# 1 Гамма, Бета-функції. Ейлерові інтеграли.

## Гамма-функція

Ейлеровий інтеграл 2-го роду ,Гамма-функцією при $\alpha > 0$ -це інтеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Якщо порахувати даний інтеграл частинами, тоді отримаємо наступну властивість

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Отже,$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = |u = e^{-x} \quad du = -e^{-x} \quad dv = x^{\alpha-1} \quad v = \frac{x^\alpha}{\alpha}| = e^{-x}\frac{x^\alpha}{\alpha}|_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)$.

Отже, якщо $n$ натуральне число і $0 < \alpha < 1$, тоді маємо формулу розширення

$$\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)...\alpha\Gamma(\alpha).$$

Отже, якщо $n$ натуральне число, тоді

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^\infty = 1.$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = |x = t^2 \quad dx = 2tdt| = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{sin(\pi\alpha)}.$$

**Приклад 1** $\int_0^\infty x^4 e^{-\sqrt[3]{x}}dx = |x = t^3 \quad dx = 3t^2dt| = \int_0^\infty t^{12}e^{-t}3t^2dt = 3\Gamma(15) = 3 * 14!$

## Бета-функкія

Ейлерів інтеграл 1-го роду, Бета-функція представлена інтегралом

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^{\alpha+\beta}} = B(\beta,\alpha).$$

Щоб довести що Бета-функція симетрична відносно $\alpha, \beta$ треба в першому інтегралі зробити заміну $t = 1-x, \quad dx = -dt$ $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = -\int_1^0 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dx = B(\beta,\alpha)$.

Зв'язок між двома інтегралами теж отримується заміною: $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = |t = \frac{x}{1-x} \quad x = \frac{t}{1+t} \quad dx = \frac{dt}{(1+t)^2}| = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt.$

Зв'язок між гамма, бета-функціями

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

**Приклад 2** $\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}(1-x^{\frac{1}{3}})^4dx = |x = t^3dx = 3t^2dt| = 3\int_0^1 t^4(1-t)^4dx = B(5,5) = \frac{\Gamma^2(5)}{\Gamma(10)} = \frac{24^2}{25!}.$

**Приклад 3** $\int_2^\infty \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x+5)^3} = |x-2 = t| = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{5}{3}-1}dt}{(t+7)^3} = \frac{1}{7^{3-\frac{5}{3}}}\int_0^\infty \frac{(\frac{t}{7})^{\frac{5}{3}-1}d\frac{t}{7}}{(\frac{t}{7}+1)^3} = \frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}B(\frac{5}{3},\frac{4}{3}) = \frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}\frac{\Gamma(\frac{5}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(3)} =$ $|$*формула розширення для гамма-функції*$| = \frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}\frac{\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})}{2} = |$*формула добутку гамма-функцій, якщо параме* $\frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}\frac{\frac{2}{9}\pi}{2sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{7^{\frac{4}{3}}}\frac{\frac{2}{9}\pi}{\sqrt{3}}.$

**Приклад 4** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x sin^m x dx = |t = sin^2x \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \quad cosx = \sqrt{1-t} \quad t_{down} = 0 \quad t_{up} = sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1| = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt = \frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2};\frac{n+1}{2}),$ *m,n>-1.*

**Приклад 5** $\int_0^{\frac{\pi}{12}} tg^{\frac{1}{3}} 3xdx = |y = 3xdx = \frac{dy}{3} \quad y_{down} = 0, | = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{\frac{1}{3}} ydy = |t = sin^2 y \quad dy = \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \quad cosy = \sqrt{1-t} \quad t_{down} = 0 \quad t_{up} = sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1| = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{\frac{1}{3}-1}{2}}(1-t)^{\frac{-\frac{1}{3}-1}{2}} dt = \frac{1}{6}B(\frac{2}{3};\frac{1}{3}) = \frac{1}{6}\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ .

