КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Контрольні завдання з математичного аналізу

Навчальний посібник

Київ
Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2001

УДК 517.2

Контрольні завдання з математичного аналізу: Методичний посібник для студентів радіофізичного та фізичного факультетів університету / Нац. унів. ім. Т. Шевченка; Упорядники: С.В.Єфіменко, С.А.Кривошея.

Посібник містить близько 1000 задач з курсу математичного аналізу для самостійного розв'язування. Кожне завдання складається з 25 варіантів задач. Перед кожним розділом наведені теоретичні відомості, необхідні при виконанні завдань.

Затверджено
Радою радіофізичного факультету
____________2001 року

Границя числової послідовності.

Послідовність $\{x_n\}, n=1,2,\ldots$ має своєю границею число a (збігається до a), тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)$, такий що $|x_n-a|<\varepsilon$ при $\forall n>N$.

Послідовність $\{x_n\}, n=1,2,\ldots$ називається нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Запис $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ означає, що $\forall E>0\ \exists N=N(E)$,такий що $|x_n|>E$ при $\forall n>N$.

Величина ξ називається частковою границею (граничною точкою) послідовності $\{x_n\}, n=1,2,\ldots,$ якщо існує її підпослідовність $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots (1\le k_1<k_2<\ldots)$, така що $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \xi$.

Найменша з часткових границь послідовності $\{x_n\}$ називається нижнею границею і позначається $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, а найбільша з її часткових границь називається верхнею границею і позначається $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Необхідною і достатньою умовою існування границі послідовності є

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Точною нижнею межею послідовності $\{x_n\}$ називається величина m (позначається $m=\inf\limits_{n\ge1} x_n$), для якої виконуються умови:

1) $m\le x_n \forall n\ge1$,

2) $\forall\varepsilon>0\ \exists x_n$ - елемент послідовності такий, що $x_n<m+\varepsilon$.

Аналогічно, точною верхнею межею послідовності $\{x_n\}$ називається величина M (позначається $M=\sup\limits_{n\ge1} x_n$), для якої виконуються умови:

1) $M\ge x_n \forall n\ge1$,

2) $\forall\varepsilon>0\ \exists x_n$ - елемент послідовності такий, що $x_n>\mathrm{M}-\varepsilon$.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ необмежена знизу (зверху), то вважають, що $\inf\limits_{n\ge1} x_n=-\infty$ ($\sup\limits_{n\ge1} x_n=+\infty$).

<u>Завдання 1</u>. Обчислити границю числової послідовності.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \quad n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \quad n\left(\sqrt{n(n-1)}-\sqrt{n^2+2}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-4}\right)\cdot n\sqrt{n}$ 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+6}-n\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+2)(n^2-3)}-\sqrt{n^4-8}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-6}\quad -n\sqrt{n(n^2+4)}}{\sqrt{n}}$ 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{3-n^3}\right)$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)}-\sqrt{n^2-3n+2}\right)$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+4)(n-1)}-\sqrt{(n+7)(n-4)}\right)$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n^4-4)}-\sqrt{n^5+1}\right)$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{2+27n^3}-3n\right)$ 12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt[3]{n^3-1}\right)$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{(n+1)^3}-\sqrt[4]{(n-1)^3}\right)$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right)$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n(n^5+3)}-\sqrt{(n^4+1)(n^2-2)}}{2n}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}\right)$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right)$ 18. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[4]{n^4+2}-\sqrt[4]{n^4-1}\right)$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+7}\left(\sqrt{n^3+3}-\sqrt{n^3-2}\right)$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+2)(n^2+3)}-\sqrt{(n^2-2)(n^2-3)}\right)$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n(n^4+3)}-\sqrt{(n^3+1)(n^2-2)}}{\sqrt{n}}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n-2}-\sqrt{(n+1)(n^2-3n+1)}\right)$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^4-2)(n^2+1)}-\sqrt{n^6-3}}{n}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2+4}-\sqrt[3]{n(n-2)}\right)$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{(n^2+3)(n^2-1)}-n\right)$

<u>Завдання 2</u>. Обчислити границю числової послідовності.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2}{3n^2+1}\right)^{n^2}$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{5n+1}\right)^{n+2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{n-2}$ 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{-n+1}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+5}{7n^2+2}\right)^{-2n^2}$ 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n+2}{n^2-n+1}\right)^{10n^2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2n+1}{3n^2-n+1}\right)^{-n^2}$ 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2-2}{7n^2+1}\right)^{2n^2}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-8}{n+3}\right)^{1-2n}$ 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-10n}{7-10n}\right)^{3n-2}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-2}{n^3+3}\right)^{-2n^2}$ 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-9}{5n+2}\right)^{-n/3}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+2}{n^3+n-1}\right)^{-n^3}$ 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2-n}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+9}{n^2-7}\right)^{3n+1}$ 16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{n^2}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^3-n+2}{3n^3+1}\right)^{n^2+1}$ 18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7}{2n^2-3}\right)^{-n^2+n}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n-9}{n^2-2n+5}\right)^{-n^2}$ 20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-n}{n^3-n+1}\right)^{1-n^3}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+11}\right)^{-n/2}$ 22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+2}{2n^2+n-1}\right)^{n-n^2}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-5}{n^3+n}\right)^{1-n^2}$ 24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^3+1}{5n^3-3}\right)^{2n^3}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+2n-2}{7n^2+n+1}\right)^{-3n}$

<u>Завдання 3</u>. Для числової послідовності $x_n\,(n=1,2,\ldots)$ знайти $\inf x_n, \sup x_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n, \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

1. $x_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ 2. $x_n=\dfrac{2n+1}{3n-1}\sin\dfrac{\pi n}{2}$

3. $x_n=\dfrac{2n-1}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$ 4. $x_n=\dfrac{2+(-1)^n}{3}+\dfrac{(-1)^{3n-1}}{10}$

5. $x_n=(-1)^n+2\sin\dfrac{\pi n}{2}$ 6. $x_n=(-1)^{n-1}-\cos\dfrac{\pi n}{2}$

7. $x_n=(-1)^n n\left[2+(-1)^{n-1}\right]$ 8. $x_n=\dfrac{10n+1}{n+2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi n}{3}$

9. $x_n=\dfrac{5n+2}{n+1}\sin\dfrac{2\pi n}{3}$ 10. $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{\left(\pi+(-1)^n\right)\cdot n}{2n+1}$

11. $x_n=\dfrac{2}{(-1)^{n-1}n-9{,}8}$ 12. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\sin\dfrac{\pi n}{2}$

13. $x_n=\dfrac{3n+7}{2n-1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$ 14. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}+2(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

15. $x_n=\dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{\pi n}{4}$ 16. $x_n=\dfrac{n-2}{n}\cos\dfrac{\pi n}{4}$

17. $x_n=\dfrac{n-15}{n\sin\dfrac{\pi n}{2}+1}$ 18. $x_n=\dfrac{n-10}{n^2\cos\dfrac{\pi n}{2}+1}$

19. $x_n=(-1)^n\operatorname{tg}\dfrac{\pi n}{3}$ 20. $x_n=\left[2+(-1)^n\right]\sin\dfrac{2\pi n}{3}$

21. $x_n=\dfrac{n\cos\dfrac{\pi n}{2}}{n+1}+\dfrac{(-1)^n}{2}$ 22. $x_n=\operatorname{tg}\dfrac{2\pi n}{3}+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

23. $x_n=\dfrac{n}{(-1)^n n-7{,}6}$ 24. $x_n=\dfrac{(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}}{n}+(-1)^n$

25. $x_n=\operatorname{tg}\dfrac{\pi n}{3}+\dfrac{2(-1)^n}{3}$

Неперервність функції. Границя функції в точці.

Запис $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f}(x) = a$ означає, що $\forall \varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ для яких $\mathrm{f}(x)$ має зміст, спрадлива нерівність: $|\mathrm{f}(x) - a| < \varepsilon$.

Число a' називається лівою границею функції $\mathrm{f}(x)$ в точці x_0, тобто $a' = \lim\limits_{x\to x_0 - 0} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0 - 0)$, якщо $|\mathrm{f}(x) - a'| < \varepsilon$ при $0 < a - x < \delta$. Аналогічно, число a'' називається правою границею функції $\mathrm{f}(x)$ в точці x_0, тобто $a'' = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0 + 0)$, якщо $|\mathrm{f}(x) - a''| < \varepsilon$ при $0 < x - a < \delta$.

Запис $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f}(x) = \infty$ означає, що $\forall E > 0$ виконується нерівність $|\mathrm{f}(x)| > E$, як тільки $|x - x_0| < \delta(E)$.

Мають місце визначні границі:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Запис $\varphi(x) = O(\psi(x))$ при $x \to x_0$ означає, що в деякому околі U_{x_0} точки $x_0 (x \neq x_0)$ виконана нерівність $|\varphi(x)| \le C|\psi(x)|$, де C – деяка стала. Зокрема, коли $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_{x_0}$, то це співвідношення виконане, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \mathrm{const}$. Тоді записують: $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$.

Запис $\varphi(x) = o(\psi(x))$ при $x \to x_0$ означає, що

$\varphi(x) = \alpha(x) \cdot \psi(x)$ $(x \in U_{x_0}, x \neq x_0)$ де $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Функції називаються еквівалентиними ($\varphi(x) \approx \psi(x)$ при $x \to x_0$), якщо $\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x))$ при $x \to x_0$. Якщо $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_{x_0}$, то із останньої рівності випливає, що $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$.

Якщо $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0$ $(p > 0)$, то $\varphi(x)$ називається нескінченно малою порядка p відносно нескінченно малої x. Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0$ $(p > 0)$, то $\varphi(x)$ називається нескінченно великою порядка p відносно нескінченно великої x.

Справедливі співвідношення:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a = \mathrm{const} \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} a$
2. $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} \varphi(x_0)$ $(\varphi(x) \neq 0, x \neq x_0)$
3. $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} \psi(x) \Rightarrow \psi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} \varphi(x)$
4. $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} \psi(x),\ \psi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} \phi(x) \Rightarrow \varphi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} \phi(x)$
5. $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} \varphi_1(x),\ \psi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} \psi_1(x) \Rightarrow \varphi(x)\psi(x) \underset{x\to x_0}{\approx} \varphi_1(x)\psi_1(x),$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \underset{x\to x_0}{\approx} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \quad (\psi(x) \neq 0, \quad \psi_1(x) \neq 0)$$

<u>Завдання 4</u>. Обчислити границю функції.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{e^{x^2} - 1}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 - 2\sin x)}{\sin 3x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos x - 1}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{x^2 + \pi x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{\ln(1+2x)}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{e^{3x}-1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{1-e^{x^2}}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1-\ln(e-x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\pi\left(1+x/3\right)\right)}{e^{6x}-1}$ 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{arctg}3x}{4-\sqrt{16+x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin \pi x/3}{1-\cos x}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+2x^2}}{\ln(1-x^2)}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x^2}{1-\sqrt{\cos 2x}}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{\ln\left(1+\sqrt{\sin(\pi x)}\right)}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{\cos 3x-1}$ 16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2(x+\pi))}{1-e^{5x}}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{2x+1}}{\cos x-1}$ 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\pi(x+3)/2\right)}{\ln(1-2x)}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x^2}{\left(1-e^{2x}\right)^2}$ 20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\pi\ln(1-3x)}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 5x}}{\sin 2x^2}$ 22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ 24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\pi(x+1)/2\right)-1}{e^{x^2}-1}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\ln(1-3x)}$

Завдання 5. Обчислити границю функції.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin 3x}}{\operatorname{tg}2x}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sin 2\pi x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+2^{-x}-2}{1-\cos 3x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}2x}}{x^3}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x\sin 5x}}{e^{2x^2}-1}$ 6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1+\sqrt[3]{2+x}}{\sin\pi x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 3x}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x+1}-4}{\ln(1-x\sqrt{1+xe^x})}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\lg(x-1)}$ 10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\sin\pi(x+2)}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x^2-\cos 3x}{\sin^2 x}$ 12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2}{\ln x-\ln 2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-3\sin x}{x\ln\cos 2x}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-\cos x+1}{\sin^2 3x}$

15. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\ln\sin x}{\sin(x-\pi/4)-\cos(x-\pi/4)}$

16. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\cos^2 2x}{1-\sin^3 2x}$ 17. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{1-\lg 2x}$

18. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3^x-3}{\sin(1-x^2)}$ 19. $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{\cos(\pi-3x)}{1-2\sin x}$

20. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1-\lg 5x}{1-\sqrt{x-1}}$ 21. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x}$

22. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2^{x+1}-1}{\ln(2+x)}$ 23. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{2\sin^2 x-\sin 2x}{\ln\operatorname{tg} x}$

24. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sin\pi x}{\ln(3x-5)}$ 25. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 x}{\ln\left(1+\cos^2 x/2\right)}$

<u>Завдання 6</u>. Обчислити границю функції.

