості частинок.

№419 Повністю іонізований нейтральний газ складається із N електронів та рівної кількості одозарядних іонів. Він знаходиться в сталому магнітному полі \vec{H}_0 . Знайти частотну залежність діелектричної проникливості газу з врахуванням руху як електронів, так і позитивних іонів. Вважати, що маса іонів M значно більша за масу електронів m , а ефективна «сила тертя», діюча на частинки, пропорційна їх швидкостям.

№420 Розглянемо нейтральну плазму, що складається із електронів (концентрація N) та рівного числа іонів. На плазму діють схрещені електричне і магнітне поля з напруженостями \vec{E}_0, \vec{H}_0 відповідно. Знайти в лінійному по $|H_0|$ наближенні зв'язок між густиною електричного струму \vec{j} і полем \vec{E}_0 . Знайти вигляд частотної залежності тензора електропровідності.

№421 Полярні молекули (с концентрацією N), що мають циліндричну симетрію при температурі T знаходяться в газоподібному стані. При відсутності зовнішнього поля кожна молекула має електричний дипольний момент \vec{d}_0 . На газ діє статне електричне поле \vec{E}_0 (що орієнтує молекули) і змінне поле $\vec{E}_1(t) = \vec{A}e^{-i\omega t}$. Діагональні компоненти тензору лінійної поляризованості молекули на частоті ω такі: $\chi_{11}(\omega) = \chi_{22}(\omega) \neq \chi_{33}(\omega)$

(в системі власних координат молекули). Вважаючи, що $|E_1| \ll |E_0|$, знайти тензор діелектричної проникливості цього газу на частоті ω .

№422 Композитний матеріал являє собою твердий полімер (діелектрик) з діелектричною проникливістю ε , в який хаотично вкраплено дріб. Останній може бути представлено у вигляді ідеально провідних металевих сфер радіуса R . Середнє число кульок дробу в одиниці об'єму дорівнює N . Нехтуючи відмінністю поля, діючого на кожен дробинку, від середнього поля, визначити електричну ε і магнітну μ проникливості такого композита.

№423 Показати, що коли в речовині не відбувається дисипації електромагнітної енергії, то тензор його поляризованості задовольняє умові симетрії $\chi_{ik} = \chi_{ki}$.

№424 Однорідний діелектрик знаходиться в постійному магнітному полі \vec{H}_0 . Властивості діелектрика можуть моделюватися сукупністю N гармонійних осциляторів із резонансною частотою ω_0 і силою осцилятора S_0 . Заряд осцилятора q , його ефективна маса m . Знайти залежність тензора діелектричної проникливості $\varepsilon_{ik}(\vec{H}_0, \omega)$ від величини магнітного поля. Дисипацією електромагнітної енергії можна знехтувати.

№425 Розріджений газ складається з N атомів, між якими практично нема взаємодії. Кожний із атомів еквівалентний гармонійному осцилятору із резонансною частотою ω_0 і силою осцилятора S_0 . Заряд осцилятора q , його ефективна маса m . Знайти тензор гирації \hat{g} цієї системи. Враховувати тільки коливання осциляторів (просторовими переміщеннями атомів можна знехтувати).

№426 Знайти дійсну частину діелектричної проникливості $\varepsilon'(\omega)$, якщо відома частотна залежність її уявної частини:

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{(\varepsilon_0 - 1)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad (0 < \omega < \infty)$$

(ε_0, τ – константи системи).

№427 Ідеальний газ складається із N атомів з масою m і зарядом q . Кожний атом має декілька резонансних частот в оптичній області спектра. Показати, що інтеграл $F_1 = \int_0^\infty \left[I m \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} \right) \right] \omega d\omega$ може бути виражений тільки через одну плазмову частоту $\omega_p = \sqrt{4\pi N q^2 / m}$.

№428 Ідеальний газ складається із N атомів з масою m і зарядом q . Кожний атом має декілька резонансних частот в оптичній області спектра. Показати, що інтеграл $F_2 = \int_0^\infty [I m \varepsilon(\omega)] \omega d\omega$ може бути виражений тільки через одну плазмову частоту $\omega_p = \sqrt{4\pi N e^2 / m}$.

№429 Феритова речовина намагнічена до насичення сильним постійним, однорідним полем \vec{H}_0 . В момент часу $t=0$ вектор намагніченості \vec{M} виведено із стану рівноваги і він має довільну просторову орієнтацію \vec{M}_0 . Як буде рухатися вектор намагніченості $\vec{M}(t)$ при $t > 0$? Втратами енергії під час руху і впливом розмірів системи можна знехтувати.

№430 Для попередньої задачі знайти закон руху вектора намагніченості з урахуванням втрат. Вважати, що кути відхилення

вектора \vec{M} від напрямку зовнішнього магнітного поля \vec{H}_0 малі і час релаксації τ задовольняє умові $\tau \gamma H_0 \gg 1$.

№431 Ферромагнітний матеріал розміщено між полюсами магніту, що створює стале магнітне поле напруженістю $\vec{H}_0 = \vec{e}_z H_0$. Одночасно на цей матеріал діє високочастотне електромагнітне поле із частотою ω і амплітудою \vec{h} (хвиля має лінійну поляризацію). Знайти частотну залежність тензора магнітної сприйнятливості речовини. Обмежитись лінійним наближенням по амплітуді високочастотного поля, вважаючи, що $|\vec{h}| \ll |\vec{H}_0|$ і нехтуючи процесами дисипації енергії.

№432 Ферромагнітний матеріал поміщено між полюсами магніту, що створює стале магнітне поле напруженістю $\vec{H}_0 = \vec{e}_z H_0$. Одночасно на цей матеріал діє поляризоване по колу високочастотне електромагнітне поле $\vec{h} = \vec{e}_x h_x + \vec{e}_y h_y$, де $h_x = h_0 \cos \omega t$, $h_y = h_0 \sin \omega t$. Знайти закон руху вектора намагніченості речовини $\vec{M}(t)$ при умові, що $|\vec{M}(t)| = M_0 = \text{const}$. Обмежитись лінійним наближенням по амплітуді високочастотного поля, вважаючи, що $|\vec{h}| \ll |\vec{H}_0|$ и знехтувати процесами дисипації енергії.

№433 В конденсаторі розміщено плоску кювету, зроблену із тонкого скла. Внутрішня відстань між стінками кювети d . Спочатку в об'ємі кювети створюється постійне однорідне електричне поле з напруженістю E_0 . Далі кювета заповнюється плазмою. Остання в

цілому електронейтральна. Середня (по всьому об'єму кювети) концентрація електронів плазми N_0 . Знайти а) просторовий перерозподіл концентрації електронів під дією прикладеного поля, і б) розподіл напруженості поля усередині плазми при умові, що зміну цих величин можна вважати малою ($|N(\vec{r}) - N_0| \ll N_0$, $|E(\vec{r}) - E_0| \ll E_0$). Для спрощення рішення в цій задачі рухом іонів можна знехтувати.

№434 Нейтральна плазма складається із іонів (заряд Ze , середня концентрація N_0) та електронів (заряд $-e$, середня концентрація n_0). Знайти розподіл густини заряду поблизу окремого іона, якщо температура плазми дорівнює T . Квантовими ефектами знехтувати. Вважати, що рух частинок може бути описаний як класичний, причому всі вони рухаються незалежно одна від одної.

№435 Мензурка являє собою скляний циліндр радіуса R_0 . До неї налито слабкий водний розчин повареної солі $NaCl$. Об'єм мензурки V , загальна кількість позитивних іонів N_0 дорівнює кількості негативних іонів. В середину мензурки опущено товстий металевий стрижень радіуса $R_1 = R_0 - \Delta R$, $\Delta R \ll R_0$, а з зовнішнього боку мензурка обгорнута тонким металевим електродом. Між останнім і центральним стрижнем прикладена різниця потенціалів U_0 . Знайти просторовий розподіл густини іонів в стаціонарному стані, якщо температура розчину T . Товщиною скляної стінки можна знехтувати.

№436 Виразити коефіцієнт заломлення n через ϵ' та ϵ'' .

№437 Виразити коефіцієнт поглинання α через ε' та ε'' .

№438 На плоску платівку товщиною l вздовж її нормалі до поверхні z падає плоска хвиля $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{-\alpha z} \cos(k_z z - \omega t)$. Вважаючи дійсну ε' та уявну ε'' частини діелектричної проникливості відомими, знайти енергію, що поглинається в платівці за одиницю часу. Покласти $\mu = 1$.

№439 Речовина характеризується діелектричною сталою ε_0 , що вдвічі більша ніж ε_∞ . Знайти групову швидкість електромагнітної хвилі на частоті, що вдвічі менша за резонансну частоту ω_0 (розглядається однорезонансний випадок).

№440 Відомо, що групову швидкість електромагнітної хвилі в деякому середовищі має таку частотну залежність:

$$V_{gp}(\omega) = \frac{c}{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}.$$

Знайти частотну залежність фазової швидкості, якщо $V_{фаз}(\omega_0) = c/2$.

№441 Є неоднорідна плоска монохроматична хвиля з хвильовим вектором $\vec{k} = \vec{k}' + \vec{k}''$ (при цьому вектор \vec{k}' не паралельний до \vec{k}''). Відомо, що вектор напруженості \vec{E} електричного поля не комплексна, а дійсна величина і його амплітуда також відома. Знайти орієнтацію \vec{E} відносно \vec{k} та напруженість магнітного поля \vec{H} , що пов'язане з \vec{E} .

№442 У вакуумі на безмежну плоску поверхню немагнітного провідника ($\varepsilon, \sigma = const, \mu = 1$) падає під кутом α плоска монохроматична хвиля, напрямок поляризації якої складає кут θ з

площиною падіння. Визначити інтенсивність та стан поляризації (плоскополяризована, циркулярно поляризована і т.д.), якщо інтенсивність хвилі, що падає I_0 .

§ 5. Розповсюдження електромагнітних хвиль. Теоретичні основи.

Напруженості електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів у загальному випадку задовольняють рівняння Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (5.4)$$

де ρ і \vec{j} – об'ємна густина вільних зарядів і струмів у просторі.

Точкові заряди q_i ($i=1,2,\dots,N$), що рухаються зі швидкостями \vec{v}_i , утворюють у просторі розподіл об'ємного заряду і струму відповідно до формул

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \sum_{n=1}^N q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sum_{n=1}^N q_n \vec{v}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \end{aligned}, \quad (5.5)$$

де $\vec{r}_n = \vec{r}_n(t)$ – радіус-вектор n -того заряду.

З (2) і (3) випливає рівняння неперервності

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (5.6)$$

інтегрування якого по об'єму веде до закону збереження заряду у формі

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}, \quad Q = \int_V \rho \, dv. \quad (5.7)$$

Тут Q – повний заряд усередині замкненої поверхні S , що обмежує об'єм V .

Електромагнітне поле, що повільно змінюється, задовольняє умові

$$\omega \ll \frac{c}{L} \quad (5.8)$$

(L – максимальний лінійний розмір випромінюючої області простору), називається *квазістаціонарним*. Воно описується рівняннями Максвелла (1)-(4), у яких $c \rightarrow \infty$ (тобто доданки $\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$

й $\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$ опущено).

Випромінюючі властивості системи визначаються такими характеристиками:

- дипольний момент

$$\vec{d} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i. \quad (5.9)$$

- тензор квадрупольного моменту⁴

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^N q_n \left(x_{n\alpha} x_{n\beta} - \frac{1}{3} r_n^2 \delta_{\alpha\beta} \right), \quad (5.10)$$

- магнітний момент системи

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N p [\vec{r}_i \times \vec{v}_i], \quad (5.11)$$

⁴ В (10) сума береться по частинкам n .

де радіус-вектор $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ і швидкість $\vec{v}_i = \vec{v}_i(t)$ i -того заряду є функціями часу.

Електромагнітні поля, що поширюються у просторі (речовині) при відсутності вільних зарядів і струмів, називаються **електромагнітними хвилями**.

У вільному просторі без зарядів із рівнянь Максвела випливають **хвильові рівняння**

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Електромагнітні хвилі у вакуумі можна досліджувати за допомогою **електромагнітних потенціалів**, що задовольняють рівнянням

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (5.13)$$

Додаткова умова

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \varphi = 0 \quad (5.14)$$

називається **кулонівською калибровкою**. В деяких задачах зручніше використовувати іншу умову, що називається **лоренцевою калибровкою**. Остання має вигляд

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (5.15)$$

Напруженості електричного і магнітного полів виражаються через потенціали у такий спосіб:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (5.16)$$

Як характеристики полів використовуються такі величини:
густина потоку електромагнітної енергії (вектор Умова-Пойнтінга)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}], \quad (5.17.a)$$

густина імпульсу

$$\vec{g} = \frac{1}{c} \vec{S}, \quad (5.17.б)$$

густина енергії електромагнітного поля

$$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \quad (5.18)$$

Для плоскої монохроматичної хвилі напруженості полів записуються у стандартній формі

$$\vec{E} = R e [\vec{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}], \quad \vec{H} = R e [\vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)}] \quad (5.19)$$

де \vec{k} – хвильовий вектор ($k = \omega / c$), ω – частота хвилі, \vec{E}_0 , \vec{H}_0 – комплексні амплітуди електричного і магнітного компонентів хвилі.

Представимо комплексну амплітуду поля \vec{E}_0 у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_0 &= \vec{b} \exp(-i\alpha), \\ \vec{b} &= \vec{b}_1 + i\vec{b}_2, \quad (\vec{b}_1 \vec{b}_2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

де фаза α і вектори \vec{b}_1 і \vec{b}_2 є дійсними величинами. При цьому в ізотропному середовищі систему координат можна вибрати так, щоб

$$E_x = b_1 \cos(\omega t - kz), \quad E_y = \pm b_2 \sin(\omega t - kz). \quad (5.21)$$

У цьому випадку виконується умова

$$\frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = 1. \quad (5.22)$$

Хвилі типу (21) називаються *еліптично - поляризованими*. Знаки + і – перед коефіцієнтом b_2 у формулі (21) відповідають правому і лівому обертанням вектора поляризації (для стислості часто

говорять просто про “праву” і “ліву” поляризації). У випадку $b_1 = b_2 = b$ еліпс перетворюється в окружність, і хвиля (5.21) називається **циркулярно – поляризованою**.

Якщо вектор напруженості поля має сталу орієнтацію при розповсюдженні, то така хвиля називається **лінійно-поляризованою хвилею**

$$\vec{E} = \vec{e}_p E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha)}. \quad (5.23)$$

Тут \vec{e}_p – одиничний вектор поляризації, α – постійне зміщення фази, а амплітуда E_0 може розглядатися як дійсна величина. Зауважимо, що фізичний зміст має тільки дійсна або уявна частина комплексного виразу (5.23).

Суперпозиція плоских монохроматичних хвиль з різними хвильовими векторами і частотами зветься **хвильовим пакетом**:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \psi(\vec{k}) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] d^3 v. \quad (5.24)$$

Тут $\Psi(r, t)$ – компонента вектора \vec{E} або \vec{H} . Функція $\psi(\vec{k})$, що характеризує частку кожної окремої хвилі в загальній суперпозиції, зветься **амплітудною функцією**.

