КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра.

Методичний посібник
для студентів радіофізичного факультету
напряму підготовки «Радіотехніка»

Київ – 2011

УДК 514.74(075.8)

Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Методичний посібник для студентів радіофізичного факультету напрям підготовки «Радіотехніка» / С.В.Єфіменко – К.: КНУ, 2011 – 56 с.

Посібник містить тексти лекцій розділу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» курсу «Вища математика», що викладається студентам напряму підготовки «Радіотехніка» на радіофізичному факультеті в об'ємі 15 годин.

Частини тексту, набрані більш дрібними шрифтом, виходять за межі навчального плану, проте будуть корисними для більш глибокого розуміння та призначені для самостійної роботи. Крім того, в посібник включений план практичних занять по даній частині курсу (10 годин) разом із текстами завдань для аудиторних та домашніх робіт. Завдання, помічені знаком $^{(*)}$, призначені для додаткових та самостійних занять.

Затверджено
Радою радіофізичного факультету,
Протокол № 6 від 12 грудня 2011 року

Лекція 1. Матриці.
Визначник квадратної матриці.
Системи лінійних рівнянь, теорема Крамера.

1. Матриці. Поняття про векторний простір.

<u>**Означення 1.**</u> ***Матрицею*** будемо називати прямокутну таблицю чисел. Позначатимемо матриці великими літерами, так що, наприклад, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}=\left(a_j^i\right)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ – це матриця із m рядків та n стовпчиків.

Таким чином, верхній індекс елементу a_j^i матриці вказує на номер рядка, а нижній – на номер стовпчика. Числа m та n називаються ***розмірностями*** матриці. Матриці рівних розмірностей ***рівні***, якщо рівні всі їх відповідні елементи. При $m=n$ матриця називається ***квадратною***.

<u>**Означення 2.**</u> Сукупність елементів $a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n \in \mathbf{R}$ називають ***головною діагоналлю*** квадратної матриці.

Серед квадратних матриць виділяють ***діагональну*** матрицю – всі елементи її рівні нулю, крім елементів головної діагоналі: $a_j^i = 0$ при $i \neq j,\ i,j=\overline{1,n}$; верхню та нижню трикутні матриці – матриці з рівними нулю елементами відповідно під та над головною діагоналлю: $a_j^i = 0$ при $i<j$ або $i>j,\ i,j=\overline{1,n}$, та ***одиничну*** матрицю – діагональна матриця, у якої $a_i^i = 1,\ i=\overline{1,n}$. Одиничну матрицю розмірності n позначатимемо $\mathbf{E}_n$: $\mathbf{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

2. Додавання матриць та множення на скаляр.

Нехай $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ – матриці рівних розмірностей $m \times n$ з елементами a_j^i та b_j^i відповідно, де $\forall\, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

<u>**Означення 3.**</u> ***Сумою*** матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називається матриця $\mathbf{C}$ розмірностей $m \times n$ з елементами $c_j^i = a_j^i + b_j^i \quad \forall\, i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}$.

<u>**Означення 4.**</u> ***Добутком*** матриці $\mathbf{A}$ на число λ називається матриця $\mathbf{C}$ з елементами $c_j^i = \lambda a_j^i\ \forall\, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Матрицею, **протилежною** до матриці $\mathbf{A}$, називатимемо матрицю $(-1)\mathbf{A}$ і позначатимемо її через $-\mathbf{A}$. Таким чином, $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$ для будь-якої матриці $\mathbf{A}$. **Різницею** матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називатимемо матрицю $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$.

Наступна теорема є прямим наслідком властивостей додавання та множення чисел.

Теорема 1. Для довільних матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ та $\mathbf{C}$ рівних розмірностей та довільних чисел λ, μ справедливі наступні рівності :

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$; (комутативність)
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$; (асоціативність)
3. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$; (дистрибутивність відносно додавання матриць)
4. $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$; (дистрибутивність відносно додавання скаляра)
5. $\lambda(\mu\mathbf{A})=(\lambda\mu)\mathbf{A}$; (асоціативність множення на скаляр)
6. $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$; (існування нуля)
7. $1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$
8. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$ (існування протилежної матриці)

Зауваження. Дана теорема означає, що множина матриць розмірностей $m\times n$ утворює ***векторний (лінійний) простір*** над полем дійсних чисел.