Обчислити наступні інтеграли:
1.1 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(2+x^4)^2}$ 1.2 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^3}}$;
2.1 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}dx}{(9+x^2)^2}$ 2.2 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;
3.1 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^5}$ 3.2 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x)^3(1+x)^2}}$;
4.1 $\int_0^1 ln^{\frac{2}{3}} xdx [t = lnx]$ 4.2 $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^2(2+x)}}$;
5.1 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}dx}{(4+\sqrt{x^3})^2}$ 5.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{27} xdx$;
6.1 $\int_{-\infty}^0 \sqrt[3]{e^t(1-e^t)^8}dt$ 6.2 $\int_0^{\infty} \frac{(x^4+x^2)dx}{(1+x^4)^2}$;
7.1 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)^8}$ 7.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[5]{sin^7 xcos^9 x}dx$;
8.1 $\int_0^{\infty} \frac{(x^6+x^4)dx}{(1+x^4)^3}$ 8.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{15} xdx$;
9.1 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[6]{x}dx}{9+x^2}$ 9.2 $\int_0^1 \frac{\sqrt[8]{x(1-x)^3}dx}{x}$;
10.1 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[8]{x^3}(2+\sqrt{x})^3}$ 10.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\frac{cos^{13} x}{sinx}}dx$;
11.1 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^{17}}}$ 11.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\frac{sin^{19} x}{cosx}}dx$;
12.1 $\int_0^{\infty} \frac{(x^2+x^4)dx}{(1+x^4)^4}$ 12.2 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[8]{x}dx}{(4+x^2)^2}$;
13.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^3 xdx}{(1+\frac{1}{2}cosx)^4}, [cosx = t]$ 13.2 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x^{11}}dx}{(8+x^3)^2}$;
14.1 $\int_0^3 \sqrt{\frac{3-x}{x}}dx$, 14.2 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x^2)^8}$;
15.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^3 xdx}{(1+\frac{1}{3}cosx)^2}, [cosx = t]$ 15.2 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}dx}{32+x^5}$;
16.1 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+5x^2)^2}$ 16.2 $\int_0^{\infty} \sqrt[4]{e^{-t}(1-e^{-t})^{10}}dt$;

## 2 Ряди числові

**Числовим рядом** називається вираз $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$.

**Частинною N-тою сумою** називається сума до $N$-го члена включно $S_N = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_N$. Якщо існує $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S$ і вона скінченна, тоді ряд називається **збіжним** , якщо границя нескінченна або не існує, тоді ряд називається **розбіжним**.

**Приклад 6** $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2})^n = \lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(\frac{1}{2})^n =$ |*сума N членів геометричної прогресії дорівнює* $\frac{a_1(1-q^N)}{1-q}| = \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1(1-(\frac{1}{2})^N}{1-\frac{1}{2}} = 2$. *Цей ряд збіжний.*

**Приклад 7** $\sum_{n\geq 0}(-1)^n = \lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n$ *Якщо* $N-$ *парне, тоді* $S_N = 1$, *якщо* $N-$ *непарне, тоді* $S_N = 0$ *, тому границі не існує отже, ряд розбіжний.*

**Приклад 8** $\sum_{n\geq 0}(1) = \lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} 1 = \lim\limits_{N\to+\infty}(N+1) = +\infty$. *Отже, ряд розбіжний.*

Не всі суми можна обчислити як у прикладі, тому є ряд ознак за допомогою яких ми взагалі можемо дізнатися чи ряди збіжні чи розбіжні.

**НЕОБХІДНА УМОВА ЗБІЖНОСТІ (НУЗ)**

Ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $a_n \to 0, n \to \infty$.

Більш важливішим є наслідок з НУЗа:

**Якщо** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, **тоді ряд розбіжний.**

Отже ряд $\sum_{n\geq 0} 1$ розбіжний оскільки $a_n = 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Але з того, що $a_n \to 0, n \to \infty$ не випливає, що ряд збігається. Наприклад, гармонічний ряд $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ розбіжний, але $a_n = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$. Цей ряд дуже важливий в теорії рядів, в цілому як і узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} n^{\alpha}$. Цей ряд збігається , якщо $\alpha > 1$ і розбігається, якщо $\alpha \leq 1$. Для доведення цього можемо скористатися **інтегральною ознакою** , наприклад.

**Інтегральна ознака.** $a_n = a(n)$, інтеграл $\int_{n_0}^{\infty} a(n)dn$ і ряд $\sum_{n_0}^{\infty} a(n)dn$ збігаються і розбігаються одночасно.

**невласний інтеграл від функції**$x^{-\alpha}$

Про інтеграли нам відомо

| | $\alpha > 1$ | $\alpha < 1$ | $\alpha = 1$ |
|---|---|---|---|
| $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ | $+$ | $-$ | $-$ |

так само збігаються і ряди.

