1 Біном Ньютона і ММІ.

Біном Ньютона: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

1) $\left(\sqrt[3]{x^2} \pm \frac{2}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$;

2) Знайти в розкладі коефіцієнт біля елементу без x $\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^{16}$.

Метод Математичної індукції:

0) Формула Бінома за допомогою ММІ

1)За допомогою ммі довести наступну тотожність: $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$. 2)За допомогою ммі довести наступну тотожність: $1^3+2^3+...+n^3 = (1+2+...+n)^2, n \in \mathbb{N}$.

3) довести нерівність $(1+x)^n \geq 1+nx$, якщо $x > -1$ при $n > 1$. Рівність справедлива тільки при $x = 0$.

4) ДОвести нерівність $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n \geq 2$

5*)$n^{n+1} > (n+1)^n, n \geq 3$.

Д.З. з Демидович №1,4,6,10в,г. Обчислити $99^5 = (100-1)^5$.

2 Комплексні числа.1

1)Алебраїчна форма комплексного числа:

a)Знайти $z_1 \pm z_2, z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$ якщо $z_1 = -2+3i, z_2 = 7-8i$.

b)Обчислити REz, Imzдля числа $z = \frac{2-3i}{1+4i^{21}} + i^6 - \frac{1}{i^{33}}$.

2)Зобразити на комплексній площині множину точок, які задовольняють умову $|z-2+3i| < 5, Rez^2 > 1$.

3)Тригонометрична і показникова форми. Записати числа в тригонометричній та показниковій формах.

a)$3i$; b)-5; c)-2+2i; d)8-6i; e*)$sin\frac{3\pi}{4} - icos\frac{3\pi}{4}$.

4) Обчислити a)$(1-i)^{100}; b) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^{13}$; c)$\frac{(-2+2i)^{24}}{(3-i\sqrt{3})^{60}}$.

5) Знайти всі значення коренів:

a)$\sqrt[4]{-16}$; b)$\sqrt[3]{-1+i}$, c)$\sqrt[5]{i}$.

6)Понизити степінь $sin^5\varphi$.

7) Записати через $cos\varphi, sin\varphi$ $cos5\varphi$.

Комплексні числа.2

1)Алебраїчна форма комплексного числа:

a)Знайти $z_1 \pm z_2, z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$ якщо $z_1 = -4-3i, z_2 = 6-8i$.

b)Обчислити REz, Imzдля числа $z = \frac{-3+2i}{1-4i^{211}} + i^9 - \frac{1}{i^{31}}$.

2)Зобразити на комплексній площині множину точок, які задовольняють умову $|z+1+3i| < 5, Imz^2 > 1$.

3)Тригонометрична і показникова форми. Записати числа в тригонометричній та показниковій формах.

a)$-2i$; b)3; c)-2-2i; d)-5-6i; e*)$sin\frac{3\pi}{4} - icos\frac{3\pi}{4}$.

4) Обчислити a)$(1+i)^{100}; b) \left(\sqrt{3}+3i\right)^{13}$; c)$\frac{(-2-2i)^{24}}{(3-i\sqrt{3})^{120}}$.

5) Знайти всі значення коренів:

a)$\sqrt[4]{81}$; b)$\sqrt[3]{-1-i}$, c)$\sqrt[5]{-3i}$.

6)Понизити степінь $sin^6\varphi$.

7) Записати через $cos\varphi, sin\varphi$ $cos6\varphi$.

Д.З. 1)Алебраїчна форма комплексного числа:

a)Обчислити REz, Imzдля числа $z = \frac{1-i^{23}}{-1+2i^{31}} + i^{216} - \frac{1+3i}{i^{27}}$.

2)Зобразити на комплексній площині множину точок, які задовольняють умову $|z-1-i| < 2, Re\frac{1}{z}$.

3)Тригонометрична і показникова форми. Записати числа в тригонометричній та показниковій формах.

a)$-7i$; b)10; c)-3+2i; d)$1-\sqrt{3}i$; e*)$2cos\frac{7\pi}{4} - \frac{2}{i}sin\frac{\pi}{4}$.

4) Обчислити a)$(-1-i)^{26}; b) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^{13}$; c)$\frac{(-3+2i)^{24}}{(5-6i\sqrt{3})^{60}}$.