Всі елементи будь-якого векторного простору називають ***векторами*** (інколи незважаючи на природу цих елементів).

Означення 5. Деяку множину елементів L будемо називати ***векторним*** або ***лінійним простором*** над полем $\Re$ дійсних чисел, якщо в цій множині визначені операції додавання (+) елементів та множення (·) елементу на число:

1. $\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in L \;\; \exists\; \mathbf{c}\in L: \;\; \mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$
2. $\forall\mathbf{a}\in L \;\; \exists\; \mathbf{c}\in L: \;\; \mathbf{c}=\lambda\cdot\mathbf{a}$

причому ці операції задовольняють наступним 8 аксіомам:

1. $\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in L \quad \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$;
2. $\forall\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in L \quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$;
3. $\exists\mathbf{0}\in L:\forall\mathbf{a}\in L \quad \mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$;
4. $\forall\mathbf{a}\in L \;\; \exists(-\mathbf{a})\in \mathrm{L}: \;\; \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$;
5. $\forall\mathbf{a}\in L \;\; \forall\lambda,\mu\in\Re \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\mathbf{a})=(\lambda\mu)\cdot\mathbf{a}$;
6. $\forall\mathbf{a}\in L \quad 1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$;
7. $\forall\mathbf{a}\in L \;\; \forall\lambda,\mu\in\Re \quad (\lambda+\mu)\cdot\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$;
8. $\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in L \;\; \forall\lambda\in\Re \;\; \lambda\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.

Таким чином, множина матриць фіксованих розмінностей є однією з багатьох реалізацій абстрактної моделі векторного простору. Іншими прикладами векторних просторів є: множина геометричних векторів, множина дійсних чисел, множина комплексних чисел, множина поліномів порядку, що не перевищує n, та інші.

3. Транспонована матриця та її властивості.

Нехай $\mathbf{A}$ – деяка матриці розмірностей $m\times n$ з елементами a_j^i, де $\forall\, i=\overline{1,m},\;\; j=\overline{1,n}$.

Означення 6. Матрицею ***транспонованою*** до матриці $\mathbf{A}$ називається матриця $\mathbf{A}^T$ розмірностей $n\times m$: $\mathbf{A}^T=\left(a_i^j\right)_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$.

Іншими словами, i-тим стовпчиком транспонованої матриці є i-тий рядок вихідної і навпаки: j-тим рядком транспонованої матриці є j-тий стовпчик вихідної матриці.

Приклад 1. Нехай $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, тоді $\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$;

Нехай маємо вектор-стовпчик $|\mathbf{b}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, тоді при транспонуванні одержимо вектор-рядок $|\mathbf{b}\rangle^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Очевидні властивості транспонованих матриць зібрані в наступні твердження.

Теорема 2. $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$

Теорема 3. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Означення 7. Квадратна матриця $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ називається ***симетричною***, якщо $a_j^i = a_i^j \ \forall i,j=\overline{1,n}$, тобто $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Означення 8. Квадратна матриця $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ називається ***кососиметричною***, якщо $a_j^i = -a_i^j \ \ \forall i,j=\overline{1,n}$, тобто $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

Зауваження. Оскільки для діагональних елементів кососиметричної матриці виконується рівність $a_i^i = -a_i^i$, звідси випливає, що $a_i^i = 0 \ \forall i=\overline{1,n}$.

Теорема 4. Будь-яка квадратна матриця може бути подана у вигляді суми симетричної та кососиметричної матриць.

Очевидною є наступна рівність: $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\overline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)$, де матриця $\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)$ є симетричною, а матриця $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)$ є кососиметричною. Отже, рівність $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\overline{\mathbf{A}}}$ є розкладом, про який йдеться в теоремі.

Приклад 2. Матриця $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ є, очевидно, симетричною згідно з означенням **7**, а матриця $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ – кососиметричною, згідно з означенням **8**.

4. Добуток матриць.

Розглянемо дві матриці $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ та $\mathbf{B} = \left(b_j^i\right)_{j=\overline{1,p}}^{i=\overline{1,n}}$.