**Приклад 9** $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad \alpha = \frac{1}{2} < 1$ *Отже, ряд розбіжний.*

**Приклад 10** $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ $\quad \alpha = 2 > 1$ *Отже, ряд збіжний.*

Розглянемо ряди, в яких $a_n \geq 0, \forall n \geq n_0$, тобто члени ряду починаючи з якогось члена всі невід'ємні.

**Асимптотично-степенева ознака**: Нехай $a_n = O^*(\frac{1}{n^{\alpha}})$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n n^{\alpha} = Const$, тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається , якщо $\alpha > 1$ і розбігається, якщо $\alpha \leq 1$.

**Приклад 11** $\sum_{n\geq 0} \frac{2n-1}{\sqrt{n^5-3n+1}}$ $\quad \frac{2n-1}{\sqrt{n^5-3n+1}} = O^*(\frac{2n}{\sqrt{n^5}})$ $\quad \alpha = 1,5 > 1$ *Отже, ряд* $\sum_{n\geq 0} \frac{2n-1}{\sqrt{n^5-3n+1}}$ *збіжний .*

**Приклад 12** $\sum_{n\geq 1} \frac{sin^2 \frac{1}{2n}}{\sqrt{n^4-3n+1}}$ $\quad \frac{\frac{1}{4n^2}}{\sqrt{n^4-3n+1}} = O^*(\frac{1}{\sqrt{4n^4}})$ $\quad \alpha = 4 > 1$ *Отже, ряд* $\sum_{n\geq 0} \frac{sin^2 \frac{1}{2n}}{\sqrt{n^4-3n+1}}$ *збіжний .*

Серед багатьох інших ознак варто виділити ще дві ознаки:

**Ознака Д'Аламбера**: Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, якщо $p < 1$ збігається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, якщо $p > 1$ ряд розбігається і якщо $p = 1$, тоді досліджуємо далі іншою ознакою.

Ознака Д'Аламбера дуже корисна, коли у прикладі є степені, факторіал $n! = 1 * 2 * ... * n$ . Рідко але зустрічаються подвійні факторіали $(2n + 1)!! = 1 * 3 * 5 * ... * (2n - 1) * (2n + 1)$ добуток усіх натуральних непарних чисел. Розписуючи подвійний факторіал, для спрощення виразу зверніть увагу на останні множники, не помиліться.

**Приклад 13** $\sum_{n\geq 1} \frac{n^4}{4^n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 4^n}{n^4 4^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}(\frac{n+1}{n})^4 = \frac{1}{4} < 1$ *Отже, ряд* $\sum_{n\geq 1} \frac{n^4}{4^n}$ *збіжний за ознакою Д'Аламбера .*

**Приклад 14** $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{3^n n!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} 3^n n!}{n^n 3^{n+1} (n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}(\frac{n+1}{n})^n \frac{n+1}{n+1} = \frac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n = \frac{1}{3}e < 1$ *Отже, ряд* $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{3^n n!}$ *збіжний за ознакою Д'Аламбера .*

**Радикальна ознака Коші:** Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$, якщо $p < 1$ збігається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, якщо $p > 1$ ряд розбігається і якщо $p = 1$, тоді досліджуємо далі іншою ознакою.

Нагадаю, що ми розглядаємо додатні ряди ($a_n > 0$).

Використовувати цю ознаку краще, якщо у вас є степінь n у прикладі і точно немає факторіалів.

**Приклад 15** $\sum_{n\geq 1} (\frac{2n^2-1}{3n^2+n-1})^n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+n-1} = \frac{2}{3} < 1$ *Отже, ряд* $\sum_{n\geq 1} (\frac{2n^2-1}{3n^2+n-1})^n$ *збіжний за радикальною ознакою Коші .*

**Приклад 16** $\sum_{n\geq 1} (\frac{2n^2-1}{2n^2+n-1})^{n^2}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2n^2-1}{2n^2+n-1})^n = 1^{\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n*(\frac{2n^2-1}{2n^2+n-1}-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{n^2}{2n^2+n-1}} = e^{-\frac{1}{2}} < 1$ *Отже, ряд* $\sum_{n\geq 1} (\frac{2n^2-1}{2n^2+n-1})^{n^2}$ *збіжний за радикальною ознакою Коші .*

## 2.1 Знакозмінний ряд.

Якщо елементи $a_n$ змінюють знак, тоді досліджуємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$. Він знакосталий і досліджується за вищевказаними ознаками: НУЗ, асимтотично степенева ознака порівняння, ознака Д'Аламбера, ознаки Коші радикальна та інтегральна.