1. $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right)^{1/(\sqrt{x}-2)}$ 2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt{x}-1)}$

3. $\lim\limits_{x\to\pi}(\cos 2x)^{3/\sin^2 x}$ 4. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{-1/\cos x}$

5. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{2x+3}{x+2}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}+1)}$ 6. $\lim\limits_{x\to8}\left(\dfrac{3x-12}{x+4}\right)^{1/(2-\sqrt[3]{x})}$

7. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{1/\cos 2x}$ 8. $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^x-1\right)^{\operatorname{ctg} 2x}$

9. $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{\operatorname{ctg}(\pi x)}$ 10. $\lim\limits_{x\to3}\left(5e^{x-3}-4\right)^{x/(x-3)}$

11. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(3-2x)}$ 12. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{5-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\pi x/4}$

13. $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3\pi-4x}}$ 14. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(1-\cos 2x)^{\sec 6x}$

15. $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(3-2x)}}$ 16. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{1/(x-2)}$

17. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/\sin 2x}$ 18. $\lim\limits_{x\to\pi}(\cos 2x)^{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\pi}\right)^{-1}}$

19. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4-x}{2}\right)^{\frac{\sin\pi x/4}{\ln(3-x)}}$ 20. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\cos^{-1}\left(3x-\pi/4\right)}$

21. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$ 22. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\sqrt{x}\right)^{\operatorname{tg} x/\sin\pi x}$

23. $\lim\limits_{x\to5}\left(2-\dfrac{x}{5}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$ 24. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}\right)^{\sec\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}$

25. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\arcsin^{-1} 2x}$

Завдання 7. Виділити головну степеневу частину виду Ax^n при $x \to 0$ для даних функцій та записити асимптотичну формулу $\mathrm{f}(x) = Ax^n + o(x^n),\ x \to 0$.

1. $\mathrm{f}(x) = \ln\cos x + e^{x^2/2} - 1$

2. $\mathrm{f}(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + \sqrt{1+\sin^4 x} - 1$

3. $\mathrm{f}(x) = \dfrac{3\sin 2x}{2(2+\cos x)} - x$ 4. $\mathrm{f}(x) = \sin\ln(1+x) - x^2$

5. $\mathrm{f}(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x^2/3} - 1$

6. $\mathrm{f}(x) = 1 - \sqrt{1+x^2}\cos x - x^4/3$

7. $\mathrm{f}(x) = x^2\cos^2 x - \sin^2 x + \dfrac{2}{3}x^4$

8. $\mathrm{f}(x) = \sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x^2/2$

9. $\mathrm{f}(x) = 2\sin^2 x + \ln\cos 2x$ 10. $\mathrm{f}(x) = e^{\mathrm{tg}^2 x} - e^{x^2}$

11. $\mathrm{f}(x) = \dfrac{\sqrt{1+6x} - 1 - \ln(1+3x)}{\left(\sqrt{1+6x} - 1\right)\ln(1+3x)}$

12. $\mathrm{f}(x) = xe^{\sin x} - \sin x - \sin^2 x$ 13. $\mathrm{f}(x) = \ln^2(1-x) - x^2 - x^3$

14. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x} - \mathrm{arctg}\, 2 + 2x$

15. $\mathrm{f}(x) = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + 1 - x^2/2$

16. $\mathrm{f}(x) = \ln(\sec \pi x) - \dfrac{1}{2}\pi^2 x^2$ 17. $\mathrm{f}(x) = \ln\dfrac{\mathrm{ch}\,\pi x}{\cos\pi x} - \pi^2 x^2$

18. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{sh}(\mathrm{tg}\, x) - x - \dfrac{1}{2}x^3$ 19. $\mathrm{f}(x) = 1 - (\cos)^{\sin x} - \dfrac{1}{2}x^3$

20. $\mathrm{f}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} - \dfrac{4}{3}x$ 21. $\mathrm{f}(x) = \sin(\sin x) - x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}$

22. $\mathrm{f}(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) - 2\sqrt{1+x^6}$

23. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{sh}(\sin x) - x + \dfrac{x^4}{18}$ 24. $\mathrm{f}(x) = \sin(\mathrm{sh}\, x) - x + \dfrac{x^4}{18}$

25. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{ch}(\sin x) - e^{x^2/2}$

Похідна та диференціал функції.

Границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{f}(x_0+\Delta x) - \mathrm{f}(x)}{\Delta x}$, якщо вона існує, називається похідною функції $\mathrm{f}(x)$ в точці x_0 (позначається $\mathrm{f}'(x_0)$).

Якщо приріст функції $y = \mathrm{f}(x)$: $\Delta y = \mathrm{f}(x+\Delta x) - \mathrm{f}(x)$ може бути поданий у вигляді: $\Delta y = A(x)dx + o(dx)$, де $dx = \Delta x$, то лінійна частина цього приросту називається диференціалом функції y: $dy = A(x)dx$. Сама функція $\mathrm{f}(x)$ називається диференційовною в точці x. Для існування диференціалу функції $y = \mathrm{f}(x)$ необхідно і достатньо, щоб існувала скінченна похідна $y' = \mathrm{f}'(x)$, причому тоді виконується рівність $dy = y'(x)dx$. Ця формула залишається справедливою і в тому випадку, коли змінна x є функцією від нової незалежної змінної (властивість інваріантності форми першого диференціалу функції).

Завдання 8. Знайти похідну заданої функції.

1. $y=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)+x\left(5x^2+3\right)\sqrt{4x^2+1}$

2. $y=\dfrac{x\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}+\ln\sqrt{1-9x^2}$ 3. $y=2\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2}$

4. $y=\dfrac{x^3}{\arcsin x}+\dfrac{x^2+1}{x}\sqrt{1-x^2}$ 5. $y=2\arccos\dfrac{3}{2x+1}+\sqrt{x^2+x-2}$, $2x+1>0$

6. $y=\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)-\sqrt{1+4x^2}\operatorname{arcctg} 2x$

7. $y=3\arccos\dfrac{1}{2x+3}-2\sqrt{x^2+3x+2}$, $2x+3>0$

8. $y=\ln\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right)-x\left(2x^2+3\right)\sqrt{1+9x^2}$

9. $y=\ln\left(2x-\sqrt{1+4x^2}\right)+\dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$ 10. $y=\sqrt{4-10x-3x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{3x+5}{3\sqrt{3}}$

11. $y=\sqrt{(5+x)(2-x)}+2\ln\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{2-x}\right)$

12 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3x+1}{\sqrt{5}}+\ln\dfrac{\sqrt{3x^2+2x+2}}{x}$ 13. $y=\ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{2x+1}}\right)-\arcsin\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$

14. $y=\dfrac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}+\ln\dfrac{1-3x}{1+3x}$ 15. $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x}-2\arcsin 2x$

16. $y=\arcsin\sqrt{x+3}-\sqrt{(x+3)(4-x)}$ 17. $y=x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\arcsin x+2x$

18. $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{x^2+3}}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x^2}$ 19. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\sqrt{16x^4+1}-4x^2}}{2x}$

20. $y=\ln\dfrac{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}$ 21. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{9x^2-1}-\ln\dfrac{3x}{\sqrt{9x^2-1}}$

22. $y=\ln\left(4+\sqrt{x+4}\right)+\sqrt{(x+4)(x-1)}$ 23. $y=\arccos\left(x/3\right)+x\left(x^2-1\right)\sqrt{9-x^2}$

24. $y=\arcsin e^{-2x}+\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1}\right)$ 25. $y=\dfrac{\arccos 7x}{\sqrt{1-49x^2}}+\ln\dfrac{1-7x}{1+7x}$

Завдання 9. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично.

1. $\begin{cases} x=\sin t+\cos t, \\ y=\cos 2t \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=t\sin t+\cos t, \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=\operatorname{sh} t, \\ y=\operatorname{ch}^{2/3} t \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x=\sin 2t, \\ y=\ln\cos 2t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=e^t, \\ y=\arccos t \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos^3\left(t/2\right) \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=1/\sqrt{1-2t} \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t}, \\ y=\sqrt[3]{1-t} \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=\operatorname{ctg} t, \\ y=1/\sin t \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\operatorname{ctg}^2 t \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x=t-\sin 2t, \\ y=3-2\cos 2t \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = t + \sin 3t, \\ y = 2 + 3\cos 3t \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \operatorname{cosec} t \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x = \sqrt{t-2}, \\ y = (t+1)\big/\sqrt{t-2} \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t+1}, \\ y = \ln t \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x = \sqrt{t-2}, \\ y = \ln(t-1) \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 1\big/t^2, \\ y = 1\big/(4t^2+1) \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x = \operatorname{ch}^2 t, \\ y = 1\big/\operatorname{sh}^2 t \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = \ln\sin 3t \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1}, \\ y = t\big/\sqrt{t-1} \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arcctg} t \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \sqrt{t+1}, \\ y = \sqrt[3]{t\big/(t+1)} \end{cases}$

Завдання 10. Перевірити, що функція $y = y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x, y) = 0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C = \mathrm{const})$.

1. $\mathrm{F}(x, y) = x^3 + 3x^2y - y^3 - C;\quad (x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$
2. $\mathrm{F}(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - C;\quad (x - 2y)dy + (y - x)dx = 0$
3. $\mathrm{F}(x, y) = x^2 + y^2 - Cx;\quad 2xyy' + x^2 - y^2 = 0$
4. $\mathrm{F}(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{C^2} - 1;\quad (4 - x^2)y' + xy = 0$
5. $\mathrm{F}(x, y) = x - y - Ce^{\frac{x}{y-x}};\quad yy' + x - 2y = 0$
6. $\mathrm{F}(x, y) = (1 + x^2)(1 + y^2) - C;\quad (x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0$
7. $\mathrm{F}(x, y) = (y - 2x)^3 - C(y - x - 1)^2;$
   $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$
8. $\mathrm{F}(x, y) = y - (C - \cos y)x^2;\quad 2ydx + (x^3 \sin y - x)dy = 0$
9. $\mathrm{F}(x, y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 - C;$
   $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$
10. $\mathrm{F}(x, y) = 3xy^2 + yx^2 + 3y + x^2 - C;$
    $(2xy + 3y^2 + 2x)dx + (x^2 + 6xy + 3)dy = 0$
11. $\mathrm{F}(x, y) = x^2 + \dfrac{2}{3}(x^2 - y^2)^{3/2} - C;$
    $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$
12. $\mathrm{F}(x, y) = \ln\dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{x - y} - C;$
    $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x - y)^2}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{(x - y)^2} - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$

13. $F(x,y)=\ln x+\ln y+y^2-\frac{x}{y}-C;$

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)dx+\left(2xy+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$$

14. $F(x,y)=x^2+\sin^2 y-Cx;\quad \left(x^2-\sin^2 y\right)dx+x\sin 2y\,dy=0$

15. $F(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-y-C;\quad ydx-\left(x+x^2+y^2\right)dy=0$

16. $F(x,y)=x^2+y^2-\ln\frac{x-y}{x+y}-C;$

$$\left(x^3-xy^2-y\right)dx+\left(x^2y-y^3+x\right)dy=0$$

17. $F(x,y)=x-y(C+\ln y);\quad (x+y)y'=y$

18. $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}};\quad (y-x)dx-(x+y)dy=0$

19. $F(x,y)=2y^3-3xy^2+6x^2y-C;$

$$\left(y^2-4xy\right)dx-\left(2x^2-2xy+2y^2\right)dy=0$$

20. $F(x,y)=(y-2x)^3-C(y-x-1)^2;$

$$(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$$

21. $F(x,y)=2x+y-1-Ce^{2y-x};$

$$(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$$

22. $F(x,y)=y^2e^{-\frac{1}{xy}}-C;\quad ydx+\left(2x^2y+x\right)dy=0$

23. $F(x,y)=x^3+x^3\ln y-y^2-C;$

$$3x^2(1+\ln y)dx-\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy=0$$

24. $F(x,y)=x+ye^{\frac{x}{y}}-C;\quad \left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$

25. $F(x,y)=x^2-\frac{x}{y}+y+\ln y-C;$

$$\left(2xy^2-y\right)dx+\left(y^2+x+y\right)dy=0$$

Завдання 11. Дослідити функцію $y(x)$ та побудувати її графік.

1. $y=\frac{x^3+2}{x^2-1}$	2. $y=\frac{3}{x^2+3x}$
3. $y=\frac{2x}{4-x^2}$	4. $y=\frac{2+x^3}{x^2-9}$
5. $y=\frac{x^2}{(x+1)^2}$	6. $y=\frac{1}{16x^4-1}$
7. $y=\frac{x^2-x+4}{x-1}$	8. $y=\frac{x^2}{x^2+3}$
9. $y=\frac{2x^2+1}{x^3-x}$	10. $y=\frac{x^3-1}{x^2}$

11. $y=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2$ 12. $y=\dfrac{x}{4+3x-x^2}$

13. $y=\dfrac{3x-4}{x^3}$ 14. $y=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}$

15. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-4x}$ 16. $y=-\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$

17. $y=-\dfrac{3x}{x^2-1}$ 18. $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}$

19. $y=-\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^2$ 20. $y=\dfrac{x^3-8}{x^2}$

21. $y=\dfrac{7-2x-x^2}{x^2+2x+3}$ 22. $y=-\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^2$

23. $y=-\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$ 24. $y=\left(\dfrac{3+2x}{3-2x}\right)^2$

25. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+4}$

Невизначений інтеграл.

Якщо функція $f(x)$ визначена та неперервна на проміжку (a,b), а $F(x)$ - її первісна, тобто $F'(x)=f(x)$ при $a<x<b$, то

$\int f(x)dx=F(x)+C$, де C - довільна стала.