Означення 9. Добутком матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називається матриця

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \left(c_j^i\right)_{j=\overline{1,p}}^{i=\overline{1,m}}, \text{ де } c_j^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i b_j^k . \tag{1}$$

Таким чином, добутком двох матриць є матриця, кількість рядків якої рівна кількості рядків першої матриці, а кількість стовпчиків – кількості стовпчиків другої. Елементами матриці-добутку є суми, складені з добутків відповідних елементів рядків першого множника та стовпчиків другого. Саме тому добуток двох матриць визначений лише тоді, коли «довжини» рядків першої матриці та стовпчиків другої матриці збігаються.

Приклад 3. Нехай маємо вектор-рядок $\langle\mathbf{a}| = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ та вектор-стовпчик $|\mathbf{b}\rangle = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$. Тоді добутком $\langle\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}\rangle = \sum_{k=1}^{n} a^k b_k$ є число, а добутком $|\mathbf{b}\rangle\cdot\langle\mathbf{a}|$ – квадратна матриця розмірності n: $|\mathbf{b}\rangle\cdot\langle\mathbf{a}| = \begin{pmatrix} b^1a_1 & b^1a_2 & \cdots & b^1a_n \\ b^2a_1 & b^2a_2 & \cdots & b^2a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b^na_1 & b^na_2 & \cdots & b^na_n \end{pmatrix}$

Зауваження. Цей приклад підкреслює той факт, що множення матриць не є комутативною операцією, тобто $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Приклад 4. Нехай $\mathbf{A}$ – квадратна матриця: $\mathbf{A} = \left(a^i_j\right)_{i,j=\overline{1,n}}$, а $|\mathbf{x}\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ та $|\mathbf{b}\rangle = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчики. Тоді визначений добуток $\mathbf{A}\cdot|\mathbf{x}\rangle = \begin{pmatrix} a^1_1x^1 + a^1_2x^2 + \cdots + a^1_nx^n \\ a^2_1x^1 + a^2_2x^2 + \cdots + a^2_nx^n \\ \vdots \\ a^n_1x^1 + a^n_2x^2 + \cdots + a^n_nx^n \end{pmatrix}$, отже $\mathbf{A}\cdot|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{b}\rangle$ є матричним записом системи n лінійних рівнянь з n невідомими.

Приклад 5. Для матриці $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ знайдемо $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = $

$$= \begin{pmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 27 & 39 & 61 \end{pmatrix}$$

Властивості добутку матриць описані наступною теоремою.

Теорема 5. Для довільних матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ та $\mathbf{C}$, розмірності яких допускають їх множення, справедливі рівності:

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ (дистрибутивність)
2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ (дистрибутивність)
3. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ (асоціативність)

4. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$

5. Визначник матриці.

Означення 10. Визначником квадратної матриці $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ називається

число, яке позначається $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$ або $\det\mathbf{A}$, і визначається за

певним правилом. Нижче будуть сформульовані правила обчислення визначників для матриць, розмірностей 1, 2, 3. Загальна теорія визначників виходить за межі даного курсу. Отже,

$|\mathbf{A}| = \left|a_1^1\right| = a_1^1$, $\quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$ (правило «хреста»),

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3$$ (правило «зірочки»).

Крім того, для матриць порядку вищого за 2 визначник може бути визначений за теоремою Лапласа:

Теорема 5. **(Правило Лапласа обчислення визначника).** Для визначника будь-якої квадратної матриці $\mathbf{A}$ мають місце формули:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_j^k \overline{\mathbf{M}}_k^j \text{, де } k = \overline{1,n} \tag{2}$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_k^i \overline{\mathbf{M}}_i^k \text{, де } i = \overline{1,n} \tag{3}$$

Через $\overline{\mathbf{M}}_k^j$ тут позначений так званий доповняльний мінор елементу a_j^k – це визначник матриці, яка одержана із початкової при викреслюванні k-го рядка та j-го стовпчика.

Формула (2) називається розкладом визначника за елементами j-го стовпчика, а формула (3) – розкладом визначника за елементами i-го рядка. Ці співвідношення дають можливість обчислювати визначники порядку n через визначники порядку $n-1$, а ті, в свою чергу, через визначники ще нижчих порядків.

Сформулюємо (без доведень) деякі ***властивості визначника***.

Теорема 6. Визначник транспонованої матриці збігається з визначником самої матриці: $\left|\mathbf{A}^T\right| = |\mathbf{A}|$.