Максимум амплітуди хвильового пакета переміщується в просторі із груповою швидкістю

$$\vec{v}_g = \frac{d\omega}{d\vec{k}}. \quad (5.25)$$

При падінні плоскої хвилі на плоску границю розподілу двох середовищ кути $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, що вказують напрямки поширення відповідно падаючих, відбитих і заломленої хвиль, зв'язані між собою співвідношеннями:

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2}, \quad n_i = \sqrt{\varepsilon_i} \quad (5.26)$$

де $n_{1,2}$ – показники заломлення першого і другого середовищ (вважаємо $\mu_1 = \mu_2 = 1$).

Амплітуди відбитої (\vec{E}_1, \vec{H}_1) і заломленої (\vec{E}_2, \vec{H}_2) хвиль виражаються через амплітуди \vec{E}_0, \vec{H}_0 падаючої хвилі **формулами Френеля**:

а) якщо \vec{E}_0 нормально до площини падіння, то

$$\vec{E}_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \vec{E}_0, \quad \vec{E}_2 = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \vec{E}_0; \quad (5.27)$$

б) якщо \vec{H}_0 нормально до площини падіння, то

$$\vec{H}_1 = \frac{t g(\theta_0 - \theta_2)}{t g(\theta_0 + \theta_2)} \vec{H}_0, \quad \vec{H}_2 = \frac{\sin 2 \theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} \vec{H}_0. \quad (5.28)$$

В анізотропному середовищі в даному напрямку можуть поширюватися з різними фазовими швидкостями дві плоскі монохроматичні хвилі однієї частоти, поляризовані лінійно в двох взаємно перпендикулярних площинах. Напрямки, вздовж яких обидві хвилі мають однакові швидкості поширення, називаються **оптичними осями**.

Кристали, в яких два головних значення тензора діелектричної проникності співпадають ($\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon^{(3)} = \varepsilon_{\parallel}$), називаються **одноосними**. Хвильові вектори двох хвиль, що поширюються під однаковим кутом θ до оптичної осі, мають у цьому випадку такі довжини:

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\perp} \mu}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \mu}{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}}. \quad (5.29)$$

Перша з цих хвиль називається *звичайною*, (у ній $\vec{E}_0 \parallel \vec{D}_0$, $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$). Друга хвиля називається *незвичайною*.

При наявності зовнішнього постійного магнітного поля тензори ε_{ik} і μ_{ik} перестають бути симетричними (по індексах), але залишаються ермітовими:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^*, \quad \mu_{ik} = \mu_{ki}^*. \quad (5.30)$$

В гіротропних середовищах зв'язок між напруженостями полів і індукціями можна записати у вигляді

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + i [\vec{E} \times \vec{g}_e], \quad \vec{B} = \mu \vec{H} + i [\vec{H} \times \vec{g}_m], \quad (5.31)$$

де \vec{g}_e і \vec{g}_m – вектори гірації (електричний і магнітний). У гіротропному середовищі в заданому напрямку можуть поширюватися з різними фазовими швидкостями дві хвилі однієї частоти. Ці хвилі поляризовані еліптично, але мають протилежні напрямки обертання (“права” і “ліва” хвиля).

Ефективним диференціальним перетином розсіювання в напрямку $\vec{\Omega} = \{\theta, \alpha\}$ називається величина

$$\sigma_s = \frac{1}{I_0} \frac{dI(\vartheta, \alpha)}{d\Omega} \quad (5.32)$$

Тут dI середня (за часом) інтенсивність розсіювання в тілесний кут $d\Omega$; I_0 – середня густина потоку енергії падаючої хвилі

Якщо довжина хвилі нескінченно мала, поширення електромагнітних хвиль описується законами *геометричної оптики*. Якщо довжина хвилі є скінченою і порівненою за величиною із масштабом перешкод, то спостерігається явище *дифракції хвиль* (тобто відхилення законів поширення хвиль від законів геометричної оптики).

Коли джерело точка спостереження P знаходяться на близькій відстані від діафрагми (джерела хвиль), так що із точки P видно лише декілька зон Френеля, то дифракційні явища, що виникають, називаються **дифракцією Френеля**.

Якщо джерело випромінювання електромагнітних хвиль і точка спостереження знаходяться на дуже великих відстанях від діафрагми (екрана), то має місце **дифракція Фраунгофера**.

При дифракції електромагнітної хвилі на отворі в нескінченному непрозорому екрані амплітуда дифрагованого поля описується формулою Френеля-Гюйгенса

$$u_p = \frac{k}{2\pi i} \int \frac{u}{R} e^{ikR} dS_n. \quad (5.33)$$

Тут u_p – поле в точці P за екраном, u – поле на ділянці dS поверхні отвору (це поле розглядається таким же, як при відсутності екрана, тобто неспотвореним), dS_n – проекція елемента dS поверхні отвору діафрагми на напрямок променя, що прийшов з джерела світла у dS , R відстань від dS до точки P , k – абсолютна величина хвильового вектора світлової хвилі.

У випадку дифракції Фраунгофера формула (33) може бути спрощена

$$u_p = \frac{\exp[ikR_0]}{2\pi i R_0} \int u_0 \exp[i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}] dS_n. \quad (5.34)$$

Тут \vec{k}_0 і \vec{k} – хвильові вектори падаючого і дифрагованого світла, R_0 – відстань від отвору до точки спостереження, u_0 – амплітуда поля на отворі.

Електромагнітне поле залежить від змінних \vec{r} , t . У багатьох випадках зручно використовувати різновиди розкладу Фур'є:

$$f(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (5.35)$$

$$f_{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (5.36)$$

(розклад на монохроматичні, але неплоскі хвилі), або

$$f(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3 k f(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad (5.37)$$

$$f(\vec{k}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3 r f(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (5.38)$$

(розклад по плоских монохроматичних хвилях).

§ 5.1. Поширення електромагнітних хвиль. Умови задач.

№ 500. Записати хвильові рівняння для електромагнітних потенціалів φ і \vec{A} , якщо накласти додаткову умову $\vec{A} = 0$ так звана “кулонівська калібровка”.

№ 501. При доведенні закону збереження електромагнітної енергії з умови $\text{div } \vec{S} = c(4\pi)^{-1} (\vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H})$ звичайно роблять висновок, що густина потоку енергії $\vec{S} = c[\vec{E} \times \vec{H}]/4\pi$. Знайти для \vec{S} інші можливі вирази, дивергенція яких дорівнює зазначеному вище рівнянню.

№ 502. В циліндричних координатах компоненти вектора напруженості магнітного поля в деякій частині вільного простору мають вигляд $H_r = H_\varphi = 0$ і

$$H_z(\vec{r}, t) = H_0 \exp \left[-\left(\frac{x^2 + y^2}{a_0^2} \right) + i(k_z z - \omega t) \right]. \quad \text{Визначити}$$

напруженість \vec{E} електричного поля, індукованого даним магнітним полем.

№ 503. Знайти функцію $F = \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ для записуючих електромагнітних потенціалів, записаних у формі (7-6), (7-7).

№ 504. Напруженість електричного поля електромагнітної хвилі задана у вигляді $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[-\frac{t}{\tau} + i(\vec{k} \vec{r}) \right]$, де вектори \vec{E}_0 , \vec{k} і час релаксації $\tau > 0$ – константи. Знайти спектр цього поля $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$.

№ 505. Компонента Фур'є $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ напруженості електричного поля має вигляд

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \vec{E}_0 \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2} - \frac{(\kappa_z - \kappa_z^0)^2}{(\Delta\kappa_z)^2} \right], \quad \text{де } \vec{E}_0, \omega_0, \kappa_z^0, \Delta\omega, \Delta\kappa_z -$$

константи. Знайти напруженість електричного поля в просторово-часовому представленні $\vec{E}(\vec{r}, t)$, якщо $\Delta\omega \ll \omega_0$, $|\Delta\kappa_z| \ll \kappa_z^0$.

№ 506. Хвильовий пакет утворено суперпозицією монохроматичних хвиль з частотами $(\omega_0 - \Delta) \leq \omega \leq (\omega_0 + \Delta)$. Напрямок поширення, вектор поляризації і амплітуди усіх хвиль рівні між собою. Знайти напруженість електричного поля цього пакета $\vec{E}(\vec{r}, t)$ в просторово-часовому представленні.

№ 507. Імпульс електромагнітного поля має такий спектральний склад: $\vec{E}(\omega) = \vec{A}_0 \exp[-b(\omega - \omega_0)^2]$. Знайти (оцінити) часову тривалість Δt цього імпульсу, якщо $|b\omega_0| \gg 1$, $b > 0$.

№ 508. Електростатичне поле описується сферично-симетричним потенціалом $\varphi = \frac{q}{|r|} \exp\left(-\frac{|r|}{r_0}\right)$, де q, r_0 – позитивні константи. Знайти розклад цього потенціалу по плоских хвилях.

№ 509. Плоска монохроматична хвиля із циркулярною поляризацією падає під кутом θ із боку вакууму на границю діелектрика, що займає область $z \geq 0$. Визначити залежність поляризації відбитої і заломленої хвиль від кута θ .

№ 510. Монохроматичний неполяризований пучок світла падає на плоску границю розділу діелектриків. Визначити коефіцієнт відбиття R і коефіцієнти деполаризації $\rho_{1,2}$ відбитого і заломленого світла для випадку, коли кут падіння дорівнює куту Брюстера. Усі світлові промені представляти відповідними плоскими хвилями.

№ 511. Метал характеризується малим поверхневим імпедансом $\xi = \xi' + i\xi''$. Знайти коефіцієнт відбиття R електромагнітної хвилі від плоскої поверхні цього металу. При яких кутах падіння θ_0 коефіцієнт відбиття є мінімальним?

№ 512. На границю $z = 0$ між двома діелектриками падає плоска лінійно-поляризована монохроматична хвиля. Відомо, що після повного внутрішнього відбиття від цієї границі в загальному випадку вона набуває еліптичної поляризації. Знайти умови (кути, співвідношення між показниками заломлення), при виконанні яких відбита хвиля буде мати циркулярну поляризацію.

№ 513. На границю $z = 0$ між двома діелектриками падає плоска лінійно поляризована монохроматична хвиля, яка зазнає повного внутрішнього відбивання. Знайти потік електромагнітної енергії вздовж границі розділу і вздовж осі z в тому із діелектриків, від якого хвиля відбивається.

№ 514. Плоска монохроматична хвиля падає на границю $z = 0$ між двома діелектриками із діелектричними проникностями ε_1 і ε_2 . Знайти поле з обох боків від границі розділу для випадку “ковзання” падаючого променя (тобто, коли кут падіння $\theta_0 \rightarrow \pi/2$).

№ 515. На плоску границю розділу “вакуум-діелектрик” під кутом θ_0 з боку вакууму падає плоска монохроматична хвиля. Вектор \vec{E}_0 цієї хвилі напрямлено паралельно до площини падіння. Діелектрик має слабе поглинання ($\varepsilon'' \ll \varepsilon'$), так що електрична хвиля в діелектрику є неоднорідною. Визначити взаємне розташування векторів $\vec{E}_0, \vec{k}', \vec{k}''$ (де \vec{k}' і \vec{k}'' – дійсна і уявна частини хвильового вектора \vec{k}). Яку криву (з плином часу) описує кінець вектора \vec{H} у фіксованій точці простору \vec{r} ?

№ 516. На плоску границю розділу “вакуум-діелектрик” під кутом θ_0 з боку вакууму падає плоска монохроматична хвиля. Вектор \vec{H}_0 цієї хвилі напрямлено паралельно до площини падіння. Діелектрик має слабе поглинання ($\varepsilon'' \ll \varepsilon'$), так що електрична хвиля в діелектрику є неоднорідною. Визначити взаємне

розташування векторів $\vec{E}_0, \vec{k}', \vec{k}''$ (де \vec{k}' і \vec{k}'' – дійсна і уявна частини хвильового вектора \vec{k}). Яку криву (з плином часу) описує кінець вектора \vec{E} у фіксованій точці простору \vec{r} ?

№ 517. Плоска електромагнітна хвиля падає похило з діелектрика на границю $z=0$ товстої металевої платівки. Знайти напрямок потоку енергії і фазову швидкість v_φ хвилі в металі при умові, що останній має неідеальну провідність.

№ 518. Між двома діелектриками із проникностями ε_1 і ε_3 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$) знаходиться плоский діелектричний прошарок із проникністю ε_2 , обмежений площинами $z=0$ і $z=a$. На цей прошарок нормально до його поверхні з боку області $z < 0$ падає електромагнітна хвиля. При якому співвідношенні між $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a$ коефіцієнт відбивання електромагнітної хвилі буде мінімальним?

№ 519. Вакуум займає область $z < 0$, а напівпростір $z > 0$ заповнено неоднорідною плазмою. Діелектрична проникність плазми має вигляд (див. задачу 312) : $\varepsilon(z) = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}$. При

цьому концентрація заряджених частинок змінюється по лінійному закону: $N(z) = N_0 z$. Плоска монохроматична хвиля з амплітудою A_0 падає на плазму із вакууму вздовж осі Z . Знайти амплітуду відбитої хвилі.

№ 520. Хвильовий пакет утворюється суперпозицією плоских хвиль з однаковими амплітудами a_0 і хвильовими векторами, що лежать в області $|k_0 - k| \leq q$ (k_0, q – константи). Як змінюється форма такого пакета при розповсюдженні хвилі? Вважати, що взаємозв'язок між частотою і хвильовим вектором має лінійну форму: $\omega(k) = \omega(k_0) + b \cdot (k - k_0)$.

№ 521. Одномірний хвильовий пакет поширюється в диспергуючому середовищі вздовж осі Z . У площині $Z=0$ цей пакет описується розподілом Гауса $a(k) = a_0 \exp[-\alpha(k-k_0)^2]$. Дослідити зміну форми хвильового пакета в процесі розповсюдження (тобто в різні моменти часу). Вважати, що взаємозв'язок між частотою і хвильовим вектором має лінійну форму: $\omega(k) = \omega(k_0) + b \cdot (k - k_0)^2$.

№ 522. Знайти фазову v_ϕ і групову v_g швидкості поширення електромагнітних хвиль в речовині, діелектрична проникність якої має таку частотну залежність $\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Вважати, що магнітна сприйнятливості речовини $\mu = 1$.

№ 523. Товста феритова платівка намагнічена до насичення сталим полем \vec{H}_0 .

У ній під кутом θ до \vec{H}_0 поширюється плоска монохроматична хвиля. Магнітна проникність фериту описується тензором

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix}$$

(див. задачу 331); вісь z спрямована вздовж постійного магнітного поля \vec{H}_0 . Знайти фазові швидкості поширення електромагнітних хвиль у фериті. Діелектричну проникність фериту ε можна вважати скаляром, що не залежить від \vec{H}_0 .

№ 524. Діелектрик знаходиться в постійному однорідному магнітному полі \vec{H}_0 . Його тензор діелектричної проникності (див. задачу 318) має вигляд

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix},$$

а магнітна проникливість $\mu = 1$. В діелектрику поширюється плоска монохроматична хвиля. Знайти фазові швидкості поширення цієї хвилі для випадків правої та лівої циркулярної поляризації.

№ 525. Плоска хвиля падає з вакууму на плоску поверхню одновісного кристала. Оптична вісь кристала нормальна до його поверхні. Знайти напрямки поширення звичайного і незвичайного променів у кристалі, якщо кут падіння в вакуумі дорівнює θ_0 .

№ 526. Діелектрик знаходиться в зовнішньому постійному магнітному полі \vec{H}_0 . Плоска монохроматична хвиля поширюється в напрямку \vec{H}_0 (вздовж осі z) і має в площині $z = 0$ лінійну поляризацію. Як буде змінюватись поляризація хвилі при $z > 0$? (Вказівка. Використати результати *задачі 318*).