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ - деякі неперервні функції, то має місце формула інтегрування частинами:

$\int u\cdot dv=uv-\int v\cdot du$

<u>Завдання 12.</u> Знайти невизначений інтеграл від дробово-раціональної функції.

1. $\int\dfrac{3x^3+11x^2+16x+10}{(x+1)^2(x^2+x+2)}dx$ 2. $\int\dfrac{3x^3-2x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

3. $\int\dfrac{2x^3+2x^2+6x+1}{(x^2+4)(x^2+x+1)}dx$ 4. $\int\dfrac{3x^3+10x^2+14x+5}{(x+1)^2(x^2+3x+4)}dx$

5. $\int\dfrac{x^3+4x^2+7x+2}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx$ 6. $\int\dfrac{x^3+6x^2+17x+21}{(x+2)^2(x^2+3x+5)}dx$

7. $\int\dfrac{3x^3+8x^2+10x+10}{(x+1)^3(x^2+4)}dx$ 8. $\int\dfrac{x^3-3x^2+4x-1}{(x^2+2)(2x^2+x+1)}dx$

9. $\int\dfrac{x^3+7x-15}{(x-2)^2(x^2+x+1)}dx$ 10. $\int\dfrac{2x^3+9x^2+10x-5}{(x+2)^2(x^2+x+3)}dx$

11. $\int\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{(x^2+x+3)(2x^2+x+1)}dx$ 12. $\int\dfrac{3x^3+x^2+2x+2}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$

13. $\int\dfrac{2x^3+6x^2+5x+13}{(x+2)^2(x^2-2x+3)}dx$ 14. $\int\dfrac{3x^3-x^2+14x+1}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+3)}dx$

15. $\int\dfrac{3x^3+2x^2+x+7}{(x+1)^2(x^2-2x+2)}dx$ 16. $\int\dfrac{2x^3-2x^2+2x+2}{(x^2-2x+5)(x-1)^2}dx$

17. $\int \frac{x^3+17x^2+39x+11}{(x+2)^3(x^2+3)}dx$ 18. $\int \frac{x^3-7x^2+20x-40}{(x-3)^2(2x^2-x+1)}dx$

19. $\int \frac{8x^2-6x+11}{(x^2-x+3)(2x^2+x+2)}dx$ 20. $\int \frac{4x^3-12x^2+12x-36}{(x-1)^2(x^2+7)}dx$

21 $\int \frac{7x^3-3x^2-14x-3}{(x^2+9)(2x^2-2x+3)}dx$ 22. $\int \frac{x^3+x^2-x-7}{(2x^2+1)(x^2-x+4)}dx$

23 $\int \frac{-2x^3+2x^2-3x-12}{(x+2)^3(x^2+5)}dx$ 24. $\int \frac{3x^3-2x^2+6x-7}{(x^2-x+4)(2x^2-x+1)}dx$

25. $\int \frac{3x^2-5x-26}{(x+3)^2(x^2-x+4)}dx$

Завдання 13. Знайти інтеграл.

1. $\int (x^2-px+1)\cdot e^{2x}dx$ 2. $\int (x+2)^2\cdot e^{-3x}dx$

3. $\int (3x^2+1)\ln xdx$ 4. $\int \ln^3 xdx$

5. $\int x^2\cos 2xdx$ 6. $\int x\sin^2 2xdx$

7. $\int (x^2+4)\operatorname{arctg} xdx$ 8. $\int (2x-1)^2\arcsin 3xdx$

9. $\int (x^2+1)\arccos \pi xdx$ 10. $\int (4x^2+3x)\operatorname{sh} 3xdx$

11. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-2x}}dx$ 12. $\int x^3(\operatorname{arctg} 2x)^2dx$

13. $\int (2x^3+1)\operatorname{ch} 2xdx$ 14. $\int x^2\sin(\ln x)dx$

15. $\int x^4\cos(\ln 2x)dx$ 16. $\int \sqrt[4]{x^5}\ln 3xdx$

17. $\int \frac{\ln^2(x+1)}{(x+1)^2}dx$ 18. $\int (\arcsin 2x)^2dx$

19. $\int \frac{\ln^3 3x}{x^2}dx$ 20. $\int \frac{\ln^2 3x}{x^2\cdot\sqrt[3]{2x}}dx$

21. $\int \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1+2x}}dx$ 22. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x/3}{\sqrt{x^2+9}}dx$

23. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)dx$ 24. $\int \ln\left(x-\sqrt{x+5}\right)dx$

25. $\int (2x^3+1)\sin 3xdx$

Функції багатьох змінних.

Частинна похідна функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по змінній x_k позначається $f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або $\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k}$. Результат частинного диференціювання функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не залежить від порядку диференціювання, якщо всі похідні, які використані в обчисленнях, є неперервними.

Частинна похідна складної функції $z = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, де $u_k = u_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$ може бути обчислена за формулами:

$$\frac{\partial z(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \ (k = 1, \dots, m).$$

Якщо рівність $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ визначає неявну функцію $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка є диференційовною, то її похідні можуть бути знайдені із рівнянь: $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_k} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Завдання 14. Перевірити, чи є функція $u = u(x, y, z)$ розв'язком даного диференціального рівняння (φ та ψ - довільні , достатню кількість разів диференційовні функції).

1. $u = x + \varphi(xy)$; $\quad x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} - x = 0$

2. $u = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$; $\quad 2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0$

3. $u = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $\quad y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

4. $u = \varphi(x - y, y - z)$; $\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

5. $u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$; $\quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

6. $u = \varphi(x)\psi(y)$; $\quad u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$

7. $u = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$; $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

8. $u = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$; $\quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$

9. $u = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$; $\quad x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

10. $u = x + y + \varphi(xy)$; $\quad x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} - x + y = 0$

11. $u = \sqrt{x^2 + y^2}\,\varphi\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

$(x + y)\frac{\partial u}{\partial x} - (x - y)\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$

12. $u = \sin y + \varphi(\sin x - \sin y)$; $\quad \sec x\frac{\partial u}{\partial x} + \sec y\frac{\partial u}{\partial y} - 1 = 0$

13. $u = x^5\varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$; $\quad x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} - 5z = 0$

14. $u = y\varphi\left(x^2 - y^2\right)$; $\quad y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} - xu = 0$

15. $u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y + z) + \frac{1}{2}x^2yz + \varphi(y - x, z - x)$;

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - xyz = 0$

16. $u = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$; $\quad x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$

17. $u = e^{y}\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$; $\left(x^2 - y^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} - xyz = 0$

18. $u = \varphi\left(\dfrac{x-y}{z}, \dfrac{(x+y+2z)^2}{z}\right)$;

$(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

19. $u = \varphi\left(xy + y^2\right)$; $(x+2y)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

20. $u = e^{2y}\varphi(x-y)$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} - au = 0$

21. $u = \left(\dfrac{xz}{y} + y\right)\varphi(y) + x$; $\left(x^2 + y^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2 - u^2 = 0$

22. $u = e^{-\frac{1}{x}}\varphi\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x}\right)$; $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial u}{\partial z} - u = 0$

23. $u = y - x + \varphi\left(x^2 - y^2\right)$; $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} - x + y = 0$

24. $u = \dfrac{x^2}{3y} + \dfrac{\varphi(xy)}{xy}$; $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} - x^2 = 0$

25. $u = y\varphi\left(\dfrac{y^3}{x^2} + y\right)$; $\left(x^3 + 3xy^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2y^2x = 0$

Завдання 15. Перевірити, чи є функція $u = u(x, y, z)$, неявно задана рівнянням виду $\mathrm{F}(x, y, z, u) = 0$, розв’язком даного диференціального рівняння.

1. $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{u}, \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{u}\right) = 0$; $\left(x^2 + y^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + z^2 = 0$

2. $\mathrm{F}\left(\dfrac{x-1}{u-3}, \dfrac{y-2}{u-3}\right) = 0$; $(x-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y-2)\dfrac{\partial u}{\partial y} - u + 3 = 0$

3. $x + 2y + 3u - \mathrm{F}\left(x^2 + y^2 + u^2\right) = 0$;

$(3y - 2u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (u - 3x)\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2x + 3y = 0$

4. $\mathrm{F}\left(e^{-x} - \dfrac{1}{y},\ u + \dfrac{x - \ln y}{e^{-x} - \dfrac{1}{y}}\right) = 0$; $e^{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} - ye^{x} = 0$

5. $\mathrm{F}\left(u, \ln x + \dfrac{y}{u}\right) = 0$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

6. $\mathrm{F}\left(e^{-2x}(u\sin x + y\cos x), e^{-2x}(y\sin x - u\cos x)\right) = 0$;

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2y - u)\dfrac{\partial u}{\partial y} - y - 2u = 0$

7. $\mathrm{F}\left(u, x^2 - y^2u\right) = 0$; $yu\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

8. $F\left(u, xe^{-\frac{y}{u}}\right)=0; \quad x\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0$

9. $F\left(x+y+u, x^2+y^2+u^2\right)=0;$

$(u-y)\frac{\partial u}{\partial x}+(x-u)\frac{\partial u}{\partial y}+x-y=0$

10. $F(x-y, y-u, u-x)=0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+1=0$

11. $F(x-2u, y-3u)=0; \quad 2\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}-1=0$

12. $x^2+y^2+u^2-yF\left(\frac{u}{y}\right)=0;$

$\left(x^2-y^2-u^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial u}{\partial y}-2xu=0$

13. $F\left(x+\frac{u}{y}, y+\frac{u}{x}\right)=0; \quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-u+xy=0$

14. $F\left(xe^{-u}, y^2-2x(u-1)\right)=0; \quad y\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{y}{x}=0$

15. $F\left(\frac{x}{y}, xy-2u, z+u-xy\right)=0;$

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(z+u)\frac{\partial u}{\partial z}-xy=0$

16. $F\left(\frac{x-y}{z}, \frac{(x+y+2u)^2}{z}, \frac{u-x-y}{z^2}\right)=0;$

$(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}-x-y=0$

17. $F\left(u(y-z), u(x-y), \frac{x+y+z}{u^2}\right)=0;$

$(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$

18. $F\left(u-2y, y+2\sqrt{u-x-y}\right)=0;$

$\left(1+\sqrt{u-x-y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-2=0$

19. $F(u, u\ln y-\ln x)=0; \quad xu\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$

20. $F\left(x^2+u^2, ux-y\right)=0; \quad u\frac{\partial u}{\partial x}+\left(u^2-x^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}+x=0$

21. $F\left(u^2-y^2, \frac{x+y+u}{x}\right)=0; \quad x\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}-y=0$

22. $F\left(\frac{x}{u}, \frac{y-ux}{u}\right)=0; \quad x\frac{\partial u}{\partial x}+(xu+y)\frac{\partial u}{\partial y}-u=0$

23. $F\left(ux^2+y^2, u\right)=0; \quad y\frac{\partial u}{\partial x}-xu\frac{\partial u}{\partial y}=0$

$$24.\ \mathrm{F}\left(u, \ln x + \frac{1}{u}\ln y\right) = 0; \quad x\frac{\partial u}{\partial x} - yu\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$25.\ \mathrm{F}\left(u, x^2u^2 + y^2\right) = 0; \quad y\frac{\partial u}{\partial x} - xu^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Завдання 16. Знайти локальні екстремуми даних функцій.

$1.\ u = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$ $\quad$ $2.\ u = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$

$3.\ u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

$4.\ u = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

$5.\ u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 27$

$6.\ u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 27$

$7.\ u = 3xy - x^3 - y^3$ $\quad$ $8.\ u = xy^2(1 - x - y)$

$9.\ u = 4 - \left(x^2 + y^2\right)^{2/3}$ $\quad$ $10.\ u = x^3 + y^3 - 15xy$

$11.\ u = \left(x^2 + y^2\right)\left(e^{-\left(x^2 + y^2\right)} - 1\right)$

$12.\ u = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$

$13.\ u = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad (0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi)$

$14.\ u = \cos x \cos y \cos(x + y) \quad (0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi)$

$15.\ u = x^3 + y^3 + 3xy$ $\quad$ $16.\ u = x^3y^2(6 - x - y)$

$17.\ u = e^{-\left(x^2 + y^2\right)}\left(x^2 + 2y^2\right)$ $\quad$ $18.\ u = x^3 + xy^2 + 3xy$

$19.\ u = 3x^2y + 2xy^2 - 5xy$ $\quad$ $20.\ u = 3xy^2 + 2x^2y + 6xy$

$21.\ u = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 5$ $\quad$ $22.\ u = xy(4 - x - y)$

$23.\ u = 2x^2 - y(x - 1)^2$ $\quad$ $24.\ u = (x + y)e^{-x^2 - y^2}$

$25.\ u = x^4 + y^4 - 2x^2$ $\quad$ $26.\ u = xy\ln\left(x^2 + y^2\right)$

Визначений інтеграл.

Визначений інтеграл $\int_a^b \mathrm{f}(x)dx$ при $\mathrm{f}(x) \ge 0$ чисельно дорівнює площі S криволінійної трапеції, утвореної кривою $y = \mathrm{f}(x)$, віссю OX і відрізками прямих $x = a,\ x = b$.

Формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо функція $\mathrm{f}(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, а $\mathrm{F}(x)$ - її первісна, то

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b$$

Формула інтегрування частинами.