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ збігається, тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **збігається абсолютно**.

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ розбіжний, тоді досліджуємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ на умовну збіжність за **ознаками Лейбніца або Діріхле**.

**Ознака Лейбніца:**

Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, якщо його члени $a_n$ починаючи з деякого номера монотонно спадають до 0 на нескінченності $a_n \to 0, n \to \infty$ і $a_{n+1} < a_n, n > N$.

**Ознака Діріхле:** Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n$, якщо 1)його для членів $a_n$ виконується $a_n \to 0, n \to \infty$ і $a_{n+1} < a_n, n > N$;

2) існує стала $C$ для кожного $N > 0$ виконується $\| \sum_{n=0}^{N} b_n \| < C$.

**Приклад 17** *Дослідити ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

*Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \| \frac{(-1)^n}{n} \| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$– *гармонічний ряд, він розбіжний.*

*Розглянемо ознаку Лейбніца:* $a_n = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$ *залишилось визначити чи спадає послідовність* $a_n$. *Розглянемо цю послідовність як функцію* $a_x = \frac{1}{x}$, *нам потрібна похідна* $a\prime\}_x = -\frac{1}{x^2} < 0$ *функція спадна. Отже, послідовність спадна і ряд збіжний умовно.*

**Приклад 18** *Дослідити ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{n}$.

*Спочатку розглянемо ряд з доданками* $a_n = |\frac{sinn}{n}|$. *Дослідимо на абсолютну збіжність. Оцінка* $|\frac{sinn}{n}| < \frac{1}{n}$ *не дасть відповіді, оскільки ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *розбігається , це означає що ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sinn|}{n}$ *може і розбігатися і збігатися.Треба шукати відповіді іншим способом.*

*Представимо* $a_n = |\frac{sinn}{n}|$ *у наступному вигляді* $a_n = |\frac{sinn}{n}| \leq \frac{sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{cos2n}{2n}$. *Зменшуване є гармонічним рядом він розбіжний.*

*А від'ємник дослідимо за ознакою Діріхле. 1)* $a_n = \frac{1}{2n} \to 0, \quad n \to \infty$; *ця послідовність спадна, бо якщо розглянути відповідну функцію* $a(x) = \frac{1}{2x}$ *і порахуємо її похідну* $a\prime(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0$, *тоді похідна буде від'ємна, що і означає, що функція спадна.*

*2) Розглянемо суму* $|\sum_0^N cos2n| \leq \frac{1}{sin\frac{2}{2}} \forall N > 0$, *вона обмежена. Що й потрібно для ознаки Діріхле. За ознакою Діріхле ряд з елементами* $\frac{cos2n}{2n}$ *збіжний.*

*Отже, ряд з елементами* $|\frac{sinn}{n}|$ *розбіжний - збіжний=розбіжний.*

*Отже заданий ряд розбігається абсолютно. Тепер розглянемо умовну збіжність цього ряду. Це можна зробити аналогічно дослідженню від'ємника: 1)* $a_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty$; *ця послідовність спадна, бо якщо розглянути відповідну функцію* $a(x) = \frac{1}{x}$ *і порахуємо її похідну* $a\prime(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, *тоді похідна буде від'ємна, що і означає, що функція спадна. 2) Розглянемо суму* $|\sum_0^N sinn| \leq \frac{1}{sin\frac{1}{2}} \forall N > 0$, *вона обмежена. Що й потрібно для ознаки Діріхле. За ознакою Діріхле ряд з елементами* $\frac{sinn}{n}$ *збіжний умовно.*

**Зауваження.**

Якщо в прикладі побачили cos чи sin, тоді використовуємо для дослідження ознаку Діріхле для цих функцій можемо використовувати наступні нерівності:

$$|\sum_0^N sinan| \leq \frac{1}{|sin\frac{a}{2}|}$$

$$|\sum_0^N cosan| \leq \frac{1}{|sin\frac{a}{2}|}.$$

# 3 Ряди степеневі

Ряд $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n x^n$ називаємо степеневим рядом.