№ 527. Плоска монохроматична хвиля має кругову поляризацію. Вона падає із вакууму по нормалі на плоску границю фериту $z = 0$. Ферит намагнічено у напрямку нормалі до границі. Знайти амплітуди відбитої хвилі і хвилі, що пройшла. (Вказівка. Використати граничні умови для векторів \vec{E} і \vec{H}).

№ 528. Розглянути попередню задачу для випадку, коли падаюча хвиля поляризована лінійно.

№ 529. Знайти частоту поздовжніх коливань у плазмі з діелектричною проникністю $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$.

№ 530. Область $z > 0$ зайнята плазмою з діелектричною проникністю $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ (див. *задачу 312*), а область $z < 0$ –

вакуум. Показати, що вздовж границі розділу плазма–вакуум може поширюватись поверхнева хвиля (яка затухає експоненційно при віддаленні від границі). Знайти умови, при яких можливе існування такої хвилі, і закон дисперсії (тобто залежність хвильового вектора від частоти). Розглянути випадок $|k| \gg (\omega/c)$.

№ 531. Іонізований газ знаходиться в сталому магнітному полі. $\vec{H}_0 = \vec{e}_z H_0$. Вздовж осі “z” поширюється плоска монохроматична хвиля. Знайти фазові швидкості поширення циркулярно поляризованих електромагнітних хвиль для різних напрямків обертання поляризації. Розглянути випадок малих частот $\omega \rightarrow 0$. (Вказівка. Використати вираз для тензора діелектричної проникності іонізованого газу в сталому магнітному полі, отриманий в *задачі 321*).

§6. Інтерференція і дифракція. Теоретичні основи.

Дифракцією називається відхилення розповсюдження хвиль від законів *геометричної оптики*. Для опису явища дифракції часто застосовується так званий *принцип Гюйгенса* (1690 р.) у формі

$$U_p = a \int \frac{U \cdot e^{ikR}}{R} df_n \quad (6.1)$$

Якщо формула (6.1) застосовується для описання дифракції на діафрагмах із прямокутним профілем пропускання, то інтегрування йде по поверхні, що обмежена краями отвору.

Теорема Гріна:

$$\iiint_{V_0} (U_1 \cdot \Delta U_2 - U_2 \cdot \Delta U_1) dv = - \iint_{S_0} \left(U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) ds \quad (6.2)$$

Інтегрування в (6.2) йде по довільному об'єму V_0 , що оточений замкненою поверхнею S_0 . Взагалі кажучи, поверхня S_0 може бути багатозв'язною.

Як показали подальші дослідження, принцип Гюйгенса, взагалі кажучи, є наближенням. Точна теорія дифракції була сформульована Кірхгофом (1882 р.). У відповідності із її результатами

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ E(\vec{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{e^{i \cdot k_0 r_1}}{r_1} \right) - \frac{e^{i \cdot k_0 r_1}}{r_1} \cdot \frac{\partial E(\vec{r}_1)}{\partial n_1} \right\} ds_1 \quad (6.3)$$

Таким чином, **для передбачення поля E в точці P треба знати не тільки розподіл поля на діафрагмі, але й похідну від цього поля**. В межах методики Кірхгофа інтегрування обов'язково треба проводити по двовимірній поверхні.

Найбільш прості для практичної реалізації діафрагми мають прямокутний профіль пропускання. Наприклад, кругла діафрагма радіуса R_0 :

$$T(x, y) = \Theta\left(R_0 - \sqrt{x^2 + y^2}\right). \quad (6.4)$$

Тут $T(x, y)$ – польова функція пропускання, тобто така, що визначає відношення полів на виході із транспаранту (в площині $z = +0$) до поля безпосередньо на вході в транспарант (площина $z = -0$)

$$T(x, y) = \frac{E(x, y, z = +0)}{E(x, y, z = -0)} \quad (6.5)$$

При цьому транспарант розглядається як нескінченно тонка конструкція в площині $z = 0$.

Двовимірна **гаусова діафрагма** має пропускання:

$$T(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{a_y^2}\right) \quad (6.6)$$

Якщо виконується умова $a_y \gg a_x$, то діафрагма зветься **щільною**.

Звичайно обмежуються розглядом тільки параксіальної області, що актуально для випадку

$$a_0 \gg \lambda \quad (6.7)$$

(λ – довжина електромагнітної хвилі, a_0 – розмір діафрагми).

Процес розповсюдження електромагнітних хвиль поза діафрагмою описується хвильовим рівнянням

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0. \quad (6.8)$$

При цьому має місце **принцип суперпозиції**, тобто загальне поле \vec{E} може бути складено як сума часткових рішень (6.8)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{A}(\vec{k}) \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \quad (6.9)$$

Якщо ж вектори \vec{k} змінюються неперервно, то треба перейти до інтегрування:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \exp(-i\omega t) \cdot \iiint \vec{A}(\vec{k}) \cdot \exp(i\vec{k}\vec{r}) d^3k \quad (6.10)$$

Фактично формула (6.10) є просторовим Фур'є-розкладом напруженості електричного поля.

Із умови збереження довжини хвильового вектора при розповсюдженні електромагнітних хвиль в вакуумі випливає

$$\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}_0(\vec{k}) \cdot \delta(|k| - k_0) \quad (6.11)$$

Існують два параметри, що визначають дифракційне розповзання променю, що пройшов крізь діафрагму: ефективний радіус діафрагми a_0 та релеївська довжина

$$Z_R = \frac{k_0 \cdot a_0^2}{2} = \pi \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) \cdot a_0 = \frac{\pi \cdot a_0^2}{\lambda} \quad (6.12)$$

Просторовий розподіл інтенсивності світла, що пройшло крізь гаусову діафрагму, має таку структуру :

$$I(x, z) = \Psi(z) \cdot \exp\left[-2 \frac{x^2}{R^2(z)}\right] \quad (6.13)$$

Тут множник Ψ залежить тільки від z , а функція $R(z)$ визначає радіус електромагнітної хвилі в площині z :

$$R(z) = a_0 \cdot \sqrt{1 + z^2/z_R^2} \quad (6.14)$$

(тобто в процесі розповсюдження вздовж осі z пучок розповзається в поперечному напрямку).

Оцінка для дифракційного кута розбігання:

$$\Theta_p \sim \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\lambda}{a_0} \right) \ll 1 \quad (6.15)$$

На відмінність від випадку звичайної діафрагми із прямокутним профілем пропускання після гаусової діафрагми формується тільки один центральний максимум,

В оптичній техніці явище знищення дифракційних мінімумів за рахунок спеціально вибраної функції пропускання зветься *аподізацією* (об'єктива, оптичної системи).

Більш точною, ніж (6.1), є *дифракційна формула Френеля-Кірхгофа*.

$$E(\vec{r}_p) \approx \frac{ik_0}{4\pi} \int_A E(\vec{r}_1) \cdot \frac{\exp(ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \cdot \Phi_s(\vec{r}_1, \vec{r}_p) d s_1 \quad (6.16)$$

де кутовий фактор

$$\Phi_s(\vec{r}_1, \vec{r}_p) = \cos \alpha_p(r_p) + \cos \alpha_D(r_D) \quad (6.17)$$

Найчастіше (6.16) застосовується в таких випадках, коли завдяки вибору форми поверхні A та іншим особливостям задачі, фактор Φ_s має просту форму.

При рішенні задач багатьох задач зустрічаються спеціальні інтеграли. Важливу роль серед них грає *інтеграл Пуасона*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}. \quad (6.18)$$

Диференціюючи n разів по A обидві сторони (6.18) і користуючись парністю підінтегрального виразу можна знайти

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^{n/2} \cdot 2}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (6.19)$$

У випадку непарних ступенів коефіцієнта перед експонентою

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right], \quad (n = 2m+1, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (6.20)$$

Узагальнений інтеграл Пуасона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-C(x+i\gamma)^2] dx = \sqrt{\frac{\pi}{C}}, \quad (6.21)$$

де константа C є комплексною $C = A - iB$, а γ – довільне комплексне число. Можна показати, що інтеграл (6.21) збігається при умові $\operatorname{Re} C = A > 0$.

Для задач, де фігурують гаусові розподіли, типовим є так званий "*довгий*" інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-Ax^2 + i(Bx^2 + 2Dx)] dx = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \exp\left[-\frac{A+iB}{A^2+B^2} D^2 + \frac{i}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Тут A, B, D – дійсні коефіцієнти, причому $A > 0$. Використовуючи (6.22), можна практично всі задачі про розповсюдження світла в гаусових системах розв'язати в аналітичному вигляді.

§ 6.1. Інтерференція і дифракція. Умови задач.

№600 Дві монохроматичні хвилі лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках і міняються в часі за законом $\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_1^0)$ і $\vec{E}_2 = \vec{A}_2 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_2^0)$. Вважаючи амплітуди цих хвиль однаковими, знайти поляризацію результуючої хвилі.

№601 Дві монохроматичні хвилі лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках і міняються в часі за законом $\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_1^0)$ і $\vec{E}_2 = \vec{A}_2 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_2^0)$. Вважаючи, що амплітуди цих хвиль відрізняються в 2 рази, знайти поляризацію результуючої хвилі.

№602 Дві монохроматичні хвилі поширюються в одному напрямку. Вони мають циркулярну поляризацію, але з протилежними напрямками обертання. Амплітуди і частоти хвиль однакові, а фази відрізняються на величину φ_0 . Знайти результуючу хвилю.

№603 Уздовж осі «z» поширюється дві монохроматичні хвилі частотою ω , з однаковими амплітудами $|E_{01}| = A$, $|E_{02}| = A$. Перша хвиля поляризована уздовж осі «x», а друга - циркулярно поляризована (у напрямку правого гвинта). Знайти результуючу хвилю.

№604 Амплітуда правополяризованої кругової хвилі дорівнює A , а лівополяризованої - B . Частоти і фази цих хвиль однакові. Знайти результуючу хвилю.

№605 Площини поляризації двох монохроматичних хвиль $\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, $\vec{E}_2 = \vec{A}_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ нахилені під кутом β друг до друга. Знайти поляризацію результуючої хвилі.

№606 Електромагнітна хвиля отримана в результаті додавання двох лінійно-поляризованих монохроматичних хвиль

$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \cos(\omega_1 t - k_1 r)$ і $\vec{E}_2 = \vec{A}_2 \cos(\omega_2 t - k_2 r)$, у яких хвильові вектори паралельні, а частоти відрізняються на малу величину $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}$. Амплітуди хвиль задовольняють умовам $|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2|$, $(\vec{A}_1 \vec{A}_2) = 0$. Знайти поляризацію сумарної хвилі.

№607 Електромагнітна хвиля отримана в результаті додавання двох монохроматичних циркулярно поляризованих хвиль із протилежними напрямками обертання $\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \cos(\omega_1 t - k_1 r)$ і $\vec{E}_2 = \vec{A}_2 \cos(\omega_2 t - k_2 r)$. Хвильові вектори цих хвиль паралельні, а частоти відрізняються на малу величину $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}$. Амплітуди хвиль задовольняють умовам $|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2|$, $(\vec{A}_1 \vec{A}_2) = 0$. Знайти поляризацію сумарної хвилі.

№608 Знайти граничну здатність мікроскопа об'єктив якого має діаметр D і фокусну відстань F . Розглядаємий у мікроскоп об'єкт освітлюється випромінюванням з довжиною хвилі λ . (Вказівка: взяти до уваги нерівність $\Delta x \cdot \Delta k \geq 1$).

№609 Положення повітряної кулі визначається радіолокатором. З якою граничною точністю можна визначити висоту польоту кулі, якщо відстань до нього (по горизонталі) L , робоча довжина хвилі λ , а діаметр антени радіолокатора D ?

№610 Плоска періодична ґратка утворена дуже тонкими паралельними провідниками. На цю ґратку по нормалі падає електромагнітна хвиля з довжиною хвилі λ . Період ґратки Λ , а товщина дротин набагато менша. Який вплив зробить ґратка на проходження хвиль з різними поляризаціями?

№611 Електромагнітна хвиля $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ падає по нормалі на плоский екран, що має нескінченно довгу щілину

ширина d_0 . Вважаючи, що $d_0 \gg \lambda$ (де λ - довжина хвилі) визначити електричне поле дифрагрованої хвилі.

№612 У плоскому екрані прорізано дві однакові нескінченних-довгих рівнобіжних щілини ширини d_0 . Відстань між щілинами b_0 . На екран по нормалі падає плоска електромагнітна хвиля $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$. Вважаючи, що $d_0 \gg \lambda$, $b_0 \gg \lambda$ (λ - довжина хвилі) знайти електричне поле дифрагрованої хвилі.

№613 У нескінченно тонкому екрані вирізано прямокутний отвір $-\alpha \leq x \leq \alpha$, $-b \leq y \leq b$. На цей екран по нормалі до поверхні падає плоска монохроматична хвиля. Вектор напруженості електричного поля цієї хвилі паралельний до осі « x ». Знайти кутовий розподіл випромінювання за прямокутним отвором в фраунгоферовській зоні.

№614 Плоска лінійно-поляризована електромагнітна хвиля падає по нормалі до площини екрана, що має круглий отвір радіуса R_0 . Довжина хвилі λ мала в порівнянні із радіусом R_0 . Знайти кутовий розподіл інтенсивності проходящої хвилі у фраунгоферовській зоні.

№615 Знайти кутовий розподіл інтенсивності світла у фраунгоферовській зоні при похилому падінні плоскої хвилі на круглий отвір.

№616 У плоскому екрані прорізано кільцевий отвір із зовнішніми радіусами R_1 і R_2 (при цьому $R_1 > R_2$). Знайти інтенсивність дифрагрованої хвилі у фраунгоферовській зоні при нормальному падінні плоскої лінійно-поляризованої електромагнітної хвилі на цей кільцевий отвір. Вважати, що довжина хвилі мала в порівнянні із радіусами R_1 і R_2 .

№617 У плоскому екрані вирізано еліптичний отвір з півосями a і b . Плоска електромагнітна хвиля частоти ω падає нормально до площини екрана. Довжина хвилі мала в порівнянні з довжинами

півосей $\lambda \ll a, b$. Знайти інтенсивність дифрагованої хвилі у фраунгоферовській зоні.

№618 Вісь Z проходить через центр круглого непрозорого диска (екрана) радіуса R_0 перпендикулярно його площини. На відстані L від диска (у точці $z = -L$) знаходиться точкове джерело світла, що випромінює сферичну монохроматичну хвилю з частотою ω . Вважаючи, що $R_0 \gg \lambda = 2\pi c / \omega$, знайти інтенсивність світла I в симетричній щодо екрана (диска) точці $z = +L$.

№619 На циліндричний провідник радіуса R_0 падає по нормалі до його осі плоска хвиля. Вважаючи, що довжина хвилі $\lambda \ll R_0$, знайти поле випромінювання позаду від провідника (в області «тіні»).

№620 Непрозора куля радіуса R_0 знаходиться в поле плоскої лінійно-поляризованої хвилі частоти ω . Довжина хвилі λ мала в порівнянні з радіусом R_0 . Знайти поле випромінювання позаду від кулі (в області «тіні»).