Якщо існують $u(x),\ v(x)$ - неперервно-диференційовні функції на $[a, b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Формула заміни змінних.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ функція, а $u(x),\ v(x)$ - неперервно-диференційовні функції на $[\alpha, \beta]$, де $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Завдання 17. Обчислити дані інтеграли.

1. $\int_{1}^{2} x^2 \sqrt[5]{2-x}\,dx$

2. $\int_{-2}^{1} \frac{xdx}{x^3+1}$

3. $\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin^3 xdx$

4. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2 \cos 3xdx$

5. $\int_{e/2}^{1} x^2 \ln 2xdx$

6. $\int_{1}^{\ln 4} \mathrm{ch}^2\, 2xdx$

7. $\int_{0}^{1/2} \arccos\sqrt{1-2x^2}\,dx$

8. $\int_{1}^{3} \left(1-\left|2-x^2\right|\right)^3 dx$

9. $\int_{1}^{2} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt[3]{1+\ln x}}dx$

10. $\int_{2e}^{3e} \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x}$

11. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^{-x}+e^{-3x}}$

12. $\int_{0}^{1} x^2 \,\mathrm{arctg}\, \pi xdx$

13. $\int_{1/e}^{e} \left(1-\left|\ln x\right|\right)^2 dx$

14. $\int_{1}^{3} \mathrm{arctg}\sqrt{x}dx$

15. $\int_{-1}^{2} xe^{-|x|}dx$

16. $\int_{0}^{1} x^2\sqrt{2-x^2}\,dx$

17. $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x\cos^2 3xdx$

18. $\int_{0}^{\pi} e^{-x}\left|\cos x\right|dx$

19. $\int_{0}^{2} x\,\mathrm{sh}\, 2xdx$

20. $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{arctg}\, x)}{1+x^2}dx$

21. $\int_{0}^{\pi/6} tg^3 2xdx$

22. $\int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \arcsin\frac{x}{\pi}dx$

23. $\int_{0}^{\pi^2} x\cos\sqrt{x}dx$

24. $\int_{\pi/3}^{\pi} \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{\pi}}dx$

25. $\int_{0}^{1} \ln\sqrt{1+3x^2}\,dx$

Завдання 18. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими полярними кривими.

1. $\rho = \frac{13}{2\pi}\varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{12}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

2. $\rho = 2\sqrt{3}\sin 6\varphi$

3. $\rho = 6\sin 7\varphi$ (1 пелюстка)

4. $\rho = \sqrt{6}\cos 6\varphi$

5. $\rho = 4\cos 5\varphi$ (1 пелюстка)

6. $\rho = \sqrt{7}+\sqrt{5}\cos\varphi$

7. $\rho = 2+\sqrt{6}\sin\varphi$

8. $\rho = \sqrt{5}-\sqrt{7}\cos\varphi$

9. $\rho = \sqrt{6}-\sqrt{10}\sin\varphi$

10. $\rho = 4+\cos 2\varphi, \quad \rho = 3-\cos 2\varphi$

11. $\rho = 5+\cos 3\varphi, \quad \rho = 4-\cos 3\varphi$

12. $\rho = 6+\sin 5\varphi, \quad \rho = 8-\sin 5\varphi$

13. $\rho = 3+\sin 6\varphi, \quad \rho = 9-\sin 6\varphi$

14. $\rho = 7+\sin 9\varphi, \quad \rho = 10-\sin 9\varphi$

15. $\rho = 7 + \cos 5\varphi, \quad \rho = 6 - \cos 5\varphi$

16. $\rho^2 = 5\sin 2\varphi$ 17. $\rho^2 = 6\cos 2\varphi$

18. $\rho = \sqrt{7}e^{\varphi}\sin\varphi$ 19. $\rho = \sqrt{3}e^{\varphi}\cos\varphi$

20. $\rho = 5(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi)$ 21. $\rho = 7(1 + \sin\varphi)$

22. $\rho = 6(1 - \sin 2\varphi)$ 23. $\rho = \dfrac{\sqrt{3}}{2 - \cos\varphi}$

24. $\rho = \sqrt{10}e^{-\varphi}\sin\varphi$ 25. $\rho = 7(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)$

Числові ряди.

Числовий ряд

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

називається збіжним, якщо існує скінченна границя: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, де $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. У супротивному разі ряд (1) називається розбіжним.

Якщо ряд (1) – збіжний, то послідовність його членів є нескінченно малою: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (необхідна умова збіжності ряду).

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$,то ряд (1) - розбіжний (груба ознака розбіжності).

Ряд (1) називаєтьс абсолютно збіжним, якщо збігається ряд

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

В цьому разі ряд (1) також збігається . Якщо ряд (1) збігається, а ряд (2) розбігається, то ряд (1) називається умовно збіжним.

Ознаки збіжності числових рядів.

Перша ознака порівняння. Розглянемо також ряд

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

Якщо $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n \ge N_0$, то із збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (1). Із розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (3).

Друга ознака порівняння. Якщо $a_n = O^*\left(\dfrac{1}{n^p}\right), \ n \to \infty$, то ряд (1) збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$.

Ознака Даламбера.

Якщо $a_n > 0, \ n = 1,2,\ldots$ і $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = Q$, то ряд (1) збігається при $Q < 1$ і розбігається при $Q > 1$.

Ознака Коші.

Якщо $a_n \ge 0, \ n = 1,2,\ldots$ і $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = Q$, то ряд (1) збігається при $Q < 1$ і розбігається при $Q > 1$.

Ознака Раабе.

Якщо $a_n > 0, \ n = 1,2,\ldots$ і $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R$, то ряд (1) збігається при $R > 1$ і розбігається при $R < 1$.

Ознака Лейбніца збіжності знакозмінного ряду.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, де $a_n \geq 0,\ n=1,2,\ldots$ збігається , якщо 1) $a_n \geq a_{n+1} \forall n \geq n_0$ і 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Завдання 19. Дослідити збіжність числового ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(n\sqrt[3]{n}\right)}{n\sqrt[3]{n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2n}{n^2+1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin\frac{n\pi}{4}}{n\sqrt[5]{n}}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{3}{2}}\sin\frac{2+(-1)^{n-1}}{n^3}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^7}}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{n\pi}{2}}{(n+1)(n+2)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2+(-1)^{n-1}}{3}n\right)}{n^2+1}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^4+2n}}{\sqrt{n^3+n}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin\frac{n\pi}{2}}{n\sqrt[5]{n}}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2+1}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(3^n\right)}{n^2}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 2n}{n^3+2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3+\cos\pi n)}{2n^2+1}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+(-1)^{n-1}}{2^{n+3}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+n}}$ 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3+1}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}(\cos\pi n+5)}{\sqrt[5]{n^8+1}}$ 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n-1}}{\sqrt{n}\left(2+\sin{\pi n}/{2}\right)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ctg}{1}/{\sqrt{n}}}{n^2+1}$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n}{n+1}}{\sqrt{n^2+2n}}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{3n}}{\sqrt[3]{n^3-n}}$ 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+n+2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{2+(-1)^n}{3}}{3^n+n}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}{2n+1}$

25. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arccos\left[(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n}\right]}{n^2+1}$

Завдання 20. Дослідити збіжність ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{n!3^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)!)^2}{3^{n^2}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!4^{n-1}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!\left(2^n-1\right)}$

7. $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)!\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n!2^{n-1}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n-1)!}$

10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n-3)!}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^3+1\right)}{(n+1)!}5^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!n!}{(2n+1)!}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!n!}{(2n+1)!}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(2n-1)!}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}\left(3^{-n}\right)n!}{(2n)!}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^n(2n-1)!}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n \operatorname{arcctg} 2/n}{(2n+1)!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^3 10^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^{n^2} n^2}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}(n+1)!}{n^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n-1)!!}{(2n)!}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(2n+1)!}{(3n-1)!}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{3^n n!}$

Завдання 21. Дослідити збіжність ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n^2}$

2. $\sum_{n=2}^{\infty}4^n\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\left(\frac{3n}{4n+5}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n-3}\right)^{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{n}{2n+1}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\arccos^n\frac{2n}{n^2+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi n}{6n+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cos^n\frac{\pi n^2}{3n^2+2n+1}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{\left(4n^2+1\right)^{n/2}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(\ln n)^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(8n^3+5)^{n/3}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-1}\right)^n(2n^2+1)^2$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+1}\right)^{n/2}(10n^3+3)^5$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^{n(n-1)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\operatorname{arctg}^{2n}\frac{n}{n+1}$

19. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^n n}{n^{n+1}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)^{n^3}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n+1}e^{-n^2+2n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\left(\frac{\pi n\sqrt{3}}{2n+3}\right)$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}n^n\operatorname{arctg}^{n^2}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)$

<u>Завдання 22</u>. Дослідити збіжність знакозмінного ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n+3}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(n+1)}{n(n+2)}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\sqrt{n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-2}{4n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{3n+1}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(\pi n\sqrt[3]{n})}{n\sqrt[3]{n}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)\ln(n+2)}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n}{2^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2^n)}{2^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\arcsin 3^{-n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$

15. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)^2}{n!}$

16. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{2n-3}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n!}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt{n+1}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+3}{n(n+3)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(2n+5)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{3\sqrt[3]{n}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt[5]{2n}}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}$

25. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)^2 2^n}{n!}$

Функціональні ряди.

Сукупність $M\subset\mathbf{R}^1$ усіх значень x, при яких збігається ряд

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)+\cdots,$$

де $a_n(x)$ - деякі дійсні функції, називається областю збіжності

функціонального ряду (1), а функція $S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$

називається сумою ряду (1).

Рівномірна збіжність.

Послідовність функцій $\mathrm{f}_n(x), n=1,2,\ldots$ рівномірно збігається на множині M_0, якщо :

існує гранична функція $\mathrm{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}_n(x)\,\forall x\in M_0$;

$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\left|\,\mathrm{f}_n(x)-\mathrm{f}(x)\right|<\varepsilon\ \ \forall n\geq N\ \ \forall x\in M_0$.

Рівномірна збіжність позначається як $\mathbf{f}_n(x)\underset{M_0}{\rightrightarrows}\mathbf{f}(x)$.

Наведене означення рівномірної збіжності послідовності функцій еквівалентне виконанню граничної рівності:

$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in M_0}\left|\,\mathrm{f}_n(x)-\mathrm{f}(x)\right|=0$.

Функціональний ряд (1) називається рівномірно збіжним на множині M_0, якщо послідовність його частинних сум $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$ рівномірно збігається на множині M_0 : $S_n(x)\underset{M_0}{\rightrightarrows}S(x)$.

Ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.

Ряд (1) збігається абсолютно і рівномірно на множині M_0, якщо існує збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ такий, що $|a_n(x)|\leq c_n\ \forall x\in M_0,\ n=1,2,\ldots$

Степеневі ряди..

Функціональний ряд (1) у якого $a_n(x)=c_n(x-x_0)^n$ називається степеневим рядом за степенями $(x-x_0)$. Для кожного степеневого ряду існує інтервал збіжності $I=(x_0-R,x_0+R)$, всередині якого степеневий ряд збігається , а зовні – розбігається. Радіус збіжності R визначається по формулі Коші-Адамара:

$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$, або $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

Ряд Тейлора.

Функція $\mathrm{f}(x)$, яка має достатню кількість похідних в точці x_0 може бути записана у вигляді степеневий ряд за степенями $(x-x_0)$:

$\mathrm{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Залишковий член цього ряду $R_n = \mathrm{f}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{f}^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ може бути поданий у формі Пеано: $R_n = o\left((x-x_0)^n\right), x \to x_0$, або у формі Лагранжа : $R_n = \frac{\mathrm{f}^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $(0 < \theta < 1)$

Ряди Фур'є.

Якщо 1) функція $\mathrm{f}(x)$ визначена на інтервалі $[0, T]$, періодична з періодом T, є кусково-гладкою на вказанному інтервалі, то у кожній точці x неперервності функції $\mathrm{f}(x)$ має місце рівність :

(2) $\mathrm{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega_1 x + b_k \sin k\omega_1 x\right)$, де $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{f}(x)\cos k\omega_1 x dx,\ k = 0,1,2,\dots,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{f}(x)\sin k\omega_1 x dx,\ k = 1,2,\dots$$

Ряд (2) називається тригонометричним рядом Фур'є періодичної функції $\mathrm{f}(x)$. Якщо x^* - точка розриву функції $\mathrm{f}(x)$, то тригонометричний ряд Фур'є збігається у цій точці до значення $\frac{1}{2}\left[\mathrm{f}(x^* - 0) + \mathrm{f}(x^* + 0)\right]$.