5) Знайти всі значення коренів:

a)$\sqrt[4]{16}$; b)$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}$, c)$\sqrt[5]{-2i}$.

d)Розв'язати рівняння $z^4+z^2+1=0$.
6)Понизити степінь $cos^6\varphi$.
7) Записати через $cos\varphi, sin\varphi$ $sin7\varphi$.

Границі числових послідовностей. Число е. Підпослідовності.1

Обчислити границі $\lim_{n\to\infty} a_n$ для наступних числових послідовностей.
1)$a_n = \frac{5n^3-3n^2}{n^3+1}$;
2)$a_n = \frac{5n-3n^2}{n^3+1}$;
3)$a_n = \frac{5n^3-3n^2}{n^2+1}$;
4)$a_n = 1+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$;
5)$a_n = \sqrt{9n^2+2n+1}-3n$;
6)$a_n = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n(n-2)}\right)$;
7)$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}sin3n!}{n+1}$;
8)$a_n = \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;
9)$a_n = \frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}; |a|<1, |b|<1$;
10) $a_n = \frac{a^n}{1+a^n}, a\geq 0$;
11)$a_n = \frac{2^n+n^{100}+\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n}+5^n+1}$;
12)$a_n = \sqrt[n]{n^3+3n-1}$;
13)$a_n = a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_n}{10^n}$,де $0\leq a_n\leq 9-$ цілі числа.
14)$a_n = \frac{2^n}{n!}$;
15)$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.
16)$a_n = \frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n+1}{2}$;
17)$a_n = \frac{n-1}{n+1}cos\frac{2\pi n}{3}+(-1)^n$.
Д.З. 1)№58; 47;57; 79;81.
2)$a_n = 1+\frac{1}{2*5}+\frac{1}{5*8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;
3)$a_n = \sqrt{n(n+3)}-\sqrt{n^2-3n+2}$;
4)$a_n = n\sqrt{n}\left(n-\sqrt[3]{n^3-2}\right)$;
5) $a_n = \frac{a^n+3b^n}{5a^n+3b^n}, a>0, b>0$;
6)$a_n = \sqrt{\sqrt[n]{n+sinn}+arctgn}$;
7)$a_n = \frac{n^3+2^n+cosn}{2^{n+1}+sinn!}$.
№107, 108, 112

3 Техніка обчислення границь функцій.Чудові границі.

Обчислити границі
1)$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$;
2)$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$;
3)$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$;
4)$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;
5)$\lim_{x\to 1}\frac{x^{216}-1}{x^{375}-1}$;
6)$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{43}-43x-1}{x^{43}+3x^2}$;
7)$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;
8)$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{-2+\sqrt[4]{x+9}}$;
9)$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}$;
Чудові границі: 10)а)$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{2x}$;

b)$\lim_{x\to\infty}\frac{sin3x}{2x}$;
c) $\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{tg22x}$;
d)$\lim_{x\to 0}\frac{cos3x}{2x}$;
e)$\lim_{x\to 0}\frac{cos3x-1}{sin^2 2x}$;
f)$\lim_{x\to 0}\frac{cos3x-cos5x}{2sin^2x-sin^2 3x}$;
g)$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x-sin3x}{sin^3 2x}$;
11) a)$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$;
b)$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x-1}\right)^{3x-1}$;
c)$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{\frac{x^5+3x^2+1}{2x^2-1}}$;
d)$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg3x}$;
12) $\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{5x}$;
13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-cosx}{e^{2x}-1-sin2x}$;
14)$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tg3x}-\sqrt{1+sin3x}}{sin^3 2x}$;
15) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+xsinx-1}}{e^{x^2}-1}$;

Д.З.
411, 421, 413, 437, 443, 463
474,477,480,482,499
512,514,519б),523,501,502,542,547,572

4 0-символіка. Неперервність.

1. Нехай $x\to 0$.Виділити головний член вигляду Cx^n визначити коефіцієнт C і порядок малості n по відношенню до змінної x функції $f(x)=tgx-sinx$.

2. Нехай $x\to\infty$.Виділити головний член вигляду Cx^n визначити коефіцієнт C і порядок росту n по відношенню до змінної x функції $f(x)=\frac{2x^5}{x^3-3x^2+1}$.