№621 Плоска монохроматична хвиля розсіюється невеликим тілом. Електричне поле на великих відстанях від розсіювача має вигляд

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \left[e^{ikz} + F(\vec{n}) \frac{e^{ikr}}{r} \right],$$

де $\vec{n} = \vec{r}$, $k = \omega / c$, E_0 - амплітуда падаючої хвилі, $F(\vec{n})$ - амплітуда розсіювання. Довести співвідношення («оптичну теорему») $\sigma_s = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[e \cdot F(\vec{n}_0)]$. Тут σ_s - повний переріз розсіювання, $F(\vec{n}_0)$ - амплітуда розсіювання в напрямку поширення \vec{n}_0 падаючої хвилі.

№622 Плоска поляризована хвиля розсіюється на ідеально провідному тонкому циліндрі радіуса R_0 . Знайти залежність ступеня деполяризації p розсіяних хвиль від кута розсіювання. Вважати, що $\lambda \gg R_0$.

№623 Знайти середню втрату енергії на одиницю довжини циліндра, розглянутого в попередній задачі. Дослідити випадок $\lambda \gg R_0$.

№624 Діелектричний циліндр радіуса R_0 з діелектричною проникністю ε знаходиться у вакуумі. Плоска електромагнітна хвиля з частотою ω падає нормально до осі Z циліндра причому вектор напруженості електричного поля паралельний OZ . Знайти результуюче поле (з врахуванням дифракції) за циліндром (тобто з протилежної сторони порівняно із розташуванням джерела випромінювання).

№625 Плоска монохроматична хвиля падає на плоский екран з гаусовською щілиною. Остання має пропускання $T(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha_0^2}\right)$ з ефективною шириною $\alpha_0 \gg \lambda$ (λ - довжина хвилі). Знайти поле, що пройшло діафрагму.

№626 Плоска монохроматична хвиля падає на гаусову смугу з пропусканням $T(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha_0^2}\right)$, ($\alpha_0 \gg \lambda$). Знайти поле за цією смугою.

№627 Плоска монохроматична хвиля падає на екран з гаусовою діафрагмою $T(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\alpha_0^2}\right)$, ($\alpha_0 \gg \lambda$). Знайти структуру поля, що пройшло крізь діафрагму.

№628 Плоска монохроматична хвиля (довжина хвилі λ) падає на плоский екран із плямою, пропускання якої розподілене по гауссовому законі $T(x, y) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\alpha_0^2}\right)$, ($\alpha_0 \gg \lambda$). Знайти поле за екраном.

№629 На плоскому екрані є дві паралельні гаусові щілини. Ефективна ширина кожної щілини дорівнює α_0 . Відстань між центрами щілин $\ell_0 > 2\alpha_0$. На щілини по нормалі до екрану падає плоска хвиля (довжина хвилі λ). Вважаючи, що $\alpha_0 \gg \lambda$ знайти інтерференційне поле в далекій зоні за екраном.

№630 Обчислити переріз поглинання електромагнітної хвилі проводящою кулею з малим поверхневим імпедансом $\xi = \xi' + i\xi''$. Радіус кулі R_0 малий у порівнянні з довжиною λ .

№631 Куля радіуса R_0 опромінюється плоскою електромагнітною хвилею частоти ω . Амплітуда падаючої хвилі A_0 . Знайти силу \vec{F} , з яким поле діє на кулю.

№632 Плоска тонка дифракційна ґратка має вигляд системи паралельних нескінченно довгих щілин завширшки “ a ” із відстанню між щілинами “ b ”. По нормалі до ґратки на неї падає плоска електромагнітна хвиля із частотою ω . Вважаючи, що розміри a, b мають той ж самий порядок, що і довжина хвилі λ , знайти дифракційне поле у фраунгоферовій зоні.

№633 Плоска тонка дифракційна ґратка має вигляд системи паралельних нескінченно довгих щілин шириною a і b , що чергуються між собою. Відстань між усіма сусідніми щілинами однакова і дорівнює $d = (T - a - b)/2$, де T - період системи. По нормалі до ґратки падає плоска електромагнітна хвиля із частотою

ω . Вважаючи, що розміри a, b, d мають той ж самий порядок, що і довжина хвилі λ , знайти дифракційне поле у фраунгоферовій зоні.

№634 Плоска нескінченно тонка дифракційна ґратка має вигляд системи паралельних нескінченно довгих щілин, утворюючих періодичну систему за таким законом (зліва праворуч):

- a. щілина шириною “ a ”,
- b. непрозора ділянка шириною “ a ”,
- c. щілина шириною “ b ”,
- d. непрозора ділянка шириною “ b ”,

(далі всі періодично повторюється). По нормалі до цієї ґратки падає плоска електромагнітна хвиля із частотою ω . Вважаючи, що розміри a, b мають той ж самий порядок, що і довжина хвилі λ , знайти дифракційне поле у фраунгоферовій зоні.

№635 Плоска тонка дифракційна ґратка має вигляд системи паралельних нескінченно довгих гаусових щілин з ефективною шириною “ a ” і відстанню між щілинами “ b ”. По нормалі до ґратки падає плоска електромагнітна хвиля із частотою ω . Вважаючи, що розміри a, b мають тієї ж самий порядок, що і довжина хвилі λ , знайти дифракційне поле у фраунгоферовій зоні.

№636 Плоска тонка дифракційна ґратка має вигляд системи паралельних нескінченно довгих гаусових щілин з ефективною шириною a і b , що чергуються між собою. Відстань між усіма сусідніми щілинами однакова і дорівнює $d = (T - a - b)/2$, де T - період системи. По нормалі до ґратки падає плоска електромагнітна хвиля із частотою ω . Вважаючи, що розміри a, b, d мають тієї ж самий порядок, що і довжина хвилі λ , знайти дифракційне поле у фраунгоферовій зоні.

№637 Плоска тонка дифракційна ґратка має вигляд системи паралельних нескінченно довгих гаусових щілин, що утворюють періодичну систему за таким законом (зліва праворуч):

- a. щілина шириною “ a ”,

- b. непрозора ділянка шириною “ a ”,
- c. щілина шириною “ b ”,
- d. непрозора ділянка шириною “ b ”,

(далі всі періодично повторюється). По нормалі до ґратки падає плоска електромагнітна хвиля із частотою ω . Вважаючи, що розміри a, b мають тієї ж самий порядок, що і довжина хвилі λ , знайти дифракційне поле у фраунгоферовій зоні.

№638 Нескінчений плоский екран має пропускання, що описується функцією

$$T(x, y) = \exp\left[-\frac{(|R| - R_1)^2}{b_0^2}\right] + \exp\left[-\frac{(|R| - R_2)^2}{b_0^2}\right],$$

($R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $R_2 > R_1 + 2b_0$), $R_{1,2}$ - константи. По нормалі до цього екрана падає плоска хвиля із довжиною хвилі λ . При цьому $b_0 \gg \lambda$. Вважаючи екран нескінченно тонким знайти розподіл інтенсивності поля на відстані z_0 за екраном.

№639 Нескінчений плоский екран має пропускання, що описується функцією

$$T(x, y) = \exp\left[-\frac{(|R|)^2}{b_0^2}\right] + \exp\left[-\frac{(|R| - R_1)^2}{b_1^2}\right],$$

($R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $b_0 \gg b_1$), R_1 - константа. По нормалі до цього екрана падає плоска хвиля із довжиною хвилі λ . При цьому $b_0 \gg \lambda$. Вважаючи екран нескінченно тонким знайти розподіл інтенсивності поля на відстані z_0 за екраном.

№640 У межах параксіального наближення дія сферичної лінзи еквівалентна дії плоского нескінченно тонкого транспаранта із фазового затримкою, що описується функцією

$$T(x, y) = \exp[i(\Delta\varphi_0 - \Phi_0(x^2 + y^2))]$$

(комплексний коефіцієнт пропускання). По нормалі до транспаранта (вздовж осі z) падає плоска хвиля, що поляризована вздовж напрямку осі « x ». Знайти поле за «лінзою» (тобто за транспарантом) обмежуючись параксіальним наближенням. Довжина хвилі - λ .

№641 У межах параксіального наближення для сферичної лінзи еквівалентна дії плоского нескінченно тонкого транспаранта із фазового затримкою, що описується функцією (комплексний коефіцієнт пропускання)

$$T(x, y) = \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2q_0^2} - i\frac{\pi}{\lambda F}(x^2 + y^2)\right],$$

(F - константа системи). По нормалі до транспаранта (вздовж осі z) падає плоска хвиля, що поляризована вздовж напрямку осі « x ». Довжина хвилі - λ . Вважаючи, що $a_0 \gg \lambda$ і обмежуючись параксіальним наближенням знайти поле за «лінзою» (тобто за транспарантом).

№642 По нормалі до транспаранта із коефіцієнтом пропускання

$$T(x, y) = \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2a_0^2}\right]$$

падає плоска хвиля із довжиною $\lambda \ll a_0$. Знайти поверхні сталої фази хвилі в напівпросторі за транспарантом.

№643 Плоский транспарант із комплексним коефіцієнтом пропускання¹

$$T(x, y) = \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2a_0^2} + i\left(\Delta\varphi_0 - \frac{\pi}{\lambda F}(x^2 + y^2)\right)\right]$$

розташовано в площині $z = 0$. У точці $z = -L$ на осі z знаходиться точкове джерело світла (довжина хвилі λ). Знайти зображення

¹ Модель гаусової «тонкої» лінзи.

цього точкового джерела, що знаходиться в напівпросторі $z > 0$. Величини $a_0, F, \Delta\varphi_0$ є константами. Обмежитись параксіальним наближенням і вважати, що $F \gg a_0 \gg \lambda$.

№644 Змоделюємо призму тонким фазовим транспарантом із комплексним коефіцієнтом пропускання

$$T(x, y) = T(x) = \theta(x) \exp\left[i \frac{x}{x_0}\right], \quad (-\infty < x < +\infty)$$

($\theta(x)$ - функція Хевісайда, x_0 - константа). Цей транспарант розташовано в площині $z = 0$. Із боку напівпростору $z < 0$ вздовж осі z на цю “призму” падає плоска хвиля, що поляризована вздовж OY (тобто $\vec{E} \parallel OY$). Довжина хвилі $\lambda \ll x_0$. У межах параксіального наближення знайти поле за “призмою” (фазовим транспарантом).

14.03.2003

§ 7. Випромінювання електромагнітних хвиль. Теоретичні основи.

Напруженості електромагнітних полів можуть бути виражені через електромагнітні потенціали \vec{A} і φ

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad (7.1)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.2)$$

Величини \vec{A} і φ визначені неоднозначно. Перехід від \vec{A} і φ до нових електромагнітних потенціалів \vec{A}' і φ' здійснюється за допомогою перетворення :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f \quad (7.3)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (7.4)$$

(тут $f = f(\vec{r}, t)$ – довільна функція) і не змінює напруженості електричного і магнітного полів. Звичайно функцію f вибирають так, щоб виконувалась умова калібрування Лоренца

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (7.5)$$

Тоді рівняння для електромагнітних потенціалів, що впливають з рівнянь Максвелла, приймають простий вигляд

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (7.6)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \quad (7.7)$$

Вони називаються рівняннями Даламбера.

Випромінювання електромагнітних хвиль описується рішеннями рівнянь (7.6) і (7.7) і може бути представлено у вигляді запізнювальних потенціалів:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (7.8)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (7.9)$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки спостереження, \vec{r}' – радіус-вектор елемента об'єму dV' , а t – час спостереження.

На великих відстанях від зарядженої системи кожен малий елемент поверхні сферичної хвилі можна розглядати як плоску хвилю, у якій вектори напруженості поля \vec{E} і \vec{H} рівні по модулі і утворюють з напрямком \vec{n} поширення хвилі правої гвинтової трійку векторів і

$$\vec{E} = [\vec{H} \times \vec{n}]. \quad (7.10)$$

Розмістимо початок координат усередині зарядженої системи, максимальний лінійний розмір якої позначимо через L . На великих відстанях $r \gg L \geq r'$ маємо $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r - \vec{n} \cdot \vec{r}'$ і векторний потенціал (7.8) наближено запишеться у вигляді

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}\right) dV' \quad (7.11)$$

де $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$. Нехай випромінювання відбувається на частоті ω , причому довжина λ випромінюваної хвилі є великою порівняно з лінійним розміром джерела, тобто $\lambda = \frac{c}{\omega} \gg L$. Тоді в хвильовій зоні $r \gg L, \lambda$ вираз для векторного потенціалу спрощується:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{d}}{cr} + \frac{[\vec{\mu} \times \vec{n}]}{cr} + \frac{\ddot{\vec{Q}}}{c^2 r}. \quad (7.12)$$

Тут введено вектор \vec{Q} із компонентами

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} n_\beta. \quad (7.13)$$

Дипольний момент \vec{d} , магнітний момент $\vec{\mu}$ і тензор $Q_{\alpha\beta}$ квадрупольного моменту залежать від часу з врахуванням запізнювання

$$d = d\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \mu = \mu\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Обчислюючи ротор від виразу (7.12) і відкидаючи малі члени, пропорційні $1/r^2$, одержуємо напруженість магнітного поля випромінюваної хвилі

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}]}{c^2 r} + \frac{[[\ddot{\vec{\mu}} \times \vec{n}] \times \vec{n}]}{c^2 r} + \frac{[\ddot{\vec{Q}} \times \vec{n}]}{c^3 r}. \quad (7.14)$$

Потік електромагнітної енергії визначається вектором Умова-Пойнтінга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (7.15)$$

Електромагнітна енергія, випромінювана джерелом в одиницю часу (потужність випромінювання P), дорівнює потокові

вектора Пойнтінга через сферу великого радіуса R з центром на джерелі випромінювання

$$P = \frac{c}{4\pi} \int H^2 r^2 d\Omega. \quad (7.16)$$

Використовуючи формули (7.14) і (7.16), неважко знайти повну інтенсивність випромінювання I :

$$I = \frac{2(\ddot{d})^2}{3c^3} + \frac{2(\ddot{\mu})^2}{3c^3} + \frac{(\ddot{Q})^2}{5c^5} \quad (7.17)$$

Перший, другий і третій доданок являють собою інтенсивності дипольного, магнітно-дипольного і квадрупольного випромінювань відповідно.

Повну енергію випромінювання можна представити у вигляді частотного розкладу

$$W = \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega, \quad (7.18)$$

де $W(\omega)$ – спектральна густина випромінювання, тобто енергія, що приходить на одиничний інтервал частот. Вона характеризує спектральний склад випромінювання.

Щоб визначити спектральну густина $W(\omega)$ випромінювання заданого джерела, необхідно величини, що входять в інтенсивність (7.17), розкласти в інтеграл Фур'є. Тоді енергія випромінювання в інтервалі частот від ω до $\omega + d\omega$ запишеться у вигляді

$$dW = \left(\frac{2|\ddot{d}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{2|\ddot{\mu}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{|\ddot{Q}(\omega)|^2}{5\pi c^5} \right) d\omega, \quad (7.19)$$

де $d(\omega)$, $\mu(\omega)$ і $Q(\omega)$ – компоненти Фур'є відповідних величин.

Напруженості полів і спектральна функція зв'язані між собою співвідношенням Парсевалія:

$$\int_0^{\infty} W(\omega) d\omega = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(t)|^2 dt = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(t)|^2 dt. \quad (7.20)$$

Якщо заряджена частинка знаходиться в полі електромагнітної хвилі, то в нерелятивістському випадку на неї діє сила $\vec{f} = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]$ (доданком $\frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{H})$ в багатьох випадках можна нехтувати). Під дією цієї сили частинка здобуває прискорення і випромінює електромагнітні хвилі. В результаті такого перевипромінювання виникає явище, що зветься розсіюванням падаючої хвилі. Цей процес характеризується ефективним перетином $d\sigma$ розсіювання в тілесний кут $d\Omega$.

$$d\sigma = \frac{\langle dI \rangle}{|\vec{s}|}, \quad (7.21)$$

де $|\vec{s}|$ – модуль вектора Пойнтінга падаючої хвилі, а кутові дужки означають часове усереднення за період коливання.