Завдання 23. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{2x}{4x+1}\right)^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}\left(2x^2+3x+2\right)^{-n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\left(x^2-4x+5\right)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{1+x^{2n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n^2+5}\left(x^2+5x+9\right)^{-n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+x)^2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{2x+3n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+5x)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2x)^n}{n^{n+3x}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}\cos \pi n}{n^{2x^2-1}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(n^2+1\right)}{x^3 n^x}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{\left(n^2+1\right)3^n}\left(8x^2+5\right)^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+1}{n^2+e^{nx}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\left(x^2+4\right)^{-n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^2-4x+7\right)^n}{4^n\left(n^3+1\right)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(4x^2-1\right)^n}{(2n+1)3^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sqrt[3]{n^2+1}}{n^2+x^2}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3+1}{2^{nx}+3}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{nx}}{n+3}$ 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+1)a^{nx}}{n^2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n(x^2+1)}{(n^2+1)2^x}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(\sqrt[3]{n^2+1}+2\right)^{2x+3}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt[3]{n^2}}{n^{x^2-2}}$

<u>Завдання 24</u>. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n}x^{2n}\sin(x+\pi n)}{n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n x^{2n}\sin(3x+\pi n)}{\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^{2n}\cos(2x+\pi n)}{\sqrt[3]{n}}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^{4n}\cos(2x-\pi n)}{\sqrt{2n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^{2n}\,\mathrm{tg}(2^{-n})}{n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^{4n}}{\sqrt{n+1}\cdot 4^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3/2}}{\ln^n(x^2-2)}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n\left(2x+1/n\right)}{\sqrt{x-e^{-1}}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos^n(2x+\pi n)}{\sqrt{n^2+3}}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n\pi x}{\sqrt{n}\cdot 3^{n/2}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^{2n}3x}{\sqrt[3]{n}}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n/2}\,\mathrm{arctg}^n\,\pi x}{n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arcctg}^n(2\pi x)}{3^{n/2}\sqrt{n}}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n\sin^{3n}\left(2x-\pi/4\right)}{\sqrt[3]{n}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n\cos^{3n}\left(\pi x+\pi/8\right)}{\sqrt{n}}$ 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{tg}^{3n}\left(2x+\pi/6\right)}{3^{n/2}\cdot n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\mathrm{ctg}^{2n}\left(\pi x/2\right)}{\sqrt{n^2+1}}$ 18. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^n\,\mathrm{arctg}\frac{x}{n^2+1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{2n}x^{3n}\,\mathrm{arctg}\frac{nx}{n^2+1}$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{2n}\arcsin\frac{x}{2n^2}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4(16x^2-3)^{2n}}{2n+1}$ 22. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{3/2}\sqrt{x-4}\cdot 2^{-n^2/(x-3)^3}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^{n\cos 3x}}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+1/n\right)^n\cdot 3^{-n^2/x}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}\cdot e^{-n/\sin^3\pi x}$

<u>Завдання 25.</u> Визначити радіус та інтервал збіжності степеневого ряду та дослідити його поведінку в граничних точках інтервалу збіжності.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!!}\cdot(x-1)^n$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\cdot(x+1)^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(x-2)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}+(-3)^n}{\sqrt{n}}\cdot(x-1)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n\cdot n}{3^n+5^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\left(\frac{n}{3}\right)^n\cdot(2x-3)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4+\cos\pi n)(2x)^n}{\sqrt{n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[3^n+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{(-2)^n+3^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x-4)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x+1)^n}{\ln n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{2^{n^2}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot(-1)^n x^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}\cdot(x-2)^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi^n}{2^{2n}}\cdot(x+1)^n$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{n-1}}{n^2+1}\cdot(3x)^n$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi}{4^n}\cdot(\pi x-1)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt[3]{n^3+2}}\cdot(x+1)^n$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(4^n+\frac{\cos\pi n}{n}\right)\cdot(x-\pi)^n$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}n\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right)^n(2x-\pi)^n$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n^n)}{n^3+1}\cdot(4x+1)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}+\frac{1}{n}\right]\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\cdot(x-e)^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{n}\right)^n\cdot n!$

Завдання 26. Розкласти функцію $\mathrm{f}(x)$ в ряд Тейлора.

1. $\mathrm{f}(x)=\frac{10}{3-x-2x^2}$ по степенях x.

2. $\mathrm{f}(x)=\frac{8}{15+2x-x^2}$ по степенях $(x+1)$.

3. $\mathrm{f}(x)=\sqrt[3]{8-3x}$ по степенях x.

4. $\mathrm{f}(x)=\frac{x-1}{\sqrt[3]{31-4x}}$ по степенях $(x-1)$.

5. $\mathrm{f}(x)=\ln(1+x-20x^2)$ по степенях x.

6. $\mathrm{f}(x)=\ln(5x-2x^2-2)$ по степенях $(x-1)$.

7. $\mathrm{f}(x)=\operatorname{sh}(3x)/3-3$ по степенях x.

8. $\mathrm{f}(x)=x^2-2x^2\sin^2\frac{x}{4}$ по степенях x.

9. $\mathrm{f}(x)=\operatorname{arctg}(2x)/x$ по степенях x.

10. $f(x)=\cos 2x-\dfrac{\sin 2x}{x}$ по степенях x.

11. $f(x)=\ln\left(-6x^2-13x-6\right)$ по степенях $(x+1)$.

12. $f(x)=\dfrac{1}{6x^2+5x+1}$ по степенях x.

13. $f(x)=\cos^4 x$ по степенях x.

14. $f(x)=\dfrac{8}{15-2x-x^2}$ по степенях x.

15. $f(x)=\dfrac{5}{3+x-2x^2}$ по степенях $(x-1)$.

16. $f(x)=(x+2)\sqrt[4]{26-5x}$ по степенях $(x+2)$.

17. $f(x)=\ln\left(1+2x-8x^2\right)$ по степенях x.

18. $f(x)=\ln\left(14x-3x^2-15\right)$ по степенях $(x-2)$.

19. $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch} 2x-1}{2x^2}$ по степенях x.

20. $f(x)=x-2x\cos^2\dfrac{x}{8}$ по степенях x.

21. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[4]{16-3x}}$ по степенях x.

22. $f(x)=(\arcsin 3x)/x$ по степенях x.

23. $f(x)=\sin 3x-x\cos 3x$ по степенях x.

24. $f(x)=\ln\left(12-17x-6x^2\right)$ по степенях $(x-1)$.

25. $f(x)=\dfrac{1}{15+11x+2x^2}$ по степенях $(x+2)$.

<u>Завдання 27</u>. Розкласти функцію в ряд Фур'є на вказанному проміжку.

1. $f(x)=x\cdot|x|,\ x\in\left(-\pi/2,\pi/2\right)$ 2. $f(x)=e^x,\ x\in(-1,1)$

3. $f(x)=e^x,\ x\in(0,2)$ 4. $f(x)=|x-1|-1,\ x\in(0,2)$

5. $f(x)=1-|x+1|,\ x\in(-2,0)$ 6. $f(x)=\left|\sin x/2\right|,\ x\in R^1$

7. $f(x)=|\cos 2x|,\ x\in R^1$ 8. $f(x)=\arccos(\cos x),\ x\in R^1$

9. $f(x)=\arcsin\left(\sin x/2\right),\ x\in R^1$ 10. $f(x)=x-|x|,\ x\in(-1,1)$

11. $f(x)=x-|x-1|,\ x\in(0,\pi)$ 12. $f(x)=\sin^2 x,\ x\in R^1$

13. $f(x)=\cos^2 x,\ x\in R^1$ 14. $f(x)=e^{|x|},\ x\in(-1,1)$

15. $f(x)=e^{-|x|},\ x\in(-1,1)$ 16. $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin x/2\right),\ x\in R^1$

17. $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\cos x/2\right),\ x\in R^1$ 18. $f(x)=\left|x^2-1\right|,\ x\in(-2,2)$

19. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x\in(0,1) \\ 0, x\in(-1,0) \end{cases}$ 20. $f(x)=\begin{cases} x^2, x\in(0,\pi) \\ 0, x\in(-\pi,0) \end{cases}$

21. $f(x)=\operatorname{sh} x,\ x\in\left(-\pi/2,\pi/2\right)$ 22. $f(x)=\operatorname{ch} x,\ x\in\left(-\pi/2,\pi/2\right)$

23. $f(x)=\sin^3 x,\ x\in R^1$ 24. $f(x)=\cos^3 x,\ x\in R^1$

25. $f(x)=\big||x|-1\big|,\ x\in(0,2\pi)$

Невласні інтеграли.

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на кожному скінченному відрізку $[a,b]$, то за означенням :

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ - невласний інтеграл першого роду.

Якщо функція $f(x)$ не обмежена в околі точки b і інтегровна на кожному скінченному відрізку $[a,b-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$, то за означенням:

(2) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ - невласний інтеграл другого роду.

(b - особлива точка невласного інтегралу (2)).

Якщо границі (1), (2) існують і скінченні, то відповідні інтеграли називають збіжними, у супротивному разі – розбіжними.

Ознаки порівняння для невласних інтегралів.

1) Нехай $f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^p}\right), x\to+\infty$. Тоді інтеграл (1) збігається при $p>1$ і розбігається при $p\le1$.

2) Нехай $f(x)=O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right), x\to b-0$. Тоді інтеграл (2) збігається при $p<1$ і розбігається при $p\ge1$.

Ознаки абсолютної збіжності.

Якщо $|f(x)|$ - невласно інтегровна функція, то відповідно інтеграл (1) або (2) називається абсолютно збіжним.

1)Нехай $|f(x)|\le F(x)$ при $x\ge a$. Якщо $\int_a^{+\infty}F(x)dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається абсолютно.

2) Якщо $\psi(x)>0$ і $\varphi(x)=O^*(\psi(x))$ при $x\to+\infty$, то інтеграли $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ і $\int_a^{+\infty}\psi(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно. Зокрема це має місце при $\varphi(x)\approx\psi(x)$ при $x\to+\infty$.

Спеціальна ознака збіжності.

Якшо функція $\varphi(x)$ монотонно прямує до нуля при $x\to+\infty$, а функція $f(x)$ має обмежену первісну $F(x)=\int_a^x f(u)du$, $|F(x)|\le C\ \ \forall x\ge a$, то інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx$ - збігається.

Рівномірна збіжність невласних інтегралів, залежних від параметра.

Збіжний невласний інтеграл

(3) $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,y)dx$,

де функція $f(x,y)$ неперервна в області $a\le x<+\infty, \alpha<y<\beta$, називається рівномірно збіжним в інтервалі (α,β), якщо $\forall\varepsilon>0$ існує число $B=B(\varepsilon)$ таке, що для кожного $b\ge B$ виконується нерівність:

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\ \ (\alpha<y<\beta)$$

Якщо інтеграл (3) збігається рівномірно в інтервалі (α,β), то він є неперервною функцією параметра y в цьому інтервалі.

Ознака Вейерштрасса.

Для рівномірної збіжності інтеграла (3) достатньо, щоб існувала мажоруюча функція $\mathrm{F}(x)$ така, що 1) $|\mathrm{f}(x)| \le \mathrm{F}(x)$ при $a \le x < +\infty$ і 2) $\int\limits_a^{+\infty} \mathrm{F}(x)dx < +\infty$.

Диференціювання по параметру.

Якщо 1) функція $\mathrm{f}(x,y)$ неперервна разом зі своєю похідною $\mathrm{f}_y{}'(x,y)$ в області $a \le x < +\infty$, $\alpha < y < \beta$; 2) $\int\limits_a^{+\infty} \mathrm{f}(x,y)dx$ - збігається ; 3) $\int\limits_a^{+\infty} \mathrm{f}_y{}'(x,y)dx$ збігаться рівномірно в інтервалі (α,β), то $\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} \mathrm{f}(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \mathrm{f}_y{}'(x,y)dx$ при $\alpha < y < \beta$.

Формула інтегрування по параметру.

Якщо 1) функція $\mathrm{f}(x,y)$ неперервна в області $a \le x < +\infty$,

$\alpha < y < \beta$; 2) $\int\limits_a^{+\infty} \mathrm{f}(x,y)dx$ - збігається рівномірно на інтервалі

$[\alpha,\beta]$, то $\int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^{+\infty} \mathrm{f}(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_\alpha^\beta \mathrm{f}(x,y)dy$.

Інтеграли Ейлера.

При $\alpha > 0$ визначена гама-функція $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Мають місце наступні властивості гама-функції:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

При $\alpha > 0$, $\beta > 0$ визначена бета-функція $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx$. Має місце спів-відношення: $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Інтеграл Фур'є.

Якщо 1) функція $\mathrm{f}(t)$ задана на осі $-\infty < t < +\infty$; 2) кусково-гладка на кожному скінченному проміжку; 3)абсолютно інтегровна на осі $(-\infty,+\infty)$, то у кожній точці неперервності вона може бути подана у вигляді інтегралу Фур'є (в дійсній формі) :

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{f}(t) = \int\limits_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos \lambda t + b(\lambda)\sin \lambda t]\, d\lambda ,$$

де $a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(\xi)\cos \lambda\xi\, d\xi$, $b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(\xi)\sin \lambda\xi\, d\xi$.

Якщо визначити амплітуду $D(\lambda) = \sqrt{|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2}$ та початкову фазу $\varphi(\lambda) = \mathrm{arctg}\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}$, то формула (4) набуває вигляду :

$$\mathrm{f}(t) = \int\limits_0^{+\infty} D(\lambda)\sin[\lambda t + \varphi(\lambda)]\, d\lambda .$$

Для комплекснозначних функцій розклад (4) має вигляд :

$\mathrm{f}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)e^{i\lambda t}\,d\lambda$, де $C(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\mathrm{f}}(\lambda)$ - частотна характеристика або спектр функції $\mathrm{f}(t)$, $\tilde{\mathrm{f}}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(t)e^{i\lambda t}\,dt$ - перетворення Фур'є функції $\mathrm{f}(t)$.