3. Нехай $x\to 1$.Виділити головний член вигляду $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ визначити коефіцієнт C і порядок росту n по відношення до змінної x функції $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

4*. Ребро куба $a\in[2;3]$. З якою абсолютною похибкою потрібно виміряти ребро, щоб об'єм куба можна було обчислити з абсолютною похибкою небільшою 0,1 ^{3}.

5. Дослідити точки розриву наступних функцій, зобразити схематично графік функції:
a) $f(x)=\frac{sinx}{|x|}, x\neq 0, f(0)=0$;
b) $f(x)=\frac{sinx}{|x|}, x\neq 0, f(0)=1$
c) $f(x)=signx$;
d) $f(x)=[x]$;
5.Дослідити точки розриву наступних функцій
a) $f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$;
b)$f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$.

Д.З.
653б,655г),657г)656а)
680,686,688,696, 702,717

5 Похідна, диференціал явно заданої функції.

1) Обчислити $y\prime$ і dy
a)$y=x^4-(2x+5)^8+\frac{1}{5x^4-1+\sqrt[6]{(3x^5-4x^2+8)^7}}$;
b)$y=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2+1}$;
c)$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
2)a)$y=2^{3x-1}$;

b)$y = (x^3 - 3x^7)e^{2\sqrt{x}-1}$;
3)a)$y = sin(3x^4\sqrt{2x-1})$;
b)$y = sin(cosx)cos(sinx)$;
c)$y = 2^{cos^2 3x}$;
d)$y = tg(4e^{3x-1})$;
e)$y = \frac{sin2x}{tg8x}$;
4)a)$y = arcsin(cos2x)$;
b)$y = arctg(\sqrt{2x-1})arccos(\sqrt{2x})$
c)$y = ln(sin^2 3x - cos^3 2x)$;
d)$y = ln\frac{1-x}{1+x}$;
5) a)$y = chx, y = shx, thx.$
6)a)$y = (sin2x)^{cos3x}$;
b)$y = x^x$;
c)$y = x^{lnx}$;
d)$y = x^{2^x} + 2^{x^x} + x^{x^2}$.

Формула малих приростів.

$$y(x_0 + \triangle x) \approx y(x_0) + y\prime(x_0)\triangle x$$

7. Обчислити наближено наступні значення
a) $cos61, \sqrt[3]{1,02}$.
b) З якою похибкою треба обчислити радіус R, щоб його об'єм можна було обчислити з точністю до 0,01.
Д.З. В наступних задачах написати і диференціал функції
848,859,861,866, 875, 877,884,888, 897, 911,922,925,932,944,965.2, 968, 969, 966, 979.
1106,1103,1100.

6 Похідна вищих порядків.

Похідні старших порядків

.

$$y^{(n)}(x) = (y^{n-1}(x))\prime.$$

$$d^{(n)}y(x) = d(d^{n-1}y(x)) = y^{(n)}(x)dx^n$$

, якщо x незалежна змінна.
$(e^x)^{(n)} = e^x$;
$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$;
$(lnx)^{(n)} = (n-1)!(-1)^{n-1}x^{-n}$;
$(sinx)^{(n)} = sin(x + n\frac{\pi}{2})$;
$(cosx)^{(n)} = cos(x + n\frac{\pi}{2})$;
Формула Лейбніца $(f * g)^{(n)} = \sum_{k=o}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

Похідні параметрично заданих функцій.

Нехай задано функцію $y = y(t), x = x(t)$.

$$y\prime(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dx}{dx/dt}.$$

$$y\prime\prime(x) = \frac{1}{dx}(dy/dx) = \frac{\frac{1}{dt}(dy/dx)}{dx/dt}.$$

1. Обчислити похідні 1-3 порядків для функції $y = sin(3x^2 + e^{3x})$.
2.Обчислити похідні і диференціали] 1-3 порядків для функції $y = xe^{3x}$.
3.Обчислити похідні 1-3 порядків для функції $y = 3cost, x = 3sint$.
4.Обчислити похідні 1-3 порядків для функції $y = 3 + e^t, x = 3 - t^2$.