Теорема 7. Визначник діагональної матриці $\mathbf{D}$ рівний добутку елементів головної діагоналі: $|\mathbf{D}| = a_1^1 a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_n^n$.

Звідси також випливає, що $|\mathbf{E}| = 1$, $|\mathbf{0}| = 0$.

Теорема 8. Якщо в матриці один із стовпчиків (рядків) є нульовим, то визначник такої матриці рівний нулю.

Теорема 9. Визначник трикутної матриці (верхньої або нижньої) $|\mathbf{A}| = \left|a_j^i\right|$, де $a_j^i = 0$ при $i > j$ або $i < j$ рівний добутку елементів головної діагоналі: $|\mathbf{A}| = a_1^1 a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_n^n$.

Теорема 10. Якщо два стовпчики (рядки) матриці поміняти місцями, визначник матриці змінить знак на протилежний.

Теорема 11. Якщо матриця містить два однакових стовпчики (рядки), то її визначник рівний нулю.

Теорема 12. Якщо один із стовпчиків (рядків) матриці помножити на деяке число , то визначник матриці помножиться на це число.

Теорема 13. Якщо в матриці два стовпчики (рядки) пропорційні, то визначник матриці рівний нулеві.

Теорема 14. Якщо один із стовпчиків (рядків) матриці помножити на число λ та додати до іншого стовпчика (рядка), то визначник такої матриці не зміниться.
Теорема 15. Якщо стовпчики (рядки) матриці лінійно залежні, то визначник такої матриці рівний нулю.
Теорема 16. (Теорема про визначник добутку матриць). Якщо $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ квадратні матриці порядку n, то визначник добутку цих матриць рівний добутку їх визначників: $|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = |\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.

Приклади обчислення визначників.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = ad - bc$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{A}| = 1\cdot5\cdot9 + 3\cdot4\cdot8 + 2\cdot6\cdot7 - 3\cdot5\cdot7 - 2\cdot4\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 = 45 + 96 + 84 - 105 - 72 - 48 = 0$ – ця матриця вироджена.

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

В даному прикладі скористаємось властивостями визначника, зокрема теоремою 14, щоб привести матрицю до верхнього трикутного вигляду (спочатку перший рядок помножимо на -1 та додамо по черзі до другого та третього рядків):

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1-a & a-b \\ 0 & 1-a & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1-a & a-b \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = 1\cdot(1-a)\cdot(1-a) = (1-a)^2$$

Цей самий визначник обчислимо ще раз, розкривши його (за теоремою 5), наприклад, по другому рядку:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+1} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+2} + a\cdot\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+3} =$$

$$-(a-b) + (1-b) - a\cdot(1-a) = 1 - 2a + a^2 = (1-a)^2$$

6. Теорема Крамера для систем лінійних рівнянь.

Означення 11. Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = b^2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_1^n x^1 + a^n x^2 + \cdots + a_n^n x^n = b^n \end{cases} \qquad (4)$$

Матриця $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \left(a_j^i\right)_{i,\, j=\overline{1,n}}$ називається матрицею системи, а вектор-стовпчик $\left|\mathbf{b}\right\rangle = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$ – стовпчиком вільних членів. Визначник матриці цієї системи $\Delta = \left|\mathbf{A}\right|$ називається ***визначником системи***.

Елементи матриці a_j^i є коефіцієнтами системи. Якщо вектор-стовпчик невідомих позначити через $\left|\mathbf{x}\right\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, то у матричному вигляді запис системи буде таким (див. приклад **4**): $\mathbf{A} \cdot \left|\mathbf{x}\right\rangle = \left|\mathbf{b}\right\rangle$.

Означення 12. ***Розв'язком*** системи (4) називатимемо такий вектор $\left|\boldsymbol{\alpha}\right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}$, який перетворює кожне рівняння системи на тотожність: $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha} \equiv \mathbf{b}$.