На випромінюючу частинку з боку електромагнітного поля, що випромінюється, діє гальмуюча сила. Вона називається **силою радіаційного тертя**. В нерелятивістському випадку сила радіаційного тертя має вигляд

$$\vec{f} = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}, \quad (7.22)$$

де q і \vec{r} – заряд і радіус-вектор частинки, що рухається. Рівняння руху частинки з врахуванням радіаційного тертя:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}. \quad (7.23)$$

Зауважимо, що формулу (7.22) було виведено для квазіколового (або осциляторного) руху і її можна застосовувати не до всіх типів траєкторій частинок.

§7.1. Випромінювання електромагнітних хвиль. Умови задач.

№700 Заряд q рухається рівномірно по колу радіуса a із лінійною швидкістю $|\vec{v}| = v_0 \ll c$. Вважаючи, що відстань до точки спостереження $r \gg a$, знайти кутовий розподіл і повну інтенсивність випромінювання.

№701 Заряд q рухається рівномірно по колу радіуса a із лінійною швидкістю $|\vec{v}| = v_0 \ll c$. Вважаючи, що відстань до точки спостереження $r \gg a$, знайти залежність поляризації випромінювання від кута спостереження.

№702 Два однакових електричних заряди q рухаються рівномірно по коловій орбіті радіуса R_0 із нерелятивістською швидкістю $|\vec{v}| = v_0 \ll c$, залишаючись при цьому на протилежних кінцях діаметра. Знайти поляризацію, кутовий розподіл та повну інтенсивність випромінювання.

№703 Два однакових електричних заряди q рухаються рівномірно по коловій орбіті радіуса R_0 із нерелятивістською швидкістю $|\vec{v}| = v_0 \ll c$. При цьому кут між напрямками на заряди (відрахований від центра системи) залишається сталим і дорівнює α_0 . Знайдіть величину кута α_0 , при якому інтенсивність електричного випромінювання дипольного типу дорівнює інтенсивності випромінювання квадрупольного типу.

№704 Коливання двох електричних дипольних осциляторів мають однакову частоту ω , але зсунуті за фазою на $\pi/2$. Амплітуди дипольних моментів рівні за величиною p_0 і напрямлені під кутом φ один до одного. Відстань між осциляторами мала у порівнянні з

довжиною хвилі. Знайти кутовий розподіл інтенсивності у хвильовій зоні і повну потужність випромінювання.

№705 Із гранично тонкого абсолютно поглинаючого матеріалу зроблено сферу великого радіуса R_0 (порожню всередині). Біля центру цієї сфери по коловій орбіті радіуса $a \ll R_0$ рухається електрон із сталою частотою обертання ω_0 . Знайти обертальний момент \vec{N} , який прикладено до цієї сфери з боку електромагнітного поля.

№706 Куля радіуса a характеризується однорідною намагніченністю \vec{M} . Вона обертається з постійною частотою ω біля осі, що проходить через центр кулі і складає кут φ з напрямком \vec{M} . Знайти поле випромінювання та дослідити характер його поляризації. Визначити кутовий розподіл інтенсивності і повну потужність випромінювання.

№707 Два однакових електричних диполі напрямлені по одній прямій і осцилюють у протифазі з частотою ω (амплітуда дипольного момента кожного із диполей дорівнює \vec{p}_0). Відстань між їхніми центрами дорівнює L , що набагато більше максимальних розмірів кожного із диполей. Знайти електромагнітне поле в хвильовій зоні, кутовий розподіл інтенсивності випромінювання та його повну потужність, якщо $\lambda \gg a$.

№708 Центри двох електричних дипольних осциляторів знаходяться на осі z , на відстані $a = \lambda/4$ один від одного. Обидва осцилятори коливаються із частотою ω та однаковою амплітудою $\vec{p}_0 \parallel OX$. Коливання в осциляторах зсунуті по фазі на $\pi/2$. Знайти кутовий розподіл інтенсивності випромінювання.

№709 Електричний диполь з амплітудою $\vec{p}_0 \parallel OZ$ і частотою коливань ω знаходиться на відстані $a/2$ від ідеально провідної

площини $z=0$ ($a \ll \lambda$, λ – довжина хвилі випромінювання). Знайти електромагнітне поле та кутовий розподіл інтенсивності випромінювання в хвильовій зоні $r \gg \lambda$.

№710 Довжина двох сторін рівнобічного трикутника дорівнює a , а третьої сторони $b \neq a$. В кожній із верхівок трикутника розміщено по точковому заряду $-q$, а в центрі трикутника – заряд $+3q$. Уся система зарядів обертається з частотою ω_0 навколо осі Z , що перпендикулярна площі трикутника і проходить крізь його центр. Знайти індикатрису і спектральний склад випромінювання.

№711 Плоский квадруполь утворено чотирма точковими зарядами $+q_0, -q_0, +q_0, -q_0$, що розміщено (в стані спокою) в верхівках квадрата із стороною b_0 . Усі ці заряди коливаються із частотою ω і амплітудою $\alpha_0 < b_0$. Напрямок коливань кожного заряду співпадає із напрямком тієї діагоналі квадрата, що пересікає відповідну верхівку. Всі заряди коливаються синфазно (тобто одночасно наближуються до центру квадрата, або одночасно віддаляються від нього). Знайти індикатрису випромінювання цієї системи в хвильовій зоні, якщо довжина хвилі випромінювання $\lambda \gg b_0$.

№712 Плоский квадруполь утворено чотирма точковими зарядами $+q_0, -q_0, +q_0, -q_0$, що розміщено (в стані спокою) в верхівках квадрата із стороною b_0 . Усі ці заряди коливаються із частотою ω і амплітудою $\alpha_0 < b_0$. Напрямок коливань кожного заряду співпадає із напрямком нормалі до площини квадрата. Кожна пара зарядів одного знаку коливається синфазно між собою, але протифазно по відношенню до коливань зарядів на верхівках іншої діагоналі (тобто, якщо, наприклад, заряди $+q$ зміщуються у напрямку “від центра”, то обидва заряди $-q$ зміщуються на таку ж

саму відстань у напрямку “до центра”. Знайти індикатрису випромінювання цієї системи в хвильовій зоні, якщо довжина хвилі випромінювання $\lambda \gg b_0$.

№713 На осі Z розміщено три точкових заряди $-q, +2q, -q$, що утворюють лінійний квадруполь. В стані спокою відстань між сусідніми зарядами дорівнює a_0 . Середній заряд є нерухомим, а крайні коливаються з частотою ω_0 і амплітудою $b_0 < a_0$ в протифазі по відношенню один до одного (тобто, якщо один із зарядів зміщується в напрямку $+Z$, то другий одночасно зміщується на таку ж відстань у напрямку $-Z$). Знайти: а) квадрупольний момент системи, б) векторний потенціал поля, що генерується цією системою (в хвильовій зоні), в) індикатрису випромінювання цієї системи в хвильовій зоні.

№714 На осі Z розміщено три точкових заряди $-q, +2q, -q$, що утворюють лінійний квадруполь. В стані спокою відстань між сусідніми зарядами дорівнює a_0 . Два крайні заряди – нерухомі, а середній коливається відносно осі Z із амплітудою $b \ll a_0$ і частотою ω_0 . Знайти спектральний склад та індикатрису випромінювання в хвильовій зоні.

№715 Через нескінчений (напрямку осі y) плоский конденсатор із шириною пластин L пролітає частинка з масою m і зарядом q . Відстань між обкладинками конденсатора вздовж осі z дорівнює D . Напруженість електричного поля $\vec{E} = \vec{e}_z E_0$ в конденсаторі можна вважати сталою величиною. Частинка влітає посередині конденсатора в напрямку осі x із початковою швидкістю \vec{v}_0 . Знайти енергію W , що витрачається на дипольне випромінювання під час прольоту частинки через цей конденсатор.

№716 В напівпросторі $z > 0$ існує однорідне, постійне магнітне поле \vec{H}_0 , що напрямлено вздовж осі x . В момент часу $t = 0$ в цей напівпростір в напрямку осі y влітає частинка з масою m зарядом q і швидкістю \vec{v}_0 . Визначити енергію W , що витрачається на дипольне випромінювання за час руху частинки в магнітному полі.

№717 Частинка з масою m і зарядом q рухається у схрещених полях – електричному і магнітному – з напруженостями \vec{E} і \vec{H} відповідно. Ці поля задовольняють умовам $\vec{E}\vec{H} = 0$ і $\vec{E} \ll \vec{H}$. Поля \vec{E} і \vec{H} однорідні і сталі, а частинка в початковий момент часу $t = 0$ мала швидкість \vec{v}_0 . Визначити енергію дипольного випромінювання, що витрачається за одиницю часу руху.

№718 Електрон з масою m і зарядом e пролітає на прицільній відстані d від нерухомого ядра із зарядом $Z|e|$. В нескінченно віддалений момент часу $t = -\infty$ електрон мав швидкість, що за абсолютною величиною дорівнює \vec{v}_0 . Нехтуючи викривленням траєкторія, знайти енергію W , що витрачається електроном на дипольне випромінювання за весь час прольоту.

№719 Частинка з масою m і зарядом q пролітає на великій відстані d від диполя з моментом \vec{d} , який закріплено нерухомо на початку системи координат. Коли частинка знаходилась нескінченно далеко від диполя, вона мала швидкість v_0 . Наближено вважаючи траєкторію прямолінійною, визначити повну енергію W , що губиться частинкою на дипольне випромінювання у випадку, коли дипольний момент \vec{d} паралельний початковій швидкості \vec{v}_0 частинки.

№720 Частинка з масою m і зарядом q пролітає на великій відстані d від диполя з моментом \vec{d} , який закріплено нерухомо на початку системи координат. Коли частинка знаходилась нескінченно далеко від диполя, вона мала швидкість \vec{v}_0 . Наближено вважаючи траєкторію прямолінійною, визначити повну енергію W , що губиться частиною на дипольне випромінювання у випадку, коли дипольний момент \vec{d} перпендикулярний до вектора початкової швидкості \vec{v}_0 і лежить у площині руху частинки.

№721 Повний заряд і дипольний момент деякої системи дорівнює нулю, діагональні компоненти тензора квадрупольного моменту $D_{xx} = D_{yy} = D_0$, $D_{zz} = 0$, а всі недіагональні компоненти тензора \hat{D} дорівнюють нулю. В площині XY на великій прицільній відстані d від атома пролітає електрон з масою m і зарядом e . В нескінченно віддалений момент часу $t = -\infty$ він мав кінетичну енергію E_0 . Наближено вважаючи траєкторію руху електрона прямолінійною, визначити повну енергію W , витрачену ним на випромінювання.

№722 В результаті ділення ядро розколюється на два уламки з масовими числами A_1 і A_2 і зарядами Z_1e і Z_2e . В системі центра інерції сумарна кінетична енергія обох уламків на нескінченності дорівнює E_0 . Маса одного нуклона дорівнює m . Обчислити повну енергію W дипольного випромінювання уламків ядра, що розлетілися. Вважати, що рух уламків важкого ядра описується законами класичної механіки. В момент розпаду $t = 0$ швидкість всіх частин системи дорівнює нулю.

№723 В класичній моделі атома, запропонованій Резерфордом, електрон з масою m і зарядом e обертається по коловій орбіті біля нерухомого ядра з зарядом $Z|e|$. Знайти закон зменшення повної енергії E електрона, обумовлений дипольним

випромінюванням. Обчислити час t_n , через який електрон впаде на ядро внаслідок втрати енергії. В початковий момент часу $t_0 = 0$ електрон знаходився на відстані a_0 від центра ядра.

№724 Довести, що в замкненій системі заряджених частинок з однаковим відношенням заряду до маси у випадку відсутності сторонніх сил дипольне випромінювання відсутнє при будь яких внутрішніх рухах частинок.

№725 Електронний газ з густиною частинок N_0 при температурі T знаходиться у зовнішньому однорідному постійному магнітному полі з напруженістю H . Розподіл електронів по швидкостям описується законом Максвелла. Середня відстань між електронами велика у порівнянні з довжиною хвилі, що випромінюється. Визначити потужність випромінювання одиниці об'єму такого електронного газу.

№726 Нейтрон, що має внутрішній магнітний момент $\vec{\mu}$, влітає в однорідне постійне магнітне поле з напруженістю \vec{H} . Внутрішній механічний момент \vec{M} нейтрона пов'язаний із магнітним моментом співвідношенням $\vec{\mu} = -\beta\vec{M}$. Кут між векторами $\vec{\mu}$ і \vec{H} в момент $t = 0$, коли частинка влетіла в поле, дорівнює Θ_0 . Знайти інтенсивність випромінювання нейтрона.

№727 У тонкій нерухомій круглій рамці із радіусом R_0 збуджено струм $j = j_0 \exp(-a^* t^2)$. Визначити повну енергію довгохвильового випромінювання за час $-\infty < t < \infty$.

№728 Чи можливе магнітно-дипольне та квадрупольне випромінювання в моделях атома водню, запропонованих Резерфордом та Дж.Дж.Томсоном?

№729 При виконанні яких умов інтенсивність квадрупольного випромінювання не залежить від вибору початку координат?

№730 Дві частинки з однаковим відношенням заряду до маси $e_1/m_1 = e_2/m_2 = e/m$ зв'язані між собою пружиною і здійснюють гармонічні коливання у відсутності поля тяжіння. Довжина ненавантаженої пружини L , а її коефіцієнт жорсткості b . В початковий момент часу пружина була ненавантажена і покоїлась. Знайти середню інтенсивність випромінювання. Кулонівською взаємодією зарядів між собою знехтувати.

№731 В магнітному полі дві однакові частинки з масами m і зарядами e обертаються з постійною кутовою швидкістю ω по колу, знаходячись на протилежних кінцях діаметра. У початковий момент часу $t = 0$ кінетична енергія кожної із частинок дорівнювала E_0 . Визначити обумовлений випромінюванням закон спадання кінетичної енергії частинок. Вважати, що частота обертання $\omega \gg d(\ln E)/dt$, а взаємодією зарядів між собою можна знехтувати.

№732 Точковий диполь з моментом \vec{d} обертається з постійною кутовою швидкістю ω по колу радіуса R . Вектор \vec{d} постійний за модулем і в кожний момент часу направлений вздовж радіуса кола. Визначити інтенсивності дипольного, магнітно-дипольного і квадрупольного типів випромінювання у довгохвильовому наближенні в хвильовій зоні.

№733 Два однакових антипаралельних точкових диполя з моментами \vec{d} і $-\vec{d}$ обертаються з постійною кутовою швидкістю ω по колу радіуса R , знаходячись на протилежних кінцях діаметра. Моменти диполів постійні за модулем і в кожний момент часу направлені по дотичній до кола. Знайти інтенсивність і кутовий розподіл випромінювання в хвильовій зоні.