5. Обчислити похідні 1,2 порядків для функції заданої неявно $y^2x + 2ln\frac{x}{y} = x^4$.
6. ДЛя $y = \sqrt{2x-1}$ обчислити $y^{(10)}$.
7)Для $y = ln(1-3x)$ знайти $y^{(60)}$.
8) Для $y = cos(1-8x)$ знайти$y^{(34)}$.
9)Для $y = x^2sin^2(3x-1)$ виписати $y^{(68)}$.
10)Для $y = xe^{1-2x}$ знайти $y^{(47)}$.
Д.З. 1125,1132, 1140, 1143, 1148,
1163, 1169,1173,1204,1196.

7 Многочлен Тейлора.Теорема Лапіталля.

Многочлен Тейлора для функції розкладеної в околі т. $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f\prime(a)(x-a) + \frac{f\prime\prime(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n.$$

Многочлени Маклорена для елементарних функцій:
(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + r_n$.
(2) $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+2}$.
(3) $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}$.
(4) $ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + r_n$.
(5) $(x+1)^a = 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2!} + ... + a(a-1)(a-2)...(a-n+1)\frac{x^n}{n!} + r_n$.
1. Виписати многочлен Тейлора до члена з x^5 для $y = e^{2x-x^2}$.
2. Виписати многочлен Тейлора до члена з x^5 для $y = tgx$.
3. Виписати многочлен Тейлора до члена з x^3 для $y = sin(sinx)$.
4. Виписати многочлен Тейлора до члена з x^6 для $y = xln(1-x-x^2)$.
5. Обчислити наступні границі
a) $lim_{x\to 0}\frac{cosx - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;
b) $lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1-3x} - sinx^2}{ln(1-3x^3)}$;
c)$lim_{x\to +\infty}(\sqrt[6]{x^6x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$.
6. Обчислити границі: $lim_{x\to 0}\frac{x - sinx}{x + sinx}$;
a)$lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - sinx}$;
b)$lim_{x\to 0}\frac{tgx - sinx}{x^3}$;
c)$lim_{x\to 0}\frac{ln(cosax)}{ln(cosbx)}$;
d) $lim_{x\to 0}\frac{ln(sinax)}{ln(sinbx)}$;
e)$lim_{x\to\infty}\frac{x^{100}}{e^{100x}}$;
g)$lim_{x\to 0}\frac{lnx}{\sqrt{x}}$;
e)$lim_{x\to 0}(ctgx - \frac{1}{x})$;
f)$lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$;
j)$lim_{x\to 0}x^x$;
h)$lim_{x\to 0}(ln\frac{1}{x})^x$;
Д.З. 1382, 1384, 1397а), 1399,1400,1406б,
1325,1339,1340,1349,1354,1361,1362

8 Графіки.

Побудова графіка:
1)Область визначення($x \in ?$). Якщо можливо написати щось про значення у.
2)Нулі функції. ($x = 0 y = ?$ та $x = ? y = 0$).
3) Парність функції($f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$ або інакше).
4)Перша похідна. Області зростання, спадання, екстремуми.
5) Друга похідна. Вогнутість функції, точки перегину.

6) Асимптоти. Розглядаємо в точках розриву границі справа та зліва – вертикальні асимптоти. На $\pm\infty$ розглядаємо поведінку функції – горизонтальні асимптоти. Похилі асимптоти $y = kx + b, k = \lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{\pm\infty} f(x) - kx$.

Побудувати графіки функцій
1. $y = arctgx + x$.
2. $y = x^3 - x^2 - 2x$.
3.$y = \frac{sinx}{x}$.
4. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Д.З.
1473, 1512, 1479.

9 Інтегральне числення. Табличні, частинами.

Табличка первісних.