Завдання 28. Користуючись класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля) та властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра, обчислити дані інтеграли.

1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos 2bx dx,\quad (a>0)$

2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad (\alpha>0,\beta>0)$

3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad (\alpha>0,\beta>0)$

4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx,\quad (0<a<b)$

5. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}dx,\quad (k>0)$

6. $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\cos bx dx,\quad (n\in \mathrm{N},\ a>0)$

7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{a\sin bx-b\sin ax}{x^2}dx,\quad (a>0,\ b>0)$

8. $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$

9. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2 dx,\quad (a>0)$

10. $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\sin bx dx,\quad (n\in \mathrm{N},\ a>0)$

11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx dx,\quad (\alpha>0,\ \beta>0)$

12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx,\quad (a>0)$

13. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}dx,\quad (a>0)$

14. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}dx,\quad (a>0)$

15. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx,\quad (n\in \mathrm{N},\ a>0)$

16. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}dx,\quad (n\in \mathrm{N},\ a>0)$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx,\quad (\alpha>0,\ \beta>0)$

18. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}\cos 2bx dx,\quad (n\in \mathrm{N},\ a>0)$

19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx dx,\quad (\ a>0)$

20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\cos 2ax dx$

21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(ax^2+bx\right)dx,\quad (\ a\neq 0)$

22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\cos 2ax dx$

23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx$

24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(ax^2+bx+c\right)e^{-\left(x^2-x+1\right)}dx$

25. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin^2\beta x}{x}dx,\quad (a>0)$

Завдання 29. Дані невласні інтеграли дослідити на збіжність.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^m dx}{\sqrt{\ln x}\left(x^n+1\right)}$

2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^n dx}{\left(\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1+2x}\right)^{2p}}\quad (n>0)$

3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x dx}{x}$

4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x dx}{x}$

5. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$

6. $\int\limits_0^1 \frac{\sin^m x dx}{\left(\sqrt{|\ln x|}\right)^p \sqrt{1-x^5}}$

7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{\sqrt{x^n + \sqrt{x}}}$ $(n > 0)$

8. $\int\limits_0^1 \frac{\ln^3 x dx}{\left(1-x^3\right)^p}$ $(p \geq 0)$

9. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \sin \frac{x}{2} dx}{\left(\sqrt{\operatorname{arctg} x}\right)^p}$ $(p \geq 0)$

10. $\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax^2} \sin bx dx$ $(a > 0)$

11. $\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \cos bx dx$ $(a > 0)$

12. $\int\limits_0^{+\infty} \ln^2 x e^{-ax^2} \cos bx dx$ $(a > 0)$

13. $\int\limits_0^{+\infty} \ln^2 x e^{-ax^2} \sin bx dx$ $(a > 0)$

14. $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2 x dx}{\left(\sqrt{1-x^4}\right)^p}$ $(p \geq 0)$

15. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p x dx}{\left(\sqrt{x^3-1}\right)^q}$

16. $\int\limits_0^1 \frac{\ln^{2p} x e^{-ax^2}}{\sin x} dx$ $(p > 0)$

17. $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+x^n\right) e^{ax}}{\cos \frac{\pi}{2} x} dx$ $(n > 0)$

18. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} \sin bx}{\ln^{2p} x} dx$ $(a > 0)$

19. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x dx}{1+x^n}$ $(n > 0)$

20. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x dx}{1+x^n}$ $(n > 0)$

21. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^n} dx$ $(n > 0)$

22. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^p dx$ $(p > 0)$

23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \sin x dx}{\left(x^2+\alpha^2\right)^p}$ $(p > 0)$

24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{\left(xe^x\right)^p} dx$

25. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{a \sin bx - b \sin ax}{x^p} dx$ $(a > 0, b > 0)$

<u>Завдання 30.</u> За допомогою ейлерових інтегралів обчислити наступні інтеграли.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x-x^3}}$

2. $\int\limits_0^1 \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}} dx$

3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(1+x^3\right)}$

4. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right) \cdot \sqrt[3]{x}}$

5. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx$

6. $\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x} dx$

7. $\int\limits_0^1 \ln^{3/2} \frac{1}{y} dy$

8. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{\left(1+x^2\right)^2} dx$

9. $\int\limits_0^{\pi} \sin^n x dx$ $(n \in \mathrm{N})$

10. $\int\limits_0^{\pi} \cos^n x dx$ $(n \in \mathrm{N})$

11. $\int\limits_0^1 \frac{y \cdot e^{\frac{y}{y-1}} dy}{(1-y)^3}$

12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{y^4 dy}{1+y^6}$

13. $\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}$

14. $\int\limits_0^{\pi/6}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}3x}\,dx$

15. $\int\limits_0^{1}\frac{x^2dx}{\left(1-x^8\right)^{3/8}}$

16. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^4dx}{x^8+2x^4+1}$

17. $\int\limits_0^{2}\sqrt[3]{2y^2-y^3}\,dy$

18. $\int\limits_0^{3}\sqrt[4]{\frac{3-x}{x}}\,dx$

19. $\int\limits_0^{\infty}\sqrt[4]{y}\cdot e^{-\sqrt{y}}\,dy$

20. $\int\limits_0^{e}\sqrt[3]{\frac{x}{e-x}}\,dx$

21. $\int\limits_0^{1}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

22. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{3/2}dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

23. $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin 2x}\,dx$

24. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{5/4}dx}{\left(1+x^3\right)^2}$

25. $\int\limits_0^{1}\sqrt{y-y^4}\,dy$

<u>Завдання 31.</u> Дані функції розкласти в інтеграл Фур’є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти спектральну густину $\mathrm{F}(\omega)$ і побудувати АЧХ, ФЧХ.

1. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}\operatorname{sign}t, & |t|<1,\\ 0, & |t|\ge 1\end{cases}$

2. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}t+\operatorname{sign}t, & |t|<1,\\ 0, & |t|\ge 1\end{cases}$

3. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}|t+\operatorname{sign}t|, & |t|<1,\\ 0, & |t|\ge 1\end{cases}$

4. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|<1,\\ 0, & |t|\ge 1\end{cases}$

5. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t\le 1,\\ -1-t, & -1\le t<0,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$

6. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}|t|, & |t|<1,\\ 0, & |t|\ge 1\end{cases}$

7. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1,\\ 2-t, & 1<t\le 2,\\ 0, & t\ge 2\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$

8. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1,\\ 2-t, & 1<t\le 2,\\ 0, & t\ge 2\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$

9. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|<\pi,\\ 0, & |t|\ge \pi\end{cases}$

10. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}|\sin t|, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$

11. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}\cos\frac{t}{2}, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$

12. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}0, & |t|<1,\\ e^{-|t|}, & |t|\ge 1\end{cases}$

13. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1,\\ e^{-t}, & t\ge 1\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$

14. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}1, & 0<t\le 1,\\ e^{-t+1}, & t>1\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$

15. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}1, & 0<t\le 1,\\ e^{-t+1}, & t>1\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$

16. $\mathrm{f}(t)=e^{-t}\sin t,\ \ t\ge 0;\quad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$

17. $\mathrm{f}(t)=e^{-t}\sin t,\ \ t\ge 0;\quad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$

18. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1,\quad t>2,\\ 1, & 1<t<2,\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$

19. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1,\quad t>2,\\ 1, & 1<t<2,\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$

20. $\mathrm{f}(t)=t\,e^{-t},\ \ t\ge 0;\quad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$

21. $\mathrm{f}(t)=t\,e^{-t},\ \ t\ge 0;\quad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$

22. $\mathrm{f}(t)=e^{-t}\cos t,\ \ t\ge 0;\quad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$

23. $\mathrm{f}(t)=e^{-t}\cos t,\ \ t\ge 0;\quad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$

24. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 0<t\le 1,\\ 0, & t>1\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$

25. $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 0<t\le 1,\\ 0, & t>1\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$

Кратні інтеграли.

Нехай $\Omega\subset \mathrm{R}^2$- замкнена область, яка може бути задана нерівностями: $a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)$, де $y_1(x), y_2(x)$ - неперервні на відрізку $[a,b]$ функції. Тоді подвійний інтеграл по області Ω від неперервної функції $\mathrm{f}(x,y)$ обчислюється за формулою:

(1) $$\iint\limits_{\Omega}\mathrm{f}(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{f}(x,y)dy$$

Якщо $\mathrm{f}(x,y)\equiv 1$, то інтеграл (1) чисельно дорівнює площі області Ω.

Нехай $V\subset \mathrm{R}^3$- область, яка може бути визначена нерівностями: $x_1\le x\le x_2,\quad y_1(x)\le y\le y_2(x),\qquad z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$, де $y_1(x), y_2(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ - неперервні функції. Тоді потрійний інтеграл по області V від неперервної функції $\mathrm{f}(x,y,z)$ обчислюється за формулою:

(2) $$\iiint\limits_{V}\mathrm{f}(x,y,z)dxdydz=\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\mathrm{f}(x,y,z)dz$$

Якщо $\mathrm{f}(x,y,z)\equiv 1$, то інтеграл (1) чисельно дорівнює об'єму області V .

<u>Завдання 32</u>. Поміняти порядок інтегрування в подвійному інтегралі.

1. $\displaystyle\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x/2}}^{2-\sqrt{4x-x^2}}\mathrm{f}(x,y)dy$ 2. $\displaystyle\int\limits_0^3 dx\int\limits_{-\sqrt{3-x}}^{3-\sqrt{6x-x^2}}\mathrm{f}(x,y)dy$

3. $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{\frac{1-x}{3}}}^{2-\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{f}(x,y)dy$ 4. $\displaystyle\int\limits_{-1}^2 dx\int\limits_{-2+2x-x^2/2}^{3-\sqrt{5+4x-x^2}}\mathrm{f}(x,y)dy$

5. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} dx\int\limits_{\cos x-1}^{2\sin x/2}\mathrm{f}(x,y)dy$ 6. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} dx\int\limits_{-\sqrt{2-x/\pi}}^{1+\cos x/2}\mathrm{f}(x,y)dy$

7. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_{-\cos x/2}^{\operatorname{tg} x/4} f(x,y)dy$ 8. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_{-2\operatorname{tg} x/4}^{4-x} f(x,y)dy$

9. $\int\limits_1^{e} dx \int\limits_{1-x}^{2\ln^2 x} f(x,y)dy$ 10. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{\ln(x+1)}} f(x,y)dy$

11. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{8x^3} f(x,y)dy$ 12. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{x^3/2} f(x,y)dy$

13. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{e^{x-1}} f(x,y)dy$ 14. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{e^{x}} f(x,y)dy$

15. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{-x^3}^{\arcsin x/2} f(x,y)dy$ 16. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{\arccos x} f(x,y)dy$

17. $\int\limits_1^{3} dx \int\limits_{x^2-6x+5}^{3/x} f(x,y)dy$ 18. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{2/x}^{-x^2-4x-3} f(x,y)dy$

19. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{x-2}^{2^{-x}} f(x,y)dy$ 20. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{-x/2}^{2e^{-x}} f(x,y)dy$

21. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\operatorname{arctg} x/2} f(x,y)dy$ 22. $\int\limits_0^{1/\pi} dx \int\limits_{-\sqrt{\pi^3 x}}^{4\operatorname{arctg}(\pi x)} f(x,y)dy$

23. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{-3\sqrt{1-x^2/4}}^{2-x^2/2} f(x,y)dy$ 24. $\int\limits_0^{3} dx \int\limits_{x^2/3}^{2\sqrt{1-x^2/9}} f(x,y)dy$

25. $\int\limits_1^{3} dx \int\limits_{x-3}^{1/x^2} f(x,y)dy$

<u>Завдання 33.</u> Знайти площу плоскої фігури, заданої наступними умовами.

1. $x^2 + y^2 = 4, \quad y \le x+1, \quad y \ge 0$
2. $x^2 + y^2 - 4y = 0, \quad y \ge 2x^2$
3. $y = 1/x, \quad y = 2/x, \quad y = x, \quad y = x/3$
4. $y = 1/x^2, \quad y = 4/x^2, \quad y = x, \quad y = x/2$
5. $x^2 + y^2 - 4y = 0, \quad y \ge x+1$
6. $x^2 + y^2 - 4x = 0, \quad y \le x-1$
7. $y = x^2 - 2x, \quad y \ge x-1, \quad y \le x$
8. $y = 3x - x^2, \quad 4y \le x-4, \quad y \ge 0$
9. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad y \ge 0, \quad 2x - 2y + 5 \ge 0$
10. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad x \ge 0, \quad y = x-3$

11. $-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1, \quad y\ge 0, \quad y=x+5$

12. $xy=-6, \quad y=x+5, \quad y=x+7$

13. $xy=1, \quad xy=2, \quad 6y=7-x$

14. $y^2=x-1, \quad y=x-2, \quad y=x-4$

15. $y^2=-x-1, \quad y=x+1, \quad y=2x+12$

16. $x^2-2x+y^2-4y+1=0, \quad y=1, \quad 2x-2y+3=0$

17. $x^2-4x+y^2-2y-4=0, \quad y=-x, \quad y=x+3$

18. $x^2-4x+y^2-2y+1=0, \quad 2y=x+2, \quad 3y=-x-1$

19. $y=2^x, \quad y=5, \quad 2x-2y+3=0$

20. $y=e^x-1, \quad y=e^x-3, \quad x\ge 0, \quad y=10$

21. $y=\left||x-2|-1\right|, \quad x-2y+1=0$

22. $y=\left||x-1|-2\right|, \quad x+2y-6=0$

23. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \quad y=x-3$

24. $y=x^2-4x+3, \quad y=x+1, \quad y=-2x+5$

25. $x^2+4x+y^2-6y+4=0, \quad x-2y+8\ge 0, \quad x+4\ge 0$

Завдання 34. Знайти об’єм тіла, заданого поверхнями, що його обмежують.