Для степеневого ряду $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n x^n$ важливим є число $R$ - радіус збіжності. Якщо воно для вас відоме, тоді для $x \in (-R; R)$ ряд збіжний, а для $x : |x| > R$ ряд розбіжний. Випадок, коли $x = \pm R$ досліджується окремо зазвичай за допомогою вищеописаних ознак перевіряємо на збіжність ряди $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n R^n$ і $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n (-R)^n$.

Отже, важливо дізнатись як обчислити цей радіус збіжності.

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|.$$

ATTENTION PLEASE: У даній формулі використовуються тільки коефіцієнти біля $x^n$.

**Приклад 19** *Для ряду $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ обчислити радіус і інтервали збіжності.*

*Що у нас $a_n$? Заміняємо $x^n$ на 1, і те, що залишається після знаку сума – це і є коефіцієнт $a_n = \frac{1}{n!}$. Випишемо $a_{n+1}$, всюди у виразі для $a_n$ заміняємо $n$ на $(n+1)$ : $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.*

$R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} n + 1 = +\infty$. *Радіус нескінченний.*

*Це означає, що яке б дійсне число замість $x$ ви не підставили, ряд $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ буде збіжним. Тобто інтервали його збіжності $(-\infty; \infty)$.*

**Приклад 20** *Для ряду $\sum_{n\geq 0}^{\infty} x^n$ обчислити радіус і інтервали збіжності.*

*В даному прикладі $a_n = 1$, а чому тоді дорівнює $a_{n+1}$? Всюди у виразі для $a_n$ заміняємо $n$ на $(n+1)$ :$a_{n+1} = 1$. Отже радіус збіжності дорівнює $R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = 1$.*

*Це означає, якщо $|x| < 1$, тоді ряд збіжний, а якщо $|x| > 1$, тоді ряд розбіжний. Наприклад ряд $\sum_{n\geq 0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$-збіжний $|\frac{1}{2}| < 1$, а ряд $\sum_{n\geq 0}^{\infty} 2^n$-розбіжний, бо $|2| > 1$.*

*Що ж буде з рядом коли $x = \pm 1$?*

*Якщо $x = 1$, тоді ряд набуває вигляду $\sum_{n\geq 0}^{\infty} (1)^n = 1 + 1 + 1 + 1 + ...$, він розбіжний, бо 1 не прямує до 0, не виконується НУЗ.*

*Якщо $x = -1$, тоді розглядаємо ряд $\sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 + ...$ і він розбіжний оскільки не виконується НУЗ.*

*Отже, ряд $\sum_{n\geq 0}^{\infty} x^n$ збігається тільки на інтервалі (-1;1).*

Іноді зручніше скористатися формулою **Коші-Адамара**

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

**Приклад 21** *Для ряду $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ обчислити радіус і інтервали збіжності.*

*В даному прикладі $|a_n| = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$. Оскільки у виразі є степінь $n$, то краще використати формулу Коші-Адамара. (Насправді тут багато $n$, які замінювати на (n+1) мені не дуже хочеться і ще мені щось підказує, що границя буде не дуже приємною, а за допомогою формули К.-А. я хоча б зменшу степінь).*

*Отже,* $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{\frac{n^2}{n}}} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$.

*Отже, радіус $R = e$, якщо $x \in (-e; e)$ ряд $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ збігається, якщо $|x| > e$ ряд розбіжний, і якщо $x = \pm e$, тоді ряди $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pm e)^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ досліджуємо окремо, наприклад за коре невою ознакою Коші.*

## Ряд Тейлора.

Насправді, цікаво і зручно будь-яку функцію розписати як степеневий ряд, хоча б для деяких x.

Рядом Тейлора в т.а для нескінченно диференційовної в околі цієї точки функції $f$ називається

$$T(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + ... = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Ряд Маклорена, це ряд Тейлора в околі 0 , зазвичай використовується частіше

$$T(x,0) = f(0) + \frac{f`(0)}{1!}(x) + \frac{f``(0)}{2!}(x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + ... = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n.$$

Для елементарних функцій є вже готові ряди Маклорена, якими можна користуватися для розкладу функції в околі 0.