Теорема (формули Крамера). Якщо визначник матриці системи (4) $\Delta \neq 0$, то існує єдиний розв'язок $\left|\boldsymbol{\alpha}\right\rangle$ цієї системи. Він визначається ***формулами Крамера***:

$$\alpha^i = \frac{\Delta^i}{\Delta}, \ i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

де Δ^i – визначник, утворений із визначника Δ заміною i–го стовпчика на вектор-стовпчик вільних членів $\left|\mathbf{b}\right\rangle$.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^1 + 2x^2 + 5x^3 = -9 \\ x^1 - x^2 + 3x^3 = 2 \\ 3x^1 - 6x^2 - x^3 = 25 \end{cases}$

Знайдемо визначник цієї системи: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 30 + 18 + 15 + 2 + 18 = 24$.

Оскільки виконана умова теореми Крамера, знайдемо визначники $\Delta^i, \ i = 1,2,3$:

$$\Delta^1 = \begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 25 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 60 + 150 + 125 + 4 - 162 = 48; \qquad x^1 = 2$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix} = -2-81+125-30-9-75 = -72; \qquad x^2 = -3$$

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 25 \end{vmatrix} = -25+54+12-27-50+12 = -24 \qquad x^3 = -1$$

Лекція 2. Простір геометричних векторів. Добутки векторів.
1. Вектори. Операції з векторами.

Означення 1. ***Геометричним вектором*** називатимемо напрямлений відрізок у тривимірному просторі.

Отже, вектор характеризується напрямком та довжиною і цілком визначається двома точками: одна задає початок вектора, друга – його кінець. Як відомо, аналітично вектори позначаються цими двома точками, наприклад, вектор $\mathbf{AB}$.

Означення 2. Два геометричних вектори називаються ***рівними***, якщо вони мають однакову довжину та напрямок – тобто лежать на паралельних прямих. (Це так звані вільні вектори з довільною точкою прикладення. У фізиці, крім них розглядаються ще ковзні вектори, тобто напрямлені вздовж однієї прямої).

Отже, рівні вектори можуть бути суміщені паралельним перенесенням, тобто точка-початок вектора не є визначальною, тому інколи вектор позначають однією літерою, наприклад, вектор $\mathbf{a}$ або $\mathbf{b}$.

Означення 3. Нуль-вектором називають вектор $\mathbf{0}$, який має нульову довжину та невизначений напрямок.

Означення 4. Протилежним вектором до вектора $\mathbf{a}$ називають вектор $-\mathbf{a}$, такий що $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

Означення 5. Вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ називаються ***колінеарними*** (позначається цей факт так: $\mathbf{a} \Updownarrow \mathbf{b}$), якщо вони лежать на паралельних прямих.

У множині геометричних векторів визначені лінійні операції над ними – додавання векторів та множення вектора на скаляр (дійсне число). Правила визначення результуючого вектора при цих операціях добре відомі зі шкільної програми, тому не будемо тут їх повторювати.

Вище вже згадувалось, що множина геометричних векторів є лише однією з реалізацій, моделлю більш загального математичного поняття – ***лінійного*** або ***векторного простору***.

2. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів.

Розглянемо довільний векторний простір L. Зафіксуємо в ньому деяку підмножину (систему) векторів $\mathbf{a}_k, k=1,...,n$. З означення операцій над векторами цього простору випливає можливість утворювати ***лінійні комбінації векторів***, тобто $\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \mathbf{a}_k \in L$ – лінійна комбінація векторів $\mathbf{a}_k, k=1,...,n$ простору L.

Числа $\alpha^k, k=1,...,n$ називають коефіцієнтами лінійної комбінації.

Означення 7. Лінійна комбінація називається ***тривіальною***, якщо всі її коефіцієнти рівні нулю.

Зауваження. Очевидно, що тривіальна лінійна комбінація – це нульовий вектор.

Означення 8. Система векторів $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1,...,n}$ називається ***лінійно незалежною***, якщо лише тривіальна лінійна комбінація векторів цієї системи рівна нуль-вектору.

Зауваження. Іншими словами, система векторів $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1,...,n}$ лінійно незалежна, якщо з того, що $\sum_{k=1}^{n}\alpha^k\mathbf{a}_k=\mathbf{0}$ випливає: $\alpha^1=\alpha^2=...=\alpha^n$.

Означення 9. Система векторів $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1,...,n}$ називається ***лінійно залежною***, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація векторів цієї системи, рівна нуль-вектору.

Приклади.