1. $x^2+2y^2-4y=2, \quad z=0, \quad z=3-x^2$

2. $x^2+y^2=2y, \quad x^2+y^2=6y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$

3. $x^2+y^2+6x=0, \quad z=0, \quad z=10-y^2$

4. $x^2+y^2=6\sqrt{2}x, \quad z=x^2+y^2-36, \quad z=0 (z\ge 0)$

5. $x^2+y^2=4x, \quad x^2+y^2=8x, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad y=0 (y\ge 0)$

6. $z=6-x^2-y^2, \quad z=4-\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$

7. $z=10-x^2-y^2, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}-2$

8. $y=7-x^2-z^2, \quad y=1-\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=0$

9. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1, \quad x^2+y^2=2x, \quad z=0 (z\le 0)$

10. $x^2+z^2=2z, \quad x^2+z^2=5z, \quad y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=0$

11. $x^2+z^2=4x, \quad y=9-z^2, \quad y=0$

12. $x^2+y^2=6x, \quad x^2+y^2=8x, \quad z=-\sqrt{x^2+y^2}, \quad y=0 (y\le 0)$

13. $y^2+z^2=6y, \quad x=9-y^2, \quad x=0$

14. $z=2-x^2-y^2, \quad z=9-\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$

15. $x^2+y^2+z^2=8z, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}+4-4\sqrt{2}, \quad (x\ge 0)$

16. $x^2+y^2=8\sqrt{2}y, \quad z=x^2+y^2-64, \quad z=0 (z\ge 0)$

17. $x^2+y^2=4y, \quad x^2+y^2=9y, \quad z=-\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$

18. $x^2+y^2=9x, \quad x^2+y^2=15x, \quad z=\sqrt{2x^2+2y^2},$

$z=0, \quad y=0, \quad (y\ge 0)$

19. $x^2+y^2=4x, \quad z=7-x^2, \quad z=0(z\le 0)$

20. $8z=x^2+y^2, \quad z=\sqrt{16-x^2-y^2}, \quad (y\ge 0)$

21. $z=-\sqrt{9-x^2-y^2}, \quad z=1-\sqrt{x^2+y^2}$

22. $z=-\sqrt{16-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}-1$

23. $x^2+z^2=2x, \quad y=5-z^2, \quad y=0$

24. $y^2+z^2=6z, \quad x=8-y^2, \quad x=0$

25. $x^2+z^2+5x=0, \quad y=12-z^2, \quad y=0$

Векторний аналіз.

Нехай $u(\vec{\mathrm{r}})=u(x,y,z)$, де $\vec{\mathrm{r}}=x\,\vec{\mathrm{i}}+y\,\vec{\mathrm{j}}+z\,\vec{\mathrm{k}}$, є неперервно – диференційовне скалярне поле. *Градієнтом* скалярного поля називається вектор $\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{\mathrm{k}}=\nabla u$, де $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathrm{k}}$.

Нехай $\vec{a}(\vec{\mathrm{r}})=a_x(x,y,z)+a_y(x,y,z)+a_z(x,y,z)$ - неперервно – диференційовне векторне поле. *Дивергенцією* векторного поля називається число $\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=(\vec{a},\nabla)$.

Ротором векторного поля називається вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a}=[\nabla,\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

Потоком векторного поля $\vec{a}(\vec{\mathrm{r}})$ через задану поверхню S у напрямку, заданому одиничним вектором нормалі $\vec{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ називається величина, рівна значенню інтеграла

$\iint\limits_S \vec{a}_{\vec{n}}dS=\iint\limits_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)dS$, де $\vec{a}_{\vec{n}}=(\vec{a},\vec{n})$- нормальна проекція вектора $\vec{a}$.

Якщо замкнена поверхня S є кусково-гладкою і обмежує об'єм V, $\vec{n}$- одиничний вектор зовнішньої нормалі до S, $\vec{a}(\vec{\mathrm{r}})$ - неперервно – диференційовне в області $S\cup V$ векторне поле, то має місце формула Остроградського:

$$\oiint\limits_S \vec{a}_{\vec{n}}dS=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz$$

Роботою векторного поля $\vec{a}(\vec{\mathrm{r}})$ вздовж деякої кривої C називається значення інтегралу

$\int\limits_C \vec{a}\cdot d\,\vec{\mathrm{r}}=\int\limits_C a_xdx+a_ydy+a_zdz$.

Якщо крива C - замкнена, то цей інтеграл називається *циркуляцією* вектора $\vec{a}$ вздовж кривої C.

Якщо замкнена крива C обмежує поверхню S, обходиться в додатньому напрямку, а векторне поле $\vec{a}(\vec{\mathrm{r}})$- неперервно-диференційовне, то має місце формула Стокса:

$\int\limits_C \vec{a}\cdot d\,\vec{\mathrm{r}}=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\vec{a})_{\vec{n}}dS=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}dS$, де $\vec{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S.

<u>Завдання 35</u>. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

$1. \vec{a} = (x + xy)\vec{\mathrm{i}} + (y - yx)\vec{j} + (z - 1)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = 2$

$2. \vec{a} = 2y\,\vec{\mathrm{i}} + -3x\vec{j} + \vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = 3$

$3. \vec{a} = xy\,\vec{\mathrm{i}} - 3x^2\vec{j} + 4\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -\sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = -1$

$4. \vec{a} = 2xz\,\vec{\mathrm{i}} + 3yz\vec{j} + z^2\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = 4$

$5. \vec{a} = y^2x\,\vec{\mathrm{i}} - yx^2\vec{j} + z\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -\sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = -5$

$6. \vec{a} = (xz - y)\vec{\mathrm{i}} + (x - yz)\vec{j} + z^2\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = 2$

$7. \vec{a} = 2xyz\,\vec{\mathrm{i}} - x^2z\vec{j} + 2\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$8. \vec{a} = (x + 2xy)\vec{\mathrm{i}} + (y - 2x^2)\vec{j} + z\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = 4$

$9. \vec{a} = (x + xz)\vec{\mathrm{i}} + (y + 1)\vec{j} - y\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$10. \vec{a} = x\,\vec{\mathrm{i}} + y\vec{j} + z^2\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$11. \vec{a} = (x + z)\vec{\mathrm{i}} + y\vec{j} + (z - xy)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -\sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = -2$

$12. \vec{a} = (x - y)\vec{\mathrm{i}} + (xy + z)\vec{j} + \vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$13. \vec{a} = (x + y^2)\vec{\mathrm{i}} + (y + z^2)\vec{j} + x\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$14. \vec{a} = x\,\vec{\mathrm{i}} + (y + 2z)\vec{j} + (z - 2x)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$15. \vec{a} = (x + z^2)\vec{\mathrm{i}} + y\vec{j} + (z - x^2)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$16. \vec{a} = (y - x)\vec{\mathrm{i}} + (x + y)\vec{j} + z^2\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$17. \vec{a} = (x + y)\vec{\mathrm{i}} + (y - x)\vec{j} - (z - x)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = 2$

$18. \vec{a} = 2x\,\vec{\mathrm{i}} + 3y\vec{j} + (z + 2y)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -2\sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = -8$

$19. \vec{a} = (xz + y)\vec{\mathrm{i}} + (yz - x)\vec{j} + y^2\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{2x^2 + 2y^2} \quad \mathrm{P}: z = 1$

$20. \vec{a} = (x + yz)\vec{\mathrm{i}} + y\vec{j} + (z - xy)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -2\sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = -2$

$21. \vec{a} = y\,\vec{\mathrm{i}} + (z + x)\vec{j} + (z + xy)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$22. \vec{a} = x\,\vec{\mathrm{i}} + (2y + z)\vec{j} + (z - x)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

$23. \vec{a} = yz\,\vec{\mathrm{i}} + xz\vec{j} + (z^2 - x)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 2$

$24. \vec{a} = xy\,\vec{\mathrm{i}} + yz\vec{j} + (z - xy)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = -1$

$25. \vec{a} = 2x\,\vec{\mathrm{i}} + (y + xz)\vec{j} + (z - x)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 1$

<u>Завдання 36</u>. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня).

$1. \vec{a} = (2x + \sin z)\vec{\mathrm{i}} + (y + \cos xz)\vec{j} + (z - \sin x)\vec{k},$

$$\mathrm{S}: 2x + y + 3z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$2. \vec{a} = (e^{2z} + 2x)\vec{\mathrm{i}} + (e^x - y)\vec{j} + (2z - e^y)\vec{k},$

$$\mathrm{S}: x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1, \quad z = 5$$

$3. \vec{a} = (\ln(y^2 + 1) + 3x)\vec{\mathrm{i}} + (y + \ln|z + 1|)\vec{j} + (z - \sin x)\vec{k},$

$$\mathrm{S}: x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z - 8$$

$4. \vec{a} = (e^z + 4x)\vec{\mathrm{i}} + (2xz - y)\vec{j} - (2z + x^2y)\vec{k},$

$$\mathrm{S}: x^2 + y^2 = 6z, \quad z = 1$$

$5. \vec{a} = \left(\sqrt{e^z + 2} - x\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(y - \sqrt{x^2 + z^2}\right)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k},$

$$S: \sqrt{x^2+y^2}=z, \quad z=3$$

6. $\vec{a}=\left(x+4y^3\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(x^2z-2y\right)\vec{j}-\left(2z+e^{xy}\right)\vec{k},$

$$S: x+2y+3z=3, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

7. $\vec{a}=\left(\sqrt{z}+x\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(\sqrt[3]{xz}+2y\right)\vec{j}+\left(\sqrt{x^2+y^2}-z\right)\vec{k},$

$$S: 2\left(x^2+y^2\right)=z^2, \quad z=2, \quad z=6$$

8. $\vec{a}=\left(\sin 2y+x\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(y-\sin^2 x\right)\vec{j}+\left(z-\cos xy\right)\vec{k},$

$$S: x^2+y^2+z^2=4x-2y-4$$

9. $\vec{a}=\left(5yz-x\right)\vec{\mathrm{i}}-\left(y+x^3\right)\vec{j}+\left(4z+y^2\right)\vec{k},$

$$S: x^2+y^2+z^2+4x+6z-4=0$$

10. $\vec{a}=\left(x+4e^y\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(xe^z+2y\right)\vec{j}-\left(z+e^{2xy}\right)\vec{k},$

$$S: 2x+3y+5z=6, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

11. $\vec{a}=\left(\sqrt{2z}+3x\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(\ln\left(x^2+z\right)+2y\right)\vec{j}-\left(2xy+z\right)\vec{k},$

$$S: x^2+y^2=z^2, \quad z=1, \quad z=3$$

12. $\vec{a}=\left(e^{yz}+x\right)\vec{\mathrm{i}}-\left(2y-\sqrt{1+z^2}\right)\vec{j}+\left(3z+\sqrt[3]{xy}\right)\vec{k},$

$$S: x^2+y^2=2z, \quad z=2$$

13. $\vec{a}=\left(x-\sqrt{15-zy}\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(y+\sin^3 x\right)\vec{j}+\left(z+2y^3\right)\vec{k},$

$$S: x^2+y^2+z^2-2y=3$$

14. $\vec{a}=\left(\sqrt{2z+1}+2x\right)\vec{\mathrm{i}}-\left(y+\sqrt{2x^2+z}\right)\vec{j}+\left(2z+e^y\right)\vec{k},$

$$S: z=4-\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=1$$

15. $\vec{a}=\left(x+4yz\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(e^{z+x}+y\right)\vec{j}-\left(3z+x^2y\right)\vec{k},$

$$S: 2y-x+z=2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

16. $\vec{a}=\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{\mathrm{i}}-2y\vec{j}+\left(3z-\sqrt{1+x^2}\right)\vec{k},$

$$S: x^2+9y^2+4z^2=2x+35$$

17. $\vec{a}=-2x\,\vec{\mathrm{i}}+\left(y+x^2z^2\right)\vec{j}+\left(3z-2x^2y^2\right)\vec{k},$

$$S: 9x^2+4y^2=36, \quad z=0, \quad z=y+1$$

18. $\vec{a}=\left(\sin^2 z-2x\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(\cos^2 x+y\right)\vec{j}-\left(z-2\sin xy\right)\vec{k},$

$$S: 2x+y-3z=6, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

19. $\vec{a}=\left(x+y^2\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(z^2+y\right)\vec{j}+\left(z+x^2+y^3\right)\vec{k},$

$$S: x+y+z-2=0, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=1$$

20. $\vec{a}=\frac{1}{2}\left(x+z\right)\vec{\mathrm{i}}+\frac{1}{4}\left(xz+y\right)\vec{j}+\frac{1}{3}\left(xy-1\right)\vec{k},$

$$S: z=-\sqrt{2x^2+2y^2}, \quad z=-4$$

21. $\vec{a}=\left(z^2+y^2+6x\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(e^z-2y\right)\vec{j}+\left(xy-z\right)\vec{k},$

$$S: x^2+y^2+z^2=4x-2y+4z$$

22. $\vec{a}=\left(yz-2x\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(\sin z+y\right)\vec{j}+\left(\cos x-2z\right)\vec{k},$

$$S: x^2+y^2=2z^2, \quad z=\sqrt{2}, \quad z=\sqrt{6}$$

23. $\vec{a}=\left(e^{zy}+\frac{x}{4}\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(e^x+\frac{y}{3}\right)\vec{j}+\left(\frac{z}{2}-1\right)\vec{k},$

$$S: 2x^2+9y^2+4z^2=16-4x$$

24. $\vec{a}=\left(2x+y^2z\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(z^2x+y\right)\vec{j}+\left(3z+\sqrt{x^2+3}\right)\vec{k},$

$$S: 2x+y+z-4=0,\quad x=0,\quad y=2,\quad z=0$$

25. $\vec{a}=\left(\frac{x}{2}+\ln(1-z)\right)\vec{\mathrm{i}}+y\vec{j}+\left(x^2+\frac{z}{3}\right)\vec{k},$

$$S: z=\sqrt{x^2+y^2}-3,\quad z=-1$$

<u>Завдання 37</u>. Знайти роботу сили $\vec{\mathrm{F}}$ при переміщенні вздовж кривої C від точки A до точки B.