(1)

$$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty.$$

(1)

$$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty$$

(2)

$$sinx = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty.$$

(3)

$$cosx = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty.$$

(4)

$$ln(x+1) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad R = 1.$$

(5)

$$(x+1)^{\alpha} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^n}{(n)!}, \quad R = 1.$$

(6)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^{\infty} x^n, \quad R = 1.$$

Звідки взялися ці формули? Візьмемо наприклад функцію $e^x$. Обчислемо n-ту похідну цієї функції в точці 0 $(e^x)^{(n)} = e^x|_{x=0} = 1$. З означення многочлена Маклорена підставляємо замість $f^{(n)}(0)$ 1 і маємо $T(x) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!}(x)^n$, його радіус ми рахували в прикладі №19.

Формулу 6 можна виписати з 5-тої враховуючи, що $\alpha = -1$ і замість x в формулі пишемо -x.

Як же цими формулами користуватися?

Розглянемо декілька прикладів:

**Приклад 22** *Розкласти функцію $f(x) = \frac{1}{x-3}$ в степеневий ряд в околі 0 і вказати радіус збіжності.*

*Спочатку глянувши на вигляд функції $f(x) = \frac{1}{x-3}$, спробуємо підібрати формулу. В даному випадку перетворимо функцію, щоб вона була схожою на функцію в (6)-тій формулі: $f(x) = \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3(1-\frac{x}{3})}$. У формулі 1 у знаменнику, а у функції 3, тому ми виносимо 3 за дужки.*

*Застосовуємо формулу (6) записуючи $\frac{x}{3}$ замість $x$ .*

$f(x) = -\frac{1}{3}\sum_0^{\infty}(\frac{x}{3})^n = -\sum_0^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$.

*Наступний крок, треба вказати радіус. Тут можна піти першим шляхом, як в прикладах 19-21, або є ще один спосіб.*

*Ви використовуєте формулу (6) в якій радіус збіжності дорівнює 1, замість x використовуємо $\frac{x}{3}$, отже ряд збігається для x:$|\frac{x}{3}| < 1$, це те ж саме що й $|x| < 3$ отже радіус $R = 3$.*

**Приклад 23** *Розкласти функцію $f(x) = ln(2-x)$ в степеневий ряд в околі 0 і вказати радіус збіжності.*

*Логарифми у нас у формулі (4), треба 2 перетворити математичними діями на 1, ми знаємо що логарифм добутку, це сума логарифмів від множників: $f(x) = ln2(1-\frac{x}{2}) = ln2+ln(1-\frac{x}{2})$. Використовуємо формулу (4) замість x записуємо $-\frac{x}{2}$.*

$f(x) = ln2 + ln(1-\frac{x}{2}) = ln2 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n-1(-\frac{x}{2})^n}{n} = ln2 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n-1(-1)^n x^n}{2^n n} = ln2 - \sum_1^\infty \frac{x^n}{2^n n}$.

*Радіус збіжності порахувати можна за формулою К.-А.* $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$.

*Тут ми використали, що* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. *Отже радіус* $R = 2$.

*Інша версія: ми використали формулу 4 з радіусом 1 замість x писали $-\frac{x}{2}$, тому $|-\frac{x}{2}| < 1$, що рівносильне $|x| < 2$. Отже радіус $R = 2$.*

**Приклад 24** *Розкласти функцію $f(x) = sin2xcos5x$ в степеневий ряд в околі 0 і вказати радіус збіжності.*

*Перетворимо трішки функцію використавши формулу добутку синуса на косинус*

$f(x) = \frac{1}{2}(sin(2x+5x) + sin(2x-5x)) = \frac{1}{2}(sin(7x) - sin(3x))$.

*Використовуємо формулу (2) у першому доданку замість x пишемо 7x, у другому 3x.*

$f(x) = \frac{1}{2}(sin(7x) - sin(3x)) = \frac{1}{2}(\sum_0^\infty \frac{(-1)^n(7x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_0^\infty \frac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}) = \frac{1}{2}(\sum_0^\infty \frac{(-1)^n(x)^{2n+1}((7)^{2n+1}-(3)^{2n+1})}{(2n+1)!}$.