№734 Два однакових антипаралельних точкових диполя розташовані на осі Z на відстані L один від одного. Вони коливаються в за однаковими законами, але в протилежних напрямках. Дипольний момент одного з них $d = d_0 \cos \omega t$. Сталій вектор d_0 перпендикулярний прямій, що з'єднує диполі. Довжина випроміненої хвилі $\lambda \gg L$. Порівняти між собою інтенсивності магнітно-дипольного і квадрупольного внесків у потужність випромінювання. Розмірами окремого диполя можна знехтувати.

№735 Тонкий диск радіуса R обертається навколо свого діаметра з постійною кутовою швидкістю Ω . Цей диск однорідно заряджений із поверхневою густиною σ . Знайти інтенсивність випромінювання.

№736 Тонкий стрижень довжини L , обертається навколо свого центра з постійною кутовою швидкістю Ω . Вісь обертання перпендикулярна до осі стрижня. Стрижень однорідно заряджений із лінійною густиною χ . Знайти інтенсивність випромінювання.

№737 Електрон з масою m і зарядом e до моменту часу $t_0 = 0$ знаходився у стані спокою. При $t \geq 0$ на нього діє електричне поле $E = E_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$. Знайти спектральний розподіл потужності випромінювання.

№738 Частинка з масою m і зарядом q висить на невагомій жорсткій нитці і коливається в полі тяжіння. Знайти інтенсивність випромінювання і її спектральну ширину. Врахувати вплив сили радіаційного тертя.

№739 Поле випромінювання малої антени (з розмірами $L \ll \lambda$ (середнє)) має вигляд $E = E_0 \exp(-B t^2) \cos \omega_0 t$, де ω_0 , B – константи системи, \vec{n} – одиничний вектор напрямку розповсюдження хвиль, а \vec{E} – сталій вектор. Визначити ширину $\Delta\omega$ спектральної лінії випромінювання, якщо $\omega_0 \gg B^{-1}$.

№740 Дві частинки з масами m_1 і m_2 та однойменними зарядами q_1 і q_2 закріплено на відстані L одна від одної. В момент часу $t=0$ їх відпускають і вони розлітаються в протилежні боки. Знайти спектральний склад випромінювання такої системи.

№741 По коловій антені радіуса R_0 тече струм $J = b_0 \frac{t}{a_0 + t^2}$ ($-\infty < t < +\infty$), де b_0 , a_0 сталі величини. Радіус антени задовольняє нерівності: $R_0 \ll c\sqrt{a_0}$. Знайти спектральний склад випромінювання.

№742 Просторово однорідний електронний промінь великого радіуса R_0 напрямлено на невелику нейтральну кульку діаметра $d_0 \ll R_0$. Ті електрони, що досягають поверхні кульки, абсолютно дружньо розсіюються. Нехтуючи взаємодією між електронами знайти низькочастотну складову спектрального складу випромінювання.

№743 Частинка із зарядом Q рухається із швидкістю v по прямолінійній траєкторії повз електронейтрального атома, що покоїться. Коефіцієнт поляризованості цього атома дорівнює β . Останнє означає, що в зовнішньому електричному полі с напруженістю \vec{E} біля атома з'являється електричний дипольний момент $\vec{d} = \beta\vec{E}$. Прицільна відстань частинки дорівнює L . Знайти спектральний склад випромінюваної енергії при умові, що викривленням траєкторії руху можна знехтувати.

№744 Користуючись методом Лієнара-Віхерта визначити напруженості електричного і магнітного полів заряду q , що рухається із швидкістю V .

№745 Рухаючись із швидкістю, близькою до швидкості світла, електрон потрапляє в область однорідного постійного

електричного поля із напруженістю \vec{E}_0 . В момент вльоту в це поле швидкість електрона дорівнювала \vec{v}_0 і була напрямлена перпендикулярна до вектора \vec{E}_0 . Визначити енергію, що випромінюється за час Δt руху в електричному полі. Втрати енергії вважати малими порівняно із початковою енергією електрона і вважати, що $\Delta t \ll mv_0(q|E_0|)^{-1}$.

№746 Рухаючись із швидкістю, близькою до швидкості світла, електрон потрапляє в область однорідного постійного електричного поля із напруженістю \vec{E}_0 . В момент вльоту в це поле швидкість електрона дорівнювала \vec{v}_0 і була напрямлена вздовж вектора \vec{E}_0 . Визначити енергію, що випромінюється за час Δt руху в електричному полі. Втрати енергії вважати малими порівняно із початковою енергією електрона і вважати, що $\Delta t \ll mv_0(q|E_0|)^{-1}$.

§ 8. Випромінювання антен. Теоретичні основи.

Найпростіша антена являє собою лінійний відрізок нескінченно тонкого дроту, в якому збуджено струм із густиною

$$\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{e}_z I(z', t') \exp(-i\omega t') \delta(x') \delta(y') \theta\left(\frac{L}{2} - |z'|\right). \quad (8.1)$$

Вище позначено : ω - частота струму, $I(z', t')$ – амплітуда повного струму в перерізі z' антени в момент t' .

Вектор-потенціал поля антени в хвильовій зоні :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \cong \frac{1}{c|r|} \int_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|r|}{c} + \frac{(\vec{r}' \vec{n})}{c}\right) d^3 r'. \quad (8.2)$$

Для *стоячих хвиль* амплітуда повного струму не залежить від t' , тобто $I = I(z')$. При цьому граничні умови мають такий вигляд:

$$I\left(z' = +\frac{L}{2}\right) = I\left(z' = -\frac{L}{2}\right) = 0. \quad (8.3)$$

Можливі два розподіли струмів:

а) *симетричний*: $I(z') = +I(-z')$,

б) *антисиметричний*: $I(z') = -I(-z')$.

В загальному випадку функцію $I(z)$ можна розкласти в ряд Фур'є і розглянути умови, при яких в антені збуджується тільки одна гармоніка. Тоді просторова залежність струму буде мати вигляд

$$I(z') = I_k^0 \cos(k z') \quad (8.4.a)$$

у випадку, коли ця хвиля *симетрична* (відносно центру антени), або

$$I(z') = I_k^0 \sin(k z') \quad (8.4.б)$$

якщо вона є *антисиметричною*.

Умова збудження в антені однієї гармоніки стоячої хвилі

$$L = \left(\frac{\lambda}{2}\right)m, \quad (8.5)$$

де m – довільне ціле число (позитивне).

Знаючи вектор-потенціал $\vec{A}(\vec{r}, t)$ поля, можна тепер знайти напруженості різних компонент поля

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \left[\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) \times \vec{n} \right], \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \left[\left[\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

та вектор Умова-Пойнтінга:

$$\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} \left\langle \left\{ \left(\dot{\vec{A}} \right)^2 - \left(\vec{n} \cdot \dot{\vec{A}} \right)^2 \right\} \right\rangle. \quad (8.7)$$

Символ $\langle \dots \rangle$ в (7) означає усереднення по часу (або по періоду хвилі).

Індикатрисою називається кутовий розподіл інтенсивності випромінювання. Треба пам'ятати, що вздовж напрямку лінійного дроту лінійна антена не випромінює.

В загальному випадку індикатриса випромінювання антени, на довжині якої укладається m півхвиль, має m мінімумів під кутами $\theta_n^{\min}(m)$. Можна показати, що при $m \gg 1$ кут першого максимуму

$$\theta_1(m) \sim \frac{1}{\sqrt{m}}. \quad (8.8)$$

а при великих "m" потужність випромінювання в напрямку першого (головного) максимуму зростає пропорційно m. При цьому чим більша довжина антени, тим вузчий перший максимум.

Для знаходження загальної потужності P_m випромінювання оточимо антену сферою дуже великого радіуса $R \gg L, \lambda$ і

проінтегруємо інтенсивність випромінювання по поверхні цієї сфери:

$$P_m = \int_{\Omega} \vec{S}_m d\vec{\sigma}, \quad (8.9)$$

Опір випромінювання R_m^a вводиться як коефіцієнт пропорційності між P_m і середньоквадратичним струмом:

$$P_m = R_m^a \langle I^2 \rangle. \quad (8.10)$$

Зважаючи на те, що для гармонічних полів середнє значення квадрату струму

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} (I_m^0)^2, \quad (8.11)$$

може бути виражене через амплітудне значення I_m^0 , можна отримати

$$R_m^a = \frac{2P_m}{(I_m^0)^2}. \quad (8.12)$$

В загальному випадку антенний опір випромінюванню має комплексний характер: $Z(\lambda) = Z'(\lambda) + iZ''(\lambda)$. В умовах точного резонансу, коли $\lambda = \lambda_m$, уявна частина цього опору

$$Z''(\lambda_m) = 0 \quad \left(\lambda_m = \frac{2L}{m}, m = 1, 2, 3, \dots \right).$$

Для формування діаграм направленості спеціальних типів (наприклад, з високою направленістю лише в одному напрямку) можуть бути застосовано більш складні антени. Наприклад, для ромбічної антени можна підібрати такі параметри (довжини ребер, кути між ними), що випромінювання буде, в основному, зосереджено вздовж довгої осі ромба.

Живлення антени повинно підключатися таким чином, щоб розрив антенного дроту мав місце в області максимуму струму.

§8.1. Випромінювання антенн. Умови задач.

№800. В лінійній антені довжиною L збуджено стоячу хвилю струму з амплітудою I_0 частотою ω і вузлами на кінцях антени. Кількість напівхвиль струму, що містяться на довжині антени, дорівнює m . Знайти кутовий розподіл інтенсивності випромінювання.

№801. Знайти повну потужність P_m та опір випромінюванню R_m антени, що розглянуто в попередній задачі.

№802. На кінцях лінійної антени довжиною L розташовано таке навантаження, щоб позбутися відбитих хвиль. При цьому в ній розповсюджується біжуча хвиля струму $J=I_0 \exp[i(k\xi - \omega t)]$, де $k=\omega/c$, ξ - координата точки на антені. Знайти кутовий розподіл та повну інтенсивність випромінювання. Порівняти із випадком збудження стоячих хвиль.

№803. У круглій дротяній петлі радіуса R_0 збуджено стоячу хвилю струму $I = I_0 \cdot \vec{e}_\alpha(\alpha) \cdot \sin(\alpha \frac{R_0}{\lambda}) \cdot \exp[-i\omega t]$ (α - кут в площині антени). Знайти електромагнітне поле \vec{H} , \vec{E} у хвильовій зоні. Розглянути випадки петель малого (порівнянно із довжиною хвилі) і великого радіусів.

№804. Для попередньої задачі знайти кутовий розподіл інтенсивності випромінювання у хвильовій зоні.

№805. В круглій дротяній петлі радіуса R_0 збуджено біжучу хвилю струму $I = I_0 \cdot \vec{e}_\alpha(\alpha) \cdot \exp\left[i\left(\alpha \frac{R_0}{\lambda} - \omega t\right)\right]$ (α - кут в площині антени). Знайти електромагнітне поле \vec{H} , \vec{E} у хвильовій зоні. Розглянути випадки петель малого (порівнянно із довжиною хвилі) і великого радіусів.

№806. Для попередньої задачі знайти кутовий розподіл інтенсивності випромінювання у хвильовій зоні. Порівняти результати із випадком збудження стоячої хвилі.

№807. Лінійна антена має довжину $L = m(\lambda/2)$ і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується стояча хвиля з довжиною хвилі λ . Знайти положення абсолютних мінімумів індикатриси випромінювання відносно осі z при довільних (але цілочисельних) m .

№808. Лінійна антена має довжину $L = m(\lambda/2)$ і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується стояча хвиля з довжиною хвилі λ . Для $m=2$ знайти кут θ_1 напрямку першого максимуму і напівширину першої пелюстки випромінювання з точністю не гірше $1/m^2$.

№809. Лінійна антена має довжину $L = m(\lambda/2)$ і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується стояча хвиля з довжиною хвилі λ . Для $m=3$ знайти кут θ_2 напрямку другого максимуму і півширину другої пелюстки випромінювання з точністю не гірше $1/m^2$.

№810. Лінійна антена має довжину $L = m(\lambda/2)$ і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується стояча хвиля з довжиною хвилі λ . Для $m \gg 1$ знайти напрямок першого максимуму індикатриси випромінювання і потужність випромінювання в цьому максимумі.

№811. Лінійна антена має довжину $L = m(\lambda/2)$ і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується стояча хвиля з періодом λ . Для $m \gg 1$ знайти напрямок другого максимуму індикатриси випромінювання відносно осі z і потужність випромінювання в цьому максимумі.

№812. Лінійна антена має довжину L і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується біжуча хвиля з хвильовим вектором k . Знайти положення абсолютних мінімумів індикатриси випромінювання відносно осі z .

№813. Лінійна антена має довжину L і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується біжуча хвиля з хвильовим вектором k . Для

випадку $kL \gg 1$ знайти кут θ_1 напрямку першого максимуму та півширину першої пелюстки випромінювання.

№814. Лінійна антена має довжину L і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується біжуча хвиля з хвильовим вектором k . Для випадку $kL \gg 1$ знайти кут θ_2 напрямку другого максимуму і півширину другої пелюстки випромінювання.

№815. Лінійна антена має довжину L і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується біжуча хвиля з хвильовим вектором k . Для випадку $kL = 4\pi$ знайти напрямок першого максимуму індикатриси випромінювання і потужність випромінювання в цьому максимумі.

№816. Лінійна антена має довжину L і напрямлена вздовж осі z . В ній збуджується біжуча хвиля з хвильовим вектором k . Для випадку $kL = 4\pi$ знайти напрямок другого максимуму індикатриси випромінювання відносно осі z і потужність випромінювання в цьому максимумі.

№817. Антена являє собою два лінійних дроти довжиною L , розташовані на одній лінії так, що відстань між їхніми найближчими кінцями дорівнює d . В обох частинах антени збуджено стоячі хвилі довжиною $\lambda = 2L/m$ (m – ціле додатне число). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку симетричного живлення (тобто фази хвиль в обох дротах співпадають).

№818. Антена являє собою два лінійних дроти довжиною L , розташовані на одній лінії так, що відстань між їхніми найближчими кінцями дорівнює d . В обох частинах антени збуджено стоячі хвилі довжиною $\lambda = 2L/m$ (m – ціле додатне число). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку антисиметричного живлення (тобто фази хвиль в обох дротах відрізняються знаками).

№819. Антена являє собою два лінійних дроти довжиною L , розташовані на одній лінії так, що відстань між їхніми найближчими кінцями дорівнює d . В кожній частині антени збуджено біжучу хвилю з хвильовим вектором \vec{k} (тобто хвилі в кожному дроті

рухаються в один бік). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку симетричного живлення.

№820. Антена являє собою два лінійних дроти довжиною L , розташовані на одній лінії так, що відстань між їхніми найближчими кінцями дорівнює d . В кожній частині антени збуджено біжучу хвилю з хвильовим вектором \vec{k} . Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку антисиметричного живлення (тобто струм в обох дротах зсунуто по фазі на π).

№821. Антена являє собою два лінійних дроти довжиною L , розташовані на одній лінії так, що відстань між їхніми найближчими кінцями дорівнює d . В кожній частині антени збуджено біжучу хвилю, хвильові вектори для різних дротів відрізняються за знаком (тобто хвилі в кожному дроті рухаються в різні боки). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку синфазного живлення.

№822. Антена являє собою два лінійних дроти довжиною L , розташовані на одній лінії так, що відстань між їхніми найближчими кінцями дорівнює d . В кожній частині антени збуджено біжучу хвилю, хвильові вектори для різних дротів відрізняються за знаком (тобто хвилі в кожному дроті рухаються в різні боки). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку протифазного живлення.