1. $\vec{\mathrm{F}}=\left(x^2-y^2\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(x^2+2y^2\right)\vec{j},\quad C: x^2+y^2=9,\quad \mathrm{A}(0,-3),\quad \mathrm{B}(3,0)$
2. $\vec{\mathrm{F}}=2y\,\vec{\mathrm{i}}-3x\vec{j},\quad C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\quad \mathrm{A}(-2,0),\quad \mathrm{B}(0,2)$
3. $\vec{\mathrm{F}}=x^2\,\vec{\mathrm{i}}-\left(y^2-x\right)\vec{j},\quad C: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=9,\quad \mathrm{A}(0,3),\quad \mathrm{B}(-3,0)$
4. $\vec{\mathrm{F}}=(2xy+y)\vec{\mathrm{i}}+\left(x^2+xy\right)\vec{j},\quad C: y=4-2x^2,\quad \mathrm{A}\left(\sqrt{2},0\right),\quad \mathrm{B}\left(-\sqrt{2},0\right)$
5. $\vec{\mathrm{F}}=xy\,\vec{\mathrm{i}}+\left(x^2+y\right)\vec{j},\quad C: y=\sqrt{-x},\quad \mathrm{A}(0,0),\quad \mathrm{B}(-4,2)$
6. $\vec{\mathrm{F}}=4xy\,\vec{\mathrm{i}}+2y\vec{j},\quad C: y=\sin x,\quad \mathrm{A}(\pi,0),\quad \mathrm{B}(0,0)$
7. $\vec{\mathrm{F}}=y^2\,\vec{\mathrm{i}}-2x^2\,\vec{j},\quad C: x^2+y^2=4,\quad \mathrm{A}(-2,0),\quad \mathrm{B}(0,-2)$
8. $\vec{\mathrm{F}}=\left(x+y\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(y-x\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{j},\quad C: x^2+y^2=16,\quad \mathrm{A}(4,0),\quad \mathrm{B}(-4,0)$
9. $\vec{\mathrm{F}}=(x+y)\vec{\mathrm{i}}+(x-y)\vec{j},\quad C: x^2+4y^2=4,\quad \mathrm{A}(2,0),\quad \mathrm{B}(0,1)$
10. $\vec{\mathrm{F}}=\left(x+\sqrt{2y}\right)\vec{\mathrm{i}}-(y+2x)\vec{j},\quad C: y={x^2}/{2},\quad \mathrm{A}(2,2),\quad \mathrm{B}\left(-1,{1}/{2}\right)$
11. $\vec{\mathrm{F}}=2y\,\vec{\mathrm{i}}-\left(x^3+2x^2\right)\vec{j},\quad C: y=\ln x,\quad \mathrm{A}(1,0),\quad \mathrm{B}(e,1)$
12. $\vec{\mathrm{F}}=e^{y-x}\,\vec{\mathrm{i}}-e^{x-y}\,\vec{j},\quad C:$ відрізок AB, де $\mathrm{A}(1,1),\quad \mathrm{B}(3,2)$
13. $\vec{\mathrm{F}}=\frac{y}{1+x^2+y^2}\,\vec{\mathrm{i}}+\frac{x}{1-x^2-y^2}\,\vec{j},\quad C: x^2+y^2=9,\quad \mathrm{A}(0,-3),\quad \mathrm{B}\left(-{3\sqrt{3}}/{2},{3}/{2}\right)$
14. $\vec{\mathrm{F}}=2y\,\vec{\mathrm{i}}+x^2\,\vec{j},\quad C: y=\ln(1-x),\quad \mathrm{A}(-1,0),\quad \mathrm{B}(-e-1,1)$
15. $\vec{\mathrm{F}}=x^2\,\vec{\mathrm{i}}+xy\vec{j},\quad C: 4x^2+y^2=4,\quad \mathrm{A}(0,2),\quad \mathrm{B}(-2,0)$
16. $\vec{\mathrm{F}}=xy\,\vec{\mathrm{i}}+\left(y^2-1\right)\vec{j},\quad C: y=\sqrt{x-1},\quad \mathrm{A}(1,0),\quad \mathrm{B}(2,1)$
17. $\vec{\mathrm{F}}=\left(x^2-y^2\right)\vec{\mathrm{i}}-\left(x^2+y^2\right)\vec{j},\quad C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,\quad \mathrm{A}(-3,0),\quad \mathrm{B}(0,-4)$
18. $\vec{\mathrm{F}}=\left(y^2-\sin^2 x\right)\vec{\mathrm{i}}+xy\vec{j},\quad C: y=\cos x,\quad \mathrm{A}\left({\pi}/{2},0\right),\quad \mathrm{B}\left(-{\pi}/{2},0\right)$
19. $\vec{\mathrm{F}}=xy\,\vec{\mathrm{i}}+\left(1+y^2\right)\vec{j},\quad C: y=e^{-x},\quad \mathrm{A}(-1,e),\quad \mathrm{B}(0,1)$
20. $\vec{\mathrm{F}}=\left(x^2+y^2\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(x^2-y^2\right)\vec{j},\quad C: 3x^2+y^2=1,\quad \mathrm{A}\left({1}/{\sqrt{3}},0\right),\quad \mathrm{B}\left(-{1}/{\sqrt{3}},0\right)\quad (y\ge 0)$
21. $\vec{\mathrm{F}}=y\sqrt{x}\,\vec{\mathrm{i}}-x\sqrt{y}\,\vec{j},\quad C: y=x^3,\quad \mathrm{A}(0,0),\quad \mathrm{B}(2,8)$
22. $\vec{\mathrm{F}}=\left(y^2+1\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(x^2-1\right)\vec{j},\quad C: y=|x-1|,\quad \mathrm{A}(0,1),\quad \mathrm{B}(3,2)$
23. $\vec{\mathrm{F}}=\left(x^2-y\right)\vec{\mathrm{i}}+(2xy+y)\vec{j},\quad C: x^2+2y^2=2,\quad \mathrm{A}\left(\sqrt{2},0\right),\quad \mathrm{B}\left(-\sqrt{2},0\right)\quad (y\le 0)$
24. $\vec{\mathrm{F}}=\left(y^2+x\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(x^2-y^2\right)\vec{j},\quad C: y=1-|x|,\quad \mathrm{A}(-1,0),\quad \mathrm{B}(2,-1)$
25. $\vec{\mathrm{F}}=-y\,\vec{\mathrm{i}}+\left(xy-y^2\right)\vec{j},\quad C: y=x\cdot|x|,\quad \mathrm{A}(-1,-1),\quad \mathrm{B}(2,4)$

<u>Завдання 38</u>. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж зам-кненого контуру C.

1. $\vec{a}=(x-2y)\vec{\mathrm{i}}+(yz+x)\vec{j}+z^2\vec{k},\quad C: \begin{cases} 2x^2+2y^2-z=1, \\ z=5 \end{cases}$

$2.\ \vec{a} = y\,\vec{i} + y^2 z\vec{j} - 2x\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

$3.\ \vec{a} = (y - x)\vec{i} + 2x\vec{j} + 2z^2\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$4.\ \vec{a} = (z - yx)\vec{i} + (2y^2 + 1)\vec{j} + (x - z^2)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

$5.\ \vec{a} = (y + xz)\vec{i} + 2x\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3 \end{cases}$

$6.\ \vec{a} = xy\,\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

$7.\ \vec{a} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} + xyz\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = -2 \end{cases}$

$8.\ \vec{a} = (y - \sin z)\vec{i} + (2x - y^2)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$

$9.\ \vec{a} = (y - z)\vec{i} + xyz\vec{j} + (x - y)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ y = 2 \end{cases}$

$10.\ \vec{a} = (2zx - 3z)\vec{i} + e^y(x + z)\vec{j} + (x^2 - x)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 - 2y + z^2 = 1, \\ y = 6 \end{cases}$

$11.\ \vec{a} = e^{xy}\,\vec{i} + (x^2 - z)\vec{j} + (z^2 + y)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 0, \\ x + 4 = 0 \end{cases}$

$12.\ \vec{a} = (\sqrt[3]{3x} + 3y)\vec{i} + (y^2 - 2z)\vec{j} + (x + y + \sqrt[3]{z})\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} y^2/3 + z^2 = 1, \\ x + y - z = 3 \end{cases}$

$13.\ \vec{a} = \sqrt{x}\,\vec{i} - (\sqrt[3]{xy} + z)\vec{j} + (\sqrt[3]{2xz} + 2y)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36, \\ x = 1 \end{cases}$

$14.\ \vec{a} = \left(y - \dfrac{x^2}{z^2 + 1}\right)\vec{i} - \left(x + \dfrac{y^2}{z^2 + 1}\right)\vec{j} + \dfrac{z^2}{x^2 + y^2 + 1}\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0, \\ z = 1/2 \end{cases}$

$15.\ \vec{a} = \sqrt{x^2 + 1}\,\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + (2x + y + z)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$

$16.\ \vec{a} = (\ln x + yz)\vec{i} - (3z + 1)\vec{j} + (\sqrt[3]{x^2 z^2 + 1} + y)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} 4x^2 - y^2 - z^2 = 0, \\ x - 2 = 0 \end{cases}$

$17.\ \vec{a} = (\cos x - y)\vec{i} - (\sin yz + x)\vec{j} + (\sin xy + z)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0, \\ z = 1 \end{cases}$

$18.\ \vec{a} = (z^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - z)\vec{j} - (2x^2 - y)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ x + z = 1 \end{cases}$

$19.\ \vec{a} = (xz + y)\vec{i} - (yz + x)\vec{j} + (xy + 2z)\vec{k}, \qquad C: \begin{cases} z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

20. $\vec{a}=\frac{x^2+y^2}{2}\vec{\mathrm{i}}+(xy+z)\vec{j}-(y+xz)\vec{k}$, $\quad C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x+z=0 \end{cases}$

21. $\vec{a}=\left(\frac{2xz}{y}-z\right)\vec{\mathrm{i}}-\frac{x+z}{y^2+1}\vec{j}+\left(\frac{x^2}{y}+x\right)\vec{k}$, $\quad C:\begin{cases} 4x^2+y^2+2z^2=4, \\ y+1=0 \end{cases}$

22. $\vec{a}=e^{xyz}\,\vec{\mathrm{i}}+\left(e^x z^2-2z\right)\vec{j}+\left(2yze^x+x\right)\vec{k}$, $\quad C:\begin{cases} 2x-y^2-z^2=2, \\ x-3=0 \end{cases}$

23. $\vec{a}=\left(y^2z+2y\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(2xyz+z^2\right)\vec{j}+\left(x^2y+z\right)\vec{k}$, $\quad C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2+4x=0, \\ z=1 \end{cases}$

24. $\vec{a}=\left(x^2z^2-y\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(y^2z^2+x\right)\vec{j}+\left(x^2y^2+z\right)\vec{k}$, $\quad C:\begin{cases} x^2+9y^2=3, \\ z=\sqrt{2} \end{cases}$

25. $\vec{a}=\left(x^2-z\right)\vec{\mathrm{i}}+(x+5z)\vec{j}+(2y+\sin z)\vec{k}$, $\quad C:\begin{cases} 4x^2+9z^2=36, \\ x+y=1 \end{cases}$

Зміст

Границя числової послідовності	3
Неперервність функції. Границя функції в точці	8
Похідна та диференціал функції	15
Невизначений інтеграл	22
Функції багатьох змінних	25
Визначений інтеграл	31
Числові ряди	34
Функціональні ряди	41
Ряди Фур'є	43
Невласний інтеграл	50
Інтеграли Ейлера	53
Інтеграл Фур'є	54
Кратні інтеграли	61
Векторний аналіз	67