*Ряд, який в цьому прикладі використовується має нескінченний радіус, тому ряд, який ми отримали має також нескінченний радіус.*

**Приклад 25** *Розкласти функцію $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+8}}$ в степеневий ряд в околі 1 і вказати радіус збіжності.*

*Оскільки розкласти в ряд треба в околі 1, це означає що ми шукаємо ряд типу $\sum_0^\infty a_n(x-1)^n$.*

*Тому, щоб використовувати формули (1)-(6), мені потрібно зробити заміну $t = x-1$ в функції і розкладувати нову функцію в околі 0 вже.*

$x = t+1$, *тому* $f(t) = \frac{t}{\sqrt{(t+1)^2-2t-2+8}} = t(t^2+7)^{-\frac{1}{2}} = \frac{t}{\sqrt{7}}(\frac{t^2}{7}+1)^{-\frac{1}{2}}$. *Другий множник можемо розкласти використовуючи формулу (5), де замість x підставляємо $\frac{t^2}{7}$ і $\alpha = -\frac{1}{2}$.*

$f(t) = \frac{t}{\sqrt{7}}(1 + \sum_1^\infty \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})...(-\frac{1}{2}-n+1)t^{2n}}{7^n(n)!}) = \frac{t}{\sqrt{7}} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n(1*3*...*(2n-1))t^{2n+1}}{2^n 7^{n+\frac{1}{2}}(n)!}$.

*Залишається вказати радіус, у формулі (5) радіус 1 замість x писали $\frac{t^2}{7}$, отже $|\frac{t^2}{7}| = \frac{t^2}{7} < 1$, що рівносильна нерівності $t^2 < 7$, яка в свою чергу рівносильна $|t| < \sqrt{7}$. Отже радіус $R = \sqrt{7}$.*

*Виконавши обернену заміну повертаємось до x* $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{7}} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n(1*3*...*(2n-1))(x-1)^{2n+1}}{2^n 7^{n+\frac{1}{2}}(n)!}$ *з радіусом збіжності* $R = \sqrt{7}$.

## Ряди Фур'є

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l}$$

називається рядом Фур'є періоду $2l$. $2l$-періодичну функцію F можна розкласти в ряд Фур'є періоду $2l$ на відрізку $[-l; l]$. Коефіцієнти тоді обчислюються за формулами:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Якщо $f$ – функція парна, тоді коефіцієнти

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x) cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n = 0;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx.$$

Якщо $f$ – функція непарна, тоді

$$a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x) sin\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$a_0 = 0.$$

В даних випадках користуємось фактом, що для парної функції інтеграл по симетричному відрізку дорівнює двом інтегралам по половині відрізку. А інтеграл від непарної функції по симетричному відрізку дорівнює 0.

**Заувага:)** Якщо на відрізку $[-l; l]$ функція має скінченну кількість точок розриву першого роду-не лякайтесь- тоді ряд Фур'є в цих точках збігається до наступного значення

$$F(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

, просто зважайте на ці точки розриву.

**Приклад 26** *Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$ на а)[-1;1]; b) [0,1] по косинусам кратних дуг з періодом 2;с)[0,1] по синусам кратних дуг з періодом 2.*

*Функція $f(x) = x$ є непарною функцією, тому її ряд Фур'є складатиметься тільки з синусів кратних дуг, тому пункт а) і с) співпадають.*

*Коефіцієнти* $a_n = 0, \quad n = 0, 1, ...$ *і* $b_n = 2\int_0^1 x sinn\pi x = -2\frac{x}{n\pi}cosn\pi x + 2\frac{sinn\pi x}{(n\pi)^2}|_0^1 = -\frac{2}{n\pi}cosn\pi = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$.

*Отже,* $x = \sum_1^\infty \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} sinn\pi x, x \in [-1; 1]$.

*b) функцію $f(x) = x$ треба розкласти по косинусам кратних дуг на [0,1] з період, це означає, що на відрізку [-1;1] функція повинна бути парна. Отже, якщо маємо $y = f(x), x \in [0; 1]$, тоді $y = f(-x), x \in [-1; 0]$ і тоді на відрізку [-1;1] функція повинна парна, отже $b_n = 0$, а $a_n = 2\int_0^1 x cosn\pi x = 2\frac{x}{n\pi}sinn\pi x + 2\frac{cosn\pi x}{(n\pi)^2}|_0^1 = \frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^2}$.*

*Оскільки, у знаменнику замість n підставити 0 не можемо, то прийдеться порахувати $a_0$ окремо, отже, $a_0 = 2\int_0^1 xdx = 1$*

*Отже,* $x = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1)cosn\pi x, x \in [0; 1]$.