№823. Антена являє собою два паралельні лінійних дроти довжиною L . Відстань між цими дротами дорівнює d . В обох частинах антени збуджено стоячі хвилі довжиною $\lambda = 2L/m$ (m – ціле додатне число). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку синфазного живлення (тобто фази хвиль в обох дротах співпадають).

№824. Антена являє собою два паралельних лінійних дроти довжиною L . Відстань між цими дротами дорівнює d . В обох частинах антени збуджено стоячі хвилі довжиною $\lambda = 2L/m$ (m – ціле додатне число). Знайти залежність індикатриси

випромінювання від d для випадку протифазного живлення (тобто фази хвиль в обох дротах відрізняються знаками).

№825. Антена являє собою два лінійних дроти довжиною L , що лежать на одній прямій. Мінімальна відстань між цими дротами дорівнює d . В кожній частині антени збуджено біжучу хвилю з хвильовим вектором \vec{k} (тобто хвилі в кожному дроті рухаються в один бік). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку синфазного живлення.

№826. Антена являє собою два паралельних лінійних дроти довжиною L . Відстань між цими дротами дорівнює d . В кожній частині антени збуджено біжучу хвилю з частотою ω і однаковими хвильовими векторами \vec{k} (тобто хвилі в кожному дроті рухаються в один бік). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку протифазного живлення.

№827. Антена являє собою два паралельних лінійних дроти довжиною L . Відстань між цими дротами дорівнює d . В кожній частині антени збуджено біжучу хвилю, хвильові вектори для різних дротів відрізняються за знаком (тобто хвилі в кожному дроті рухаються в різні боки). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку синфазного живлення.

№828. Антена являє собою два паралельних лінійних дроти довжиною L . Відстань між цими дротами дорівнює d . В кожній частині антени збуджено біжучу хвилю, хвильові вектори для різних дротів відрізняються за знаком (тобто хвилі в кожному дроті рухаються в різні боки). Знайти залежність індикатриси випромінювання від d для випадку протифазного живлення.

№829. Антена являє собою систему N паралельних вібраторів із довжиною сторін L та відстанню d між сусідніми вібраторами. В кожному вібраторі збуджено стоячу хвилю з довжиною $\lambda = 2L/m$ (m – ціле додатне число). Дослідити індикатрису випромінювання для випадку синфазного живлення сусідніх вібраторів.

№830. Антена являє собою систему N паралельних вібраторів із довжиною сторін L та відстанню d між сусідніми вібраторами. В кожному вібраторі збуджено стоячу хвилю з довжиною $\lambda = 2L/m$ (m – ціле додатне число). Дослідити індиатрису випромінювання для випадку протифазного живлення сусідніх вібраторів

№831. Антена являє собою систему N паралельних вібраторів із довжиною сторін L та відстанню d між сусідніми вібраторами. В кожному вібраторі збуджено біжучу хвилю з частотою ω . Дослідити індиатрису випромінювання для випадку синфазного живлення сусідніх вібраторів.

№832. Антена являє собою систему N паралельних вібраторів із довжиною сторін L та відстанню d між сусідніми вібраторами. В кожному вібраторі збуджено біжучу хвилю з хвильовим вектором \vec{k} . Дослідити індиатрису випромінювання для випадку протифазного живлення сусідніх вібраторів.

№833. Кутова антена складається із двох лінійних частин довжиною L кожна, які утворюють між собою прямий кут. В антені збуджується стояча хвиля з вузлами на краях та пучністю в точці з'єднання лінійних частин. На всій довжині антени $2L$ вкладається $2p+1$ півхвиль (p – ціле додатне число). Дослідити індиатрису випромінювання антени.

№834. Кутова антена складається із двох лінійних частин довжиною L кожна, які утворюють між собою прямий кут. В антені збуджується біжуча хвиля з частотою ω . Дослідити індиатрису випромінювання антени.

№835. Антена являє собою квадрат із довжиною сторін L . В ній збуджено стоячу хвилю з вузлами в одній парі протилежних вершин та пучностями в іншій парі вершин. Довжина хвилі $4L = m\lambda$ (m – ціле додатне число). Знайти індикатрису випромінювання антени.

№836. Антена являє собою квадрат із довжиною сторін L . В ній збуджено біжучу хвилю з частотою ω . Знайти індикатрису випромінювання антени.

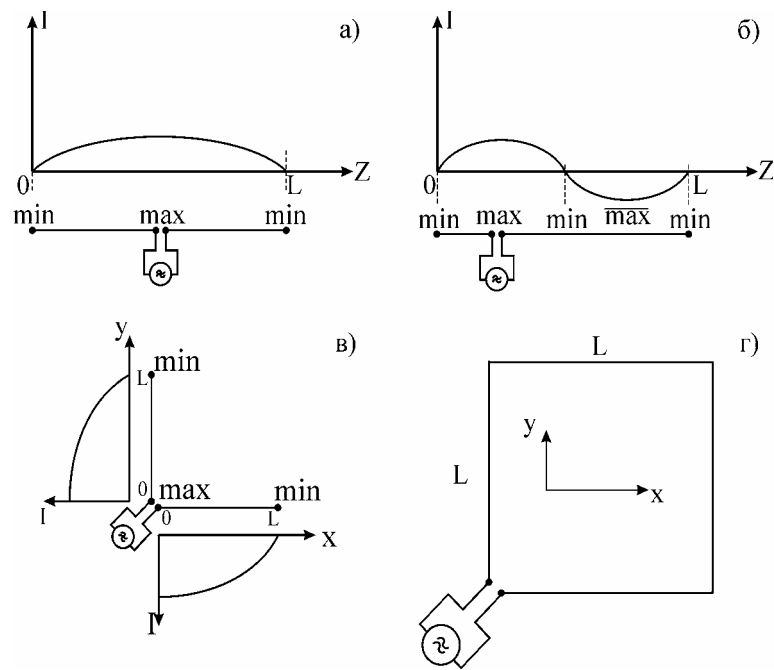


Рис. 8.1. Типи антен.

- а) Напівхвильова лінійна антена ($L=\lambda/2$). Стояча хвиля.
- б) Хвильова лінійна антена ($L=\lambda$). Стояча хвиля.
- в) Кутова антена. Стояча хвиля.
- г) Квадратна антена. Біжуча хвиля.

Додаток А. Дельта-функція

Операція, яка парі функцій $\phi(x)$ та $f(x)$ ставить у відповідність деяку третю функцію $\Phi(x)$, що визначається інтегралом

$$\Phi(x) = \phi * f = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - \xi) f(\xi) d\xi \quad . \text{ (A.1)}$$

називається **згорткою**.

Наведемо деякі властивості згортки:

1. $\phi * f = f * \phi$.
2. $(\phi * f) * \varphi = \phi * (f * \varphi)$.
3. $\phi * (f * \varphi) = \phi * f + \phi * \varphi$.

Із визначення операції згортки бачимо, що функція $\Phi(x)$ відмінна від нуля в деякій точці x_0 тільки тоді, коли існує інтервал, на якому обидві функції $\phi(x_0 - \xi)$ та $f(\xi)$ відмінні від нуля. Чим "гостріша" одна з функцій (наприклад $\phi(x)$), тим більше форма $\Phi(x)$ походить на форму іншої функції (в даному прикладі - $f(x)$).

Якщо в результаті виконання операції "згортки" ми отримуємо одну із підінтегральних функцій, то інша (що забезпечує таку властивість перетворення) зветься **дельта – функцією Дірака**. Останнє означення можна записати у вигляді:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x) \delta(x - b) dx = f(b), \quad \text{(A.2)}$$

де вважається, що $a_1 < b < a_2$. Використовуючи пряме

$$F(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{skb} dk \quad (\text{A.3.a})$$

та обернене Фур'є-перетворення

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-ikx} dx \quad (\text{A.3.б})$$

та підставляючи (A.3.б) в (A.3.a) неважко отримати

$$F(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-ikx} dx \right] e^{ikb} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot F(x) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(b-x)} \right] \quad (\text{A.4})$$

Порівнюючи (A.4) з (A.2) знаходимо інтегральне представлення дельта-функції:

$$\delta(x-b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(b-x)} dx \quad (\text{A.5})$$

Зокрема, із (A.5) витікає, що дельта-функція є парною функцією свого аргументу.

З іншого боку дельта-функцію Дірака можна визначити таким чином

$$\left. \begin{aligned} \delta(x) &= \infty & x &= 0, \\ \delta(x) &= 0 & x &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6.a})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (\text{A.6.б})$$

Зауважимо, що дельта-функція не є функцією в звичайному розумінні цього слова, а належить до класу так званих **узгальнених функцій**.

Наведемо деякі властивості δ -функції, які використовуються найчастіше:

$$\left. \begin{aligned} \delta(-x) &= \delta(x), \\ \delta(ax) &= \frac{1}{a} \delta(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x - x_0) dx &= \phi(x_0), \\ \frac{d^n}{dx^n} \delta(x) &= (-1)^n \frac{n!}{x^n} \delta(x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7})$$

Розглянемо випадок більш складного інтегрування, коли дельта-функція сама залежить від іншої функції :

$$I = \int_{a_1}^{a_2} F(x) \cdot \delta[\varphi(x)] dx \quad (\text{A.8})$$

Коли існує пряма функція $\varphi = \varphi(x)$, то звичайно можна знайти і обернену залежність $x = x(\varphi)$. Це дозволяє перетворити (A.8) до такого вигляду:

$$I = \int F(x(\varphi)) \delta(\varphi) \frac{1}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)} d\varphi = \frac{F(x(\varphi=0))}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{\varphi=0}} \quad (\text{A.9})$$

Фігуруючі з правого боку функції F та x беруться в точці $\varphi = 0$. Звернемо увагу на те, що рівняння

$$\varphi(x_n) = 0 \quad (\text{A.10})$$

може мати багато коренів x_n (Рис.А.1). Тому більш правильно писати:

$$I = \sum_n \frac{F(x_n)}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=x_n}} \quad (\text{A.11})$$

де сума береться по всіх коренях рівняння (A.10), що належать інтервалу (a, b) .

Порівнюючи (A.11) і (A.8) приходимо до висновку про тотожність двох операцій: використання дельта-функції від складного аргументу та сума дельта-функцій із ваговими множниками. Останнє твердження можна записати у вигляді рівності:

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_n} \quad (\text{A.12})$$

Сума в (A.12) береться по таких n , для яких виконується умова : $a_1 < x_n < a_2$.

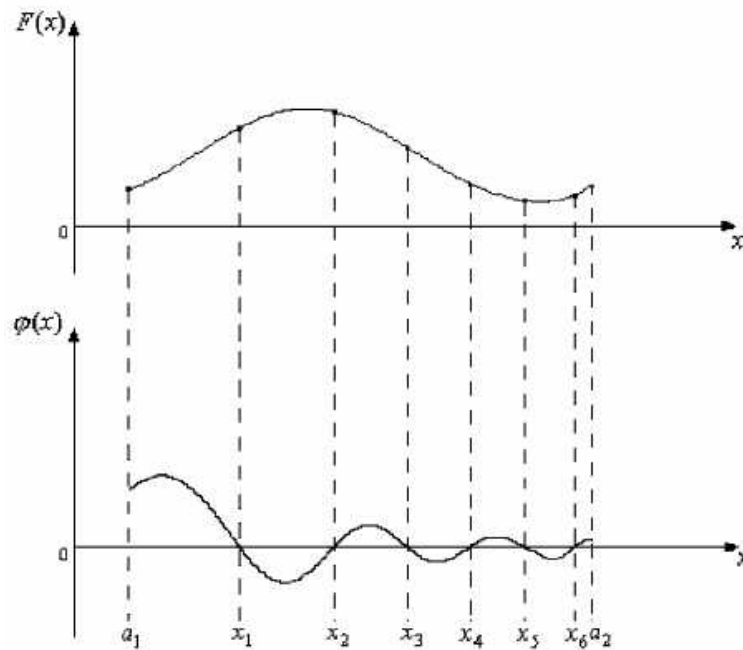


Рис. А.1.

Додаток Б. Теорія лишків.

Якщо $a = a' + ia''$ – ізольована особлива точка аналітичної функції $f(z)$, то поблизу від a остання функція може бути розкладена **в ряд Лорана**:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n. \quad (\text{Б.1})$$

Коефіцієнт $(z-a)^{-1}$ в цьому розкладі (тобто A_{-1}) називається **лишком** функції $f(z)$ відносно особливої точки a . Звичайно він позначається знаком $\text{Res } f(z)$. Можна показати, що

$$A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (\text{Б.2})$$

де інтегрування відбувається на комплексній площині $z = z' + iz''$ по контуру γ (мале коло) з центром в точці a .

Нехай a_1, a_2, \dots, a_m (Рис. Б.1) – прості полюси функції $f(z)$, що лежать всередині деякого контуру L . Допоміжні контури $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ – то малі кола навколо цих точок (полюсів). Останні повинні лежати всередині області L і не перетинатися один з одним. В цьому випадку **основна теорема про лишки** може бути представлена в такому вигляді:

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \left[\text{Res}_a f(z) + \text{Res}_b f(z) + \dots + \text{Res}_m f(z) \right]. \quad (\text{Б.3})$$

Зауважимо, що обхід усіх контурів інтегрування повинен проводитись **проти годинникової стрілки**. Остання умова

пов'язана із тим, що звичайно комплексне число z подають у вигляді

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (\text{Б.4})$$

а зростання кута φ від нуля до 2π відповідає руху як раз проти годинникової стрілки. У випадку обходу контурів за годинниковою стрілкою відповідні лишки беруться зі знаком “мінус”.

Якщо a являє собою n -кратний полюс для $f(z)$, то

$$\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right\}. \quad (\text{Б.5})$$

При $n = 1$ (простий полюс) ця формула приймає вигляд

$$\operatorname{Res}_a f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)]. \quad (\text{Б.6})$$

У відповідності з основною теоремою для обчислення інтегралу вздовж замкненого контуру L достатньо знати лишки функції відносно особливих точок, які лежать усередині L .

Розглянемо лишок відносно простого полюсу. Нехай задана функція $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де чисельник та знаменник, які беруться

окремо, аналітичні поблизу від a . Припускається, що точка a – простий нуль для знаменника $\psi(z)$. Якщо при цьому $\varphi(a) \neq 0$, то a буде **простим полюсом** для функції $f(z)$. Введемо позначення $\psi(z) = (z-a)\psi_1(z)$, де допоміжна функція $\psi_1(z)$ аналітична поблизу a і $\psi_1(a) \neq 0$. Тоді поблизу точки a функція $\frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)}$ аналітична і

лишок дорівнює

$$\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}. \quad (\text{Б.7})$$

Оскільки $\psi'(a) = \psi_1(a)$, то із (7) випливає

$$\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (\text{Б.8})$$

Правило обчислення лишків (Б.8) дозволяє легко знаходити інтеграли з простими полюсами.

Нехай $f(z)$ – функція, яка не має особливих точок на дійсній осі, але має скінчену кількість особливих точок a, b, \dots, k вище дійсної осі (Рис. А.1). Поділимо контур L на дві частини: пряму, що лежить на дійсній осі, і напівколо C , що замикає контур

$$\oint_L f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_C f(z) dz. \quad (\text{Б.9})$$

При великому радіусі R замикаючого напівкола C точки a, b, \dots, k будуть лежати усередині контуру L . Спрямуємо тепер $R \rightarrow \infty$. Якщо при $|z| \rightarrow \infty$ (в верхньому напівколі) модуль підінтегрального виразу $|f(z)|$ наближається до нуля скоріше, ніж $1/|z|$, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = 0. \quad (\text{Б.10})$$

При цьому із (Б.3, 9, 10) випливає, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[\operatorname{Res}_a f(z) + \dots + \operatorname{Res}_k f(z) \right] \quad (\text{Б.11})$$

Одержаний результат часто використовують для обчислення інтегралів по нескінченій прямій.