ПЕРВІСНІ

f(x)	$\int f(x)dx$	$f(ax+b)$	$\int f(x)dx$
const	constx+c	const	constx+c
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\| + c$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}ln\|ax+b\| + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$
e^x	$e^x + c$	$e^{(ax+b)}$	$\frac{1}{a}e^{(ax+b)} + c$
a^x	$a^x log_a e + c$	$a^(Ax+B)x$	$\frac{1}{A}a^(Ax+B)log_a e + c$
$sinx$	$-cosx + c$	$sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}cos(ax+b) + c$
$cosx$	$sinx + c$	$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b) + c$
$\frac{1}{cos^2x}$	$tgx + c$	$\frac{1}{cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}tg(ax+b) + c$
$-\frac{1}{sin^2x}$	$ctgx + c$	$-\frac{1}{sin^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}ctg(ax+b) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx + c$	$\frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$	$\frac{1}{a}arcsin(ax+b) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-arccosx + c$	$\frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$	$-\frac{1}{a}arccos(ax+b) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctgx + c$	$\frac{1}{1+(ax+b)^2}$	$\frac{1}{a}arctg(ax+b) + c$
shx	$chx + c$	$sh(ax+b)$	$\frac{1}{a}ch(ax+b) + c$
$chsx$	$shx + c$	$chs(ax+b)$	$\frac{1}{a}sh(ax+b) + c$
$\frac{1}{ch^2x}$	$tghx + c$	$\frac{1}{ch^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}tgh(ax+b) + c$
$-\frac{1}{sh^2x}$	$ctghx + c$	$-\frac{1}{sh^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}ctgh(ax+b) + c$

Правила інтегрування функцій:

$$(1) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$(2) \int (cf(x))dx = c \int fdx;$$

$$(3) d \int f(x)dx = f(x); dx$$

(4)Якщо для функції $f(x)$ первісна $F(x)$, тоді

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C.$$

9.1 Визначений інтеграл. Формула Ньютона- Лейбніца.

Нехай $F(x)$– первісна інтегровної на $[a;b]$ функції $f(x)$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Обчислити інтеграли 1.a)$\int 2dx$ b) $\int_{-4}^{8} 2dx$
c)$\int (2x+5)^3 dx$ d) $\int_{-1}^{2} (3-2x)^{\frac{2}{3}} dx$
e)$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$;
f)$\int \left(\sqrt[3]{(2x-1)^5} - \sqrt[5]{(3-2x)^5}\right) dx$;
g) $\int_0^1 \left(\frac{2}{(2x-1)^5} - \frac{3}{\sqrt[4]{(3-2x)^3}}\right) dx$;
e')$\int \left(\frac{2-3\sqrt{x}}{x}\right)^3 dx$;
2. $a)$ $\int \frac{3dx}{2x-1}$; $b)$ $\int_{-1}^{1} \frac{3dx}{3-2x}$; $b')$ $\int_{-1}^{5} \frac{3dx}{3-2x}$;
3. $a)$ $\int_{-1}^{1} \frac{e^{1-2x}-e^{3x+2}}{e^{5x}} dx$; $\int 3^{5x-6} dx$;
4. a)$\int \left(\sqrt{3}cos(2x-6) - sin(4-3x)\right) dx$; $b)$ $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} cos^2(2-3x)$; $c)$ $\int \frac{3dx}{sin^2(4x-3)}$;
5.
$a)$ $\int \frac{5dx}{x^2+4}$; $\int \frac{3dx}{4x^2+9}$;
$a)$ $\int \frac{5dx}{\sqrt{4-x^2}}$; $\int \frac{3dx}{\sqrt{9-2x^2}}$.

внесення під диференціал

$f(x)dx$	$df(x)$	$t =$ заміна
cdx	$d(cx+A)$	$t = cx + A$
xdx	$\frac{1}{2}dx^2$	$t = x^2$
$x^n dx$	$\frac{dx^{n+1}}{n+1}$	$t = x^{n+1}$
$\frac{dx}{x}$	$dlnx$	$t = lnx$
$e^x dx$	de^x	$t = e^x$
$a^x dx$	$\frac{1}{lna}da^x$	$t = a^x$
$sinxdx$	$-dcosx$	$t = cosx$
$cosxdx$	$dsinx$	$t = sinx$
$\frac{dx}{cos^2x}$	$dtgx$	$t = tgx$
$\frac{dx}{sin^2x}$	$-dctgx$	$t = ctgx$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$darcsinx$	$t = arcsinx$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$darctgx$	$t = arctgx$

1) a)$\int xsinx^2 dx$; $b)$ $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{5-3x^4}}$; $c)$ $\int \frac{xdx}{3x^2+1}$; $d)$ $\int_{-1}^{1} x^2e^{x^3}dx$.
2)a)$\int \frac{dx}{xlnx}$; $\int \frac{dx}{xcos^2(3lnx-5)}$; $b)$ $\int \frac{e^x dx}{e^2x+1}$;
$c)$ $\int tg3xdx$; $d)$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxcos^3xdx$; $d')$ $\int sin5xcos^3 5xdx$; $e)$ $\int sin^3 4xdx$; $f)$ $\int \frac{dx}{sinx}$; $\int \frac{dx}{cos^2x+5sin^2x.}$