Розглянемо приклад з функцією загального виду, яка має точку розриву першого роду на відрізку.

**Приклад 27** *Розкласти в ряд Фур'є функцію* $y = \begin{cases} -1 & x \in (0, \pi] \\ 2 & x \in [-\pi; 0) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ *з періодом* $2\pi$.

*В даному прикладі треба порахувати усі коефіцієнти, крім того, відрізок інтегрування потрібно розбити на два, тому*

$$a_n = \frac{1}{\pi}(\int\limits_{-\pi}^0 2cosnxdx + \int\limits_0^\pi (-1)cosnxdx) = \frac{1}{\pi}(\frac{2}{n}sinnx|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n}sinnx|_0^\pi) = 0.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(\int\limits_{-\pi}^{0} 2dx + \int\limits_{0}^{\pi} (-1)dx) = \frac{1}{\pi}(2\pi - \pi) = 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(\int\limits_{-\pi}^{0} 2sinnxdx + \int\limits_{0}^{\pi} (-1)sinnxdx) = \frac{1}{\pi}(-\frac{2}{n}cosnx|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}cosnx|_{0}^{\pi}) = \frac{1}{\pi}(-\frac{2}{n}(1-(-1)^n) + \frac{1}{n}(((-1)^n-1)) = \frac{3}{n\pi}(((\ldots$$

*Отже,* $y = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{3}{n\pi}(((-1)^n - 1))sinnx, x \in [-\pi;\pi]/\{0\}$.
*Точка 0- точка розриву стрибок, чому дорівнюе значення ряду у цій точці?*

$$F(0) = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}.$$

*А значення функції інакше 0, тому функцію розкладаємо в точках її неперервності.*

Як же поширити цей розклад на випадок коли відрізок несиметричний?

Розкладатимемо функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ з періодом $T = b - a$. Якщо позначити за $l = \frac{T}{2} = \frac{b-a}{2}$, тоді коефіцієнти для ряду Фур'є в даному випадку рахуватимемо за наступними формулами.

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{a}^{b} f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{a}^{b} f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

В них відрізняються лише межі інтегрування.

**Приклад 28** *Розкласти в ряд Фур'е функцію* $y = e^x$ *на відрізку* $[2, 4]$ *з періодом 2.*
*В даному прикладі* $l = \frac{2}{2} = 1$. *Обчислимо коефіцієнти*

$$a_n = \int\limits_{2}^{4} e^x cosn\pi xdx$$

*і*

$$b_n = \int\limits_{2}^{4} e^x sinn\pi xdx.$$

*В даному випадку ми можемо скориставшись комплексними числами і формулою* $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$, *обчислити швиденько два інтеграли разом(це можна зробити окремо методом інтегрування частинами по два рази кожний інтеграл.)*

*Отже* $a_n + ib_n = \int_2^4 e^x(cosn\pi x + isinn\pi x)dx = \int_2^4 e^{in\pi x + x}dx = \frac{e^{in\pi x+x}}{in\pi+1}|_2^4 = \frac{e^{in\pi 4+4}}{in\pi+1} - \frac{e^{in\pi 2+2}}{in\pi+1} = e^4\frac{cos4n\pi+isin4n\pi}{1+in\pi} - e^2\frac{cos2n\pi+isin2n\pi}{1+in\pi} = (e^4 - e^2)\frac{1-in\pi}{1+(n\pi)^2}$.

*Отже* $a_n = (e^4 - e^2)\frac{1}{1+(n\pi)^2}$ *-дійсна частина комплексного числа,яке отримали.*

*Відповідно* $b_n = (-e^4 + e^2)\frac{n\pi}{1+(n\pi)^2}$ *– уявна частина, коефіцієнт біля і.*

*Щоб порахувати* $a_0$ *достатньо підставити в* $a_n$ *0 замість n, отже,* $a_0 = (e^4 - e^2)$.
*Таким чином, ряд Фур'е для даної функції*

$$e^x = \frac{e^4 - e^2}{2} + \sum_1^\infty (e^4 - e^2)\frac{1}{1+(n\pi)^2}cosn\pi x + (-e^4 + e^2)\frac{n\pi}{1+(n\pi)^2}sinn\pi x, x \in [2; 4].$$