Зрозуміло, що існують обмеження на характер підінтегральної функції. Формула (Б.11) може застосовуватись, зокрема, якщо $f(z)$ є раціональним дробом, в якому знаменник не має дійсних коренів і ступінь знаменника перевищує ступінь чисельника більш, ніж на одиницю. Крім того, вона застосовується, якщо $f(z)$ задовольняє таким умовам: має на нескінченності нуль кратності ≥ 2 , не має

особливих точок на дійсній осі і має тільки скінчене число особливих точок вище дійсної осі.

Додаток В. Інтеграл Френеля.

Як приклад застосування теорії лишків розглянемо такі інтеграли:

$$C_F = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx, \quad S_F = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx. \quad (\text{B.1})$$

За теоремою Коші (1825 р.) інтеграл від будь-якої регулярної аналітичної функції $f(z)$ від комплексної змінної $z = z' + iz''$

$$\int_a^b f(z) dz, \quad (a, b \in D) \quad (\text{B.2})$$

не залежить від вибору путі інтегрування між точками a і b в однозв'язній області D . Зокрема, інтеграл від функції $f(z) = \exp(iz^2)$, взятий по будь-якій замкненій кривій (контуру) γ

$$\int_{\gamma} \exp(iz^2) dz = 0, \quad (\text{B.3})$$

дорівнює нулю⁵ тому що в цьому випадку $a \equiv b$ (початок і кінець путі інтегрування співпадають), а полюсів підінтегральна функція ніде не має. Зокрема, дорівнює нулю інтеграл по контуру сектора AOB (Рис. А.1):

$$\int_{OABO} e^{iz^2} dz = \int_{OA} e^{iz^2} dz + \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz = 0. \quad (\text{B.4})$$

Відрізок OA лежить на дійсній осі, тому у відповідності з (B.4) можна записати:

⁵ Узагальненням цієї теореми на випадок функції багатьох змінних $f(z) \equiv f(z_1, z_2, z_3, \dots)$ є теорема Коши – Пуанкаре.

$$\int_{OA} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx = - \int_{AB} e^{iz^2} dz - \int_{BO} e^{iz^2} dz. \quad (\text{B.5})$$

Комплексне параметричне зображення дуги AB можна записати в такому вигляді $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Тому інтеграл по цій дузі має такий вигляд:

$$\int_{AB} e^{iz^2} dz = \int_0^{\pi/4} \exp [iR^2 \exp(2i\varphi)] Re^{i\varphi} d\varphi = iR \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\varphi + i(R^2 \cos 2\varphi + \varphi)} d\varphi. \quad (\text{B.6})$$

Звідси випливає оцінка

$$\left| \int_{AB} e^{iz^2} dz \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\varphi} d\varphi < R \int_0^{+\infty} e^{-\frac{4R^2\varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{\pi}{4R} \quad (\text{B.7})$$

(при виведенні (B.7) враховано, що $\sin \theta > 2\theta/\pi$ в області $0 < \theta < \pi/2$). Спрямовуючи тепер $R \rightarrow \infty$, одержуємо із (B.5)

$$\int_{AB} e^{iz^2} dz = 0, \quad \int_0^{\infty} \exp(ix^2) dx = - \int_{BO} e^{iz^2} dz = + \int_{B0} e^{iz^2} dz. \quad (\text{B.8})$$

Комплексне параметричне рівняння відрізка OB є

$$z = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \rho, \quad 0 \leq \rho \leq R. \quad (\text{B.9})$$

При цьому

$$\int_{OB} e^{iz^2} dz = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho. \quad (\text{B.10})$$

Із (B.10) одержуємо

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{OB} e^{iz^2} dz \rightarrow \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{B.11})$$

Підставляючи (B.11) в (B.8), знаходимо:

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+i). \quad (\text{B.12})$$

Розділяючи в (B.12) дійсну і уявну частини, одержуємо:

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (\text{B.13})$$

Звідки (внаслідок парності підінтегральних функцій) випливають рівності

$$C_F = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad S_F = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (\text{B.14})$$

що звуться *інтегралами Френеля*.

Додаток Г. Пуассонівські інтеграли.

Нагадаємо метод знаходження інтегралу Пуассона $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2} dx$, де A – дійсна константа. Звичайно, для цього застосовується такий штучний прийом: спочатку розглядається квадрат від одновимірного інтеграла Пуассона:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ay^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-AR^2} R dR d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-AR^2} d\left(\frac{R^2}{2}\right) = \pi \int_0^{\infty} e^{-A\xi} \cdot d\xi = \frac{\pi}{A} \end{aligned} \quad (\text{Г.1})$$

і використовується перехід до циліндричної системи координат (робиться заміна змінних $R^2 = \xi$). Звідси неважко знайти простий інтеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}. \quad (\text{Г.2})$$

Диференціюючи n разів по A обидві сторони (Г.2) і користуючись парністю підінтегрального виразу можна знайти

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^{n/2} \cdot 2}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (\text{Г.3})$$

Для випадку непарних ступенів коефіцієнта перед експонентою неважко отримати, що

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right], \quad (n = 2m+1, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{Г.4})$$

Розглянемо тепер узагальнений інтеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-C(x+i\gamma)^2] dx = \sqrt{\frac{\pi}{C}} \quad (\Gamma.5)$$

де константа C є комплексною $C = A - iB$, а γ - довільне комплексне число. Тут і нижче використовується властивість (Г.5) не змінюватись, якщо шлях інтегрування буде довільно зсунуто у комплексній площині. Можна показати, що інтеграл (Г.5) збігається при умові $\operatorname{Re} C = A > 0$.

Розглянемо частковий випадок: $\gamma = -\frac{D}{C}$, де константа D - дійсна величина. Розкриваючи в (Г.5) квадрат

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(A-iB)\left(x^2 - 2ix\frac{D}{C} - \frac{D^2}{C^2}\right)\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-Cx^2 + 2ixD + \frac{D^2}{C}\right] dx = \sqrt{\frac{\pi}{C}}$$

і переносячи $\exp[-D^2/C^2]$ в протилежний бік, знаходимо¹⁾:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-Ax^2 + i(Bx^2 + 2Dx)] dx = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \exp\left[-\frac{A+iB}{A^2 + B^2} D^2 + \frac{i}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)\right] \end{aligned} \quad (\Gamma.4)$$

Тут A, B, D - дійсні коефіцієнти, причому $A > 0$. Надалі цей вираз ми будемо звати "**довгий**" інтеграл. Він є типовим для задач, де фігурують гаусові розподіли.

¹⁾ И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.,1971 (стр 499, 3.923).

Додаток Д. Деякі означені інтеграли

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} = 2.31 \quad (\text{Д.1})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \pi^2 / 6 \quad (\text{Д.2})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2.45 \quad (\text{Д.3})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \pi^4 / 15 \quad (\text{Д.4})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{e^x - 1} = 29.4 \quad (\text{Д.5})$$

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0.225, & \alpha = 1 \\ 1.18, & \alpha = 2 \\ 2.56, & \alpha = 3 \\ 4.91, & \alpha = 5 \\ 6.43, & \alpha = 10 \end{cases} \quad (\text{Д.6})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \exp\left(-\frac{\omega}{\beta}\right) \quad (\text{Д.7})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t \cdot \sin \omega t}{\beta^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2\beta} \exp\left(-\frac{\omega}{\beta}\right). \quad (\text{Д.8})$$

(дивись (Г-3.728)).

Додаток Е. Розклад Фур'є.

Функція, що задовольняє умові

$$f(t+T) = f(t) \quad (\text{E.1})$$

називається *періодичною функцією*. Вона може бути представлена у вигляді розкладу

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\omega) \exp(i\omega t), \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right), \quad (\text{E.2})$$

який називається *розкладом Фур'є*. Коефіцієнти цього ряду визначаються формулою:

$$f_n(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \exp(-in\omega\tau) d\tau, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{E.3})$$

Розклад в ряд Фур'є еквівалентний твердженню, що довільна періодична функція з періодом $T = 2\pi/\omega$ може бути представлена у вигляді суперпозиції нескінченного числа доданків з періодами

$$T_1 = T, T_2 = \frac{T}{2}, \dots, T_n = \frac{T}{n}, \dots, (n = 1, 2, 3, \dots \infty) \quad (\text{E.4})$$

або (що те ж саме) з частотами: $\omega, 2\omega, \dots, n\omega$.

У граничному випадку $T \rightarrow \infty$, коли період необмежено зростає (при цьому інтервал між сусідніми дозволеними частотами $\Delta\omega \rightarrow 0$), реалізується розклад в **інтеграл Фур'є**:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{E.5.a})$$

Фур'є-компонента від $f(t)$, визначається формулою

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{E.5.б})$$

За допомогою інтеграла Фур'є можна розкласти неперіодичні функції. Цей розклад можливий, якщо властивості функції $f(t)$ забезпечують збіжність інтегралів (Е.5). Звичайно у фізично реалізуємих процесах $f(t \rightarrow \pm\infty) = 0$, що забезпечує обмеженість функції фур'є-образу $F(\omega)$.

Числові коефіцієнти, що коштують перед інтегралами (Е.5) визначені неоднозначно (однозначними є тільки їхній добуток рівне $1/2\pi$). Тому часто використовується інша (симетрична) форма інтеграла Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (\text{Е.6.а})$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (\text{Е.6.б})$$

Відзначимо, що навіть якщо $f(t)$ речовинна функція, того відповідного фур'є – компонента $F(\omega)$ в загальному випадку буде комплексною функцією, що має властивість

$$F^*(\omega) = F(-\omega). \quad (\text{Е.7})$$

Формули (Е.6) можна об'єднати у виді вираження

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt f(\tau) \exp[i\omega(t - \tau)] \quad (\text{Е.8})$$

називаного **подвійним інтегралом Фур'є**.

Фур'є-компоненті $F(\omega)$, іменовану також **комплексною амплітудою** можна записати у виді

$$F(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}, \quad (\text{Е.9})$$

де введений **модуль** $A(\omega)$ і **фаза** $\varphi(\omega)$ функції $F(\omega)$. Вони є речовинними функціями.

Розглянемо інтеграл від квадрата функції $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right\} d\omega \quad (\text{E.10})$$

По визначенню (E.6.б)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt = F^*(\omega). \quad (\text{E.11})$$

З (E.10, 11) випливає рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (\text{E.12})$$

іменоване *співвідношенням Парсеваля*.

Додаток Ж : Одиниці вимірів та фізичні константи

1. Одиниці вимірів

Одиниця	Позначення		Одиниця	Позначення
Ампер	<i>A</i>		Радіан	<i>рад</i>
Ангстрем .	<i>Å</i>		Секунда	<i>сек</i>
Ват	<i>Вт</i>		Стерадіан	<i>стер</i>
Вольт	<i>V</i>		Електрон-вольт	<i>eB</i>
Гаус	<i>Gc</i>		Ерг	<i>ерг</i>
Герц	<i>Гц</i>		Ерстед	<i>E</i>
Грам	<i>г</i>			
Дина	<i>дин</i>			
Кулон	<i>K</i>			
Кюрі	<i>Кюрі</i>			
Максвел	<i>Мкс</i>			
Метр	<i>м</i>			
Хвилина	<i>хв</i>			
Ньютон	<i>H</i>			

Десяткові приставки до назв одиниць:

Г – гіга (10^9)	м – мілі (10^{-3})
М – мега (10^6)	мк – мікро (10^{-6})
К – кіло (10^3)	

2. Співвідношення між деякими одиницями.

$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$ $1 \text{ Фермі} = 10^{-13} \text{ см}$ $1 \text{ дж} = 10^7 \text{ ерг}$	$1 \text{ е} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг}$ $1 \text{ до} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЕ}$ $1 \text{ ом} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ СГСЕ}$	$1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЕ}$ $1 \text{ В} = 1/300 \text{ СГСЕ}$ $1 \text{ рік} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ сек}$
--	---	--

3. Головні фізичні константи

Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$
Гравітаційна постійна	$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г сек}^2)$
Число Авагадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Число Лошмідта	$n_0 = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$
Універсальна газова постійна	$R = 8,314 \text{ Дж/(град} \cdot \text{моль)}$
Стандартний об'єм газу	$V_0 = 22,42 \text{ л/моль}$
Постійна Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ ерг/град}$
Постійна Планка	$h = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с}$
Елементарний заряд	$e = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЕ}$
Питомий заряд електрона	$e/m = 5,273 \cdot 10^{17} \text{ СГСЕ/г}$
Число Фарадея	$F = 96520 \text{ К/г екв}$
Постійна Стефана-Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/(см}^2 \cdot \text{град}^4)$
Постійна закону зсуву Віна	$b = \lambda_m T = 0,29 \text{ см} \cdot \text{град}$
Стала Рідберга	$R_\infty = \frac{m_e e^4}{2h^3 c} = \begin{cases} 2,07 \cdot 10^{16} \text{ рад/сек} \\ 109737,31 \text{ см}^{-1} \end{cases}$

Перший борівський радіус	$r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.529 \cdot 10^{-8} \text{ см}$
Енергія зв'язку електрона в атомі водню	$E = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13,59 \text{ eV}$
Комптонівська довжина хвилі	$\Lambda = \frac{\hbar}{mc} = \begin{cases} 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ см (e)} \\ 2,10 \cdot 10^{-14} \text{ см (p)} \end{cases}$
Класичний радіус електрона	$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$
Перетин томсонівського розсіювання	$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$
Стала тонкої структури	$\alpha = e^2 / \hbar c = 1/137$
Магнетон Бора	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0,927 \cdot 10^{-20} \text{ ерг} / E$
Ядерний магнетон	$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 5,05 \cdot 10^{-24} \text{ ерг} / E$
Одиниця маси (а.о.м. = 1/12 маси атома ^{12}C)	$1 \text{ а.о.м.} = \begin{cases} 1,660 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 931,44 \text{ MeV} \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. М.М.Бредов, В.В.Румянцев, И.Н.Топтыгин. Классическая электродинамика. М.1985.
2. С.И.Баскаов. Электродинамика и распространение радиоволн. М.1992.
3. В.М.Галицкий, В.М.Ермаченко. Макроскопическая электродинамика. М.1988.
4. А.Н.Матвеев. Электродинамика. М.1980.
5. Ю.В.Новожилов, Ю.Я.Яппа. Электродинамика. М.1978.
6. В.И.Сугаков. Теоретическая физика. Электродинамика. Л.1974.
7. Л.П.Терлецкий, Ю.П.Рыбаков. Электродинамика. М.1990.
8. А.М.Федорченко. Теоретическая физика. Классическая электродинамика. К.1988.
9. А.И.Алексеев. Сборник задач по классической электродинамике. М.1977
10. В.В.Батыгин, И.Н.Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. М.1970.
11. Дж.Кронин, Гринберг, В.Телегди. Сборник задач по физике с решениями. М.1971.
12. Д.М.Мазуренко, М.М.Альперин. Задачі і вправи з теоретичної фізики. К.1978.
13. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике. М. 1970.
14. Э.Маделунг. Математический аппарат физики. М.1968.