9.2 Інтегрування частинами.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

1) $\int lnxdx$; 2) $\int xln^2xdx$; 3) $\int \arcsin 2xdx$; 3) $\int_{-\pi}^{\pi} xsinxdx$; 4) $\int_{-1}^{1} x^2e^{-3x}dx$; 5) $\int cos3xe^{2x}dx$.
Д.З.1629,1634, 1639,1649, 1661, 1666, 1667, 1670,
1690,1677, 1681, 1691, 1693, 1694, 1698, 1696, 1704, 1709.
1793, 1802, 1796, 1794, 1829.

10 Інтегрування раціональних функцій.

I)

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}ln|ax+b| + c;$$

$\int \frac{2dx}{1-3x}$.
II)

$$\int \frac{Adx}{(ax+b)^n} = \frac{A}{a(-n+1)(ax+b)^{n-1}} + c;$$

a) $\int \frac{2dx}{(1-3x)^4}$; b) $\int \frac{xdx}{(5x+3)^4}$.
III)

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+b}dx = \frac{A}{2a}ln(ax^2+b) + \frac{B}{\sqrt{ab}}arctg(\sqrt{\frac{a}{b}}x)$$

a) $\int \frac{5x+3}{9x^2+4}dx$; b) $\int \frac{3-4x}{x^2+x+1}dx c) \int_1^4 \frac{x-4}{4x^2-2x+3}$.
IV)

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+b)^n} = \frac{1}{2b(n-1)}\left(\frac{x}{(ax^2+b)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right)$$

$\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$.

10.1 Метод Невизначених Коефіцієнтів.(МНК)

Будь-який многочлен можна розкласти $P_n(x) = (a_1x+b_1)^{s_1}...(a_kx+b_k)^{s_k}(cx^2+d)^{m_1}$.

Якщо в чисельнику многочлен степеня більшого, ніж в знаменнику, тоді треба поділити спочатку многочлен на многочлен, а тоді треба розкласти за допомогою методу МНК:

$\frac{Q_n(x)}{(a_1x+b_2)(a_2x+b_2)^s(c_1x^2+d_1)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_3}{(a_2x+b_2)^2} + ... + \frac{A_{s+1}}{(a_1x+b_1)^s} + \frac{C_1x+D_1}{c_1x^2+d_1}$.

Якщо в знаменнику є множник $(cx^2+d)^{m_1}$, тоді доданки будуть вигляду $\frac{C_1x+D_1}{(cx^2+d)^{m_1}} + \frac{C_2x+D_2}{cx^2+d)^{m_1-1}} + \frac{C_mx+D_m}{cx^2+d}$.

a) $\int \frac{2x^2-1}{x^2(x-1)(x+1)}$; a1) $\int \frac{x^3dx}{x^3-1}$; b) $\int \frac{3x-5}{x^4-1}$; c) $\int \frac{3x-1}{x^2(x^2-5x+6)}$

Д.З.

1868, 1872, 1883, 1882

11 Інтегрування ірраціональних функцій.

I)

$$\int R(x^{\frac{n_1}{p_1}}, x^{\frac{n_2}{p_2}}, ..., x^{\frac{n_k}{p_k}})$$

Заміна $x = t^N, dx = Nt^{N-1}dt$ де N-спільний знаменник для дробів $\frac{n_1}{p_1}\frac{n_2}{p_2}...\frac{n_k}{p_k}$.

Приклади. 1)$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+2}$

II)

$$\int R((\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_1}{p_1}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_2}{p_2}}, ..., (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_k}{p_k}})$$

Заміна $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N, x = \frac{dt^n-b}{a-cT^n}, dx = \frac{da-bc}{(a-cT^n)^2}Nt^{N-1}dt$ де N-спільний знаменник для дробів $\frac{n_1}{p_1}\frac{n_2}{p_2}...\frac{n_k}{p_k}$.

Приклади. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$; $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

III)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \sqrt{x^2+1}dx$$

Заміна $x = sht, dx = chtdt, t = ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \int \sqrt{x^2-1}dx$$

Заміна $x = cht, dx = shtdt, t = ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \sqrt{1-x^2}dx.$$

Заміна $x = sint, dx = costdt, t = arcsinx$.

Приклади. 1)$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; $\int \sqrt{x^2+2x-4}dx$; $\int \sqrt{2-x^2-2x}dx$

IV)

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx$$

Заміни Чебишева:
(1) Якщо $p \in \mathbb{Z}$, тоді заміна $x = t^N$, де N спільний знаменник m, n.
Приклад. $\int x^{\frac{3}{2}}(2x^{\frac{1}{3}}+3)^2dx$
(2) Якщо $p \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n}$ тоді заміна $ax^n + b = t^N \in \mathbb{Z}$, де N знаменник p.
(3)Якщо $p \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ тоді заміна $bx^{-n} + a = t^N$, де N знаменник p.
Приклад. $\int x^{\frac{3}{2}}(2x^{\frac{1}{3}}+3)^{\frac{1}{2}}dx$; $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.
$\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}$; $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{1+x}}dx$; $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$; $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.
Д.З.
$\int \sqrt{5-3x^2}dx$; $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{5+4x^2}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-5}}$;
$1931, 1930, 1982, 1983, 1985, 1989$

12 Тригонометричні заміни.

Для інтегралів з тригонометричними функціями є наступні заміни: універсальна тангенс напіваргументу, на тангенс аргументу та звичайна заміна синус чи косинус.

(1) УНІВЕРСАЛЬНА заміна для $\int R(sinx, cosx)dx$

$$t = tg\frac{x}{2}, sinx = \frac{2t}{t^2+1}; \quad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклади $\int \frac{dx}{sinx}$; $\int \frac{5+6sinx}{sinx(2+cosx)}dx$
(2)Заміна

$$t = sinx \text{або} t = cosx$$

для інтегралів типу $\int sin^{2n}xcos^{2k+1}xdx$, $\int cos^{2n}xsin^{2k+1}xdx$.
Приклади $\int sin^5xdx$; $\int sin^3xcsos^2xdx$; $\int sin^2xcso^7xdx$;
(3)

$$t = tgx; \quad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Тут ви бачите корені тому використовувати цю заміну добре коли степені парні.
Приклади $\int sin^4xdx$; $\int tg^3xdx$; $\int sin^2xcso^4xdx$.
$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sinx}$; $\int_0^{\pi} cos^7 3xdx$; $\int sin^4 5xdx$; $\int \frac{dx}{sin^6xcosx}$;
$\int_{-\pi}^{0} cos3xcos2xdx$; $\int \frac{dx}{3sinx-2cosx+1}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{sin^2x+5cos^2x}$; $\int \sqrt[3]{tgx}dx$.
Д.З.
$1992, 1994, 1999, 2004; 2007; 2026; 2029; 2044.$

13 Визначений інтеграл. Застосування.

1.2271, 2275, 2279, 2309,
2398, 2403,(2414), 2434, 2440,2474.
Д.З. 2273,2276,2278,2283*2282*2312,
2401, 2410,(2415),2437,2442,2473

14 Невласні інтеграли

невласний інтеграл від функції$x^{-\alpha}$

	$\alpha > 1$	$\alpha < 1$	$\alpha = 1$
$\int_0^1$	$-$	$+$	$-$
$\int_1^{\infty}$	$+$	$-$	$-$

Якщо функція має точки розриву с першого роду, будемо рахувати невласні інтеграли

$$\int_a^{b(c)} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\delta_1 \to 0} \int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \lim_{\delta_2 \to 0} \int_{c+\delta_2}^{b} f(x)dx$$

.
Якщо відрізок інтегрування нескінченний тоді рахуємо інтеграл

$$\int_a^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx.$$

2335,2338,2341,2346
2358,2363,2364
2392,2395
Д.З. 2339,2344,2348,
2359,2371, 2368
2393,2394

15 Ряди Фур'є

$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx\frac{\pi}{l} + b_n sinnx\frac{\pi}{l})$– ряд Фур'є періоду $2l$.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cosnx\frac{\pi}{l}dx$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sinnx\frac{\pi}{l}dx$$

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[-l;l]$, окрім скінченної кількості точок розриву першого роду. $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx\frac{\pi}{l} + b_n sinnx\frac{\pi}{l}), x \in [-l;l.]$

В точках розриву ряд Фур'є збігається $F(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Якщо функція парна тоді

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)cosnx\frac{\pi}{l}dx$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$b_n = 0$$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx\frac{\pi}{l})$– ряд Фур'є парної функції періоду $2l$.

Якщо функція непарна тоді

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)sinnx\frac{\pi}{l}dx$$

$$a_n = 0$$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n sinnx\frac{\pi}{l})$– ряд Фур'є непарної функції періоду 2π.

*** Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, окрім скінченної кількості точок розриву першого роду.

$$!!l = \frac{b-a}{2}!!$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x) cosnx\frac{\pi}{l}dx$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x) sinnx\frac{\pi}{l}dx$$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx\frac{\pi}{l} + b_n sinnx\frac{\pi}{l}), x \in [-l; l.]$

В точках розриву ряд Фур'є збігається $F(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

****

комплексна форма ряду Фур'є.

$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx\frac{\pi}{l}}$– комплексна форма ряду Фур'є періоду $2l$.

$$c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-inx\frac{\pi}{l}}dx$$

–амплітудний спектр, амплітуда залежить від $\frac{n\pi}{l}$.

$$c_n = \frac{-ib_n + a_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{ib_n + a_n}{2}.$$

$\varphi_n = -argc_n$ –фазовий спектр.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[-l; l]$, окрім скінченної кількості точок розриву першого роду. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx\frac{\pi}{l}}, x \in [-l; l.]$

В точках розриву ряд Фур'є збігається $F(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

****

1. розкласти в ряд Фур'є функцію $y = signx, x \in (-\pi; \pi)$.

2.розкласти в ряд Фур'є функцію $y = x$ a) $x \in (-\pi, pi)$ b) $x \in (0; \pi)$ по косинусам кратних дуг з періодом 2π.

3.розкласти в ряд Фур'є функцію $y = sign(cosx)$.

4. Розкласти в ряд Фур'є $y = e^{3x}, x \in [-3, -1]$.

5. Розкласти в ряд Фур'є $y = x, 0 \le x \le 1; y = 1, 1 < x < 2; y = 3 - x, 2 \le x \le 3$ з періодом 3.

5. Записати комплексну форму ряду Фур'є для функції $y = e^{3x}, x \in [-3, 3]$.

Д.З. 2939, 2942,2946,2957,2948,2961.

16 Ряди

1. Виписати для ряду загальний член

a)$-\frac{1}{50} + \frac{2\sqrt{2}}{250} - \frac{3\sqrt{3}}{1250} + \dots$; b)$\frac{1}{2} + \frac{1*3}{2*4} + \frac{1*3*5}{2*4*6} + \dots$.

2.Обчислити суму ряду

a)$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$; b)$\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{1-2n}$; c)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+5)}$;

3.Дослідити на збіжність ряди (ознаки порівняння)

a)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; b)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2-3n+5}{3n^4+3}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3n^5+1}$.

4.Дослідити на збіжність ряди

a)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{2^n n!}$; b)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nlnn}$.

5.Дослідити на умовну та абсолютну збіжність ряди a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{n^2+1}$; b)$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$; ; c)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{cosn}{n^2}$; d)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{cosn}{n}$;

Д.З. 2550; 2556; 2576*;
2579,2587;2597;2596;2631(інтегральна ознака Коші), 2669.

17 Степеневі ряди.

1. Знайти радіус збіжності та інтервали збіжності степеневого ряду.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$; b)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a-1)...(a-n+1)x^n}{n!}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; d)$\sum_{n=0}^{\infty}nsin(\frac{1}{5n})x^n$;

2. Розкласти функцію в степеневий ряд і обчислити радіус збіжності a)$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$ в ряди $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$; $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$; $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{-n}$.

b)$y=sh3x$; c)$y=sin^2 5x$; c)$y=sin3xcos2x$; d)$y=3xln\sqrt{1+3x^2}$; e)$y=\frac{2x}{(2x-1)(x+3)}$; f)$y=\frac{1}{4+9x^2}$; $g)y=arctg3x$

Д.З. 2813,2816,2814,2828
2851, 2854, 2856, 2859,2870