1. $\{\mathbf{0}\}$ – лінійно залежна система, оскільки існує нетривіальна лінійна комбінація $1\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$.
2. Нехай $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$. Тоді $\{\mathbf{a}\}$ – лінійно незалежна система, оскільки з рівності $\alpha\mathbf{a}=\mathbf{0}$ обов'язково випливає, що $\alpha=\mathbf{0}$.
3. Нехай $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$ два не колінеарних геометричних вектора. Тоді $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$ – лінійно незалежна система векторів. Доведемо це від супротивного, тобто припустимо існування деякої нетривіальної лінійної комбінації цих векторів, яка рівна нулю: $\alpha^1\mathbf{a}_1+\alpha^2\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$. Нехай тут $\alpha^1\neq 0$. Тоді $\mathbf{a}_1=-\frac{\alpha^2}{\alpha^1}\mathbf{a}_2$, що означає колінеарність векторів. Одержана суперечність свідчить про лінійну незалежність системи векторів $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$.

3. Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів.

1. Система векторів $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k\}$, серед яких є нуль-вектор – лінійно залежна.
   Доведення. Дійсно, нехай маємо систему векторів $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k\}$, причому $\mathbf{a}_i=\mathbf{0}\,(1\le i\le k)$. Розглянемо лінійну комбінацію з коефіцієнтами $\alpha^1=\ldots=\alpha^{i-1}=\alpha^{i+1}=\ldots=\alpha^n,\alpha^i=1$. Вона нетривіальна, проте, вочевидь, рівна нуль-вектору.
2. ***Критерій лінійної залежності векторів***. Для того, щоб система векторів $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно та достатньо, щоб принаймні один із векторів системи був лінійною комбінацією інших.
3. Якщо серед k векторів системи $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ є лінійно залежна підсистема із яких-небудь $m\ (m\le k)$ векторів, то і вся система $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ – лінійно залежна.
4. Будь-яка підсистема векторів лінійно незалежної системи $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ – лінійно незалежна.

Означення 10. Векторний простір L називається ***n-вимірним***, якщо в ньому існує лінійно незалежна система із n векторів, а будь-які $n+1$ векторів утворюють лінійно залежну систему. Таким чином, число n визначає вимірність простору. Позначають цей факт наступним чином: $\dim L=n$.

Для підкреслення вимірності векторного простору будемо позначати його L_n.

Приклади.

1. У просторі, що складається лише з нуль вектора, не існує лінійно незалежних векторів, тому вимірність цього простору рівна нулю.
2. Множина геометричних векторів, колінеарних фіксованому вектору $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, разом з нуль-вектором утворює одновимірний простір. Доведіть це самостійно.
3. Вимірність простору всіх геометричних векторів рівна 3. Адже вектори $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ декартової системи координат лінійно незалежні, а будь-який вектор може бути записаний у вигляді їх лінійної комбінації.
4. Множина поліномів порядку, що не перевищує n, утворює простір вимірності $n+1$. Дійсно n поліномів $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ утворюють лінійно-незалежну систему, а будь-який інший поліном порядку не більшого за n, є їх лінійною комбінацією.

4. Базис скінчено вимірного векторного простору. Координати векторів.

Означення 12. ***Базисом*** n -вимірного векторного простору L_n називається довільна ***впорядкована*** лінійно незалежна система із n векторів цього простору.

Зауваження 1. З означення випливає, що у векторному просторі існує безліч базисів.

Зауваження 2. Базис називають ще впорядкованою ***максимально лінійно незалежною системою*** векторів у просторі. Слово «максимально» тут означає, що до системи базисних векторів неможливо приєднати жодного вектору простору так, щоб система залишалась лінійно незалежною.

Теорема. Кожний вектор $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ n-вимірного векторного простору L_n може бути поданий у вигляді лінійної комбінації векторів базису, причому таке подання єдине.

Означення 13. Якщо $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ – базис векторного простору L_n і $\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \mathbf{f}_k$ – розклад деякого вектору $\mathbf{a} \in L_n$ по базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$, то коефіцієнти цього розкладу $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ називаються ***координатами вектора*** $\mathbf{a} \in L_n$ в базисі $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$.

З доведеної вище теореми випливає, що будь-який вектор простору однозначно визначається своїм набором координат у вибраному базисі. Це дозволяє повністю абстрагуватись від самої природи векторного простору L_n і мати справу лише з наборами n координат замість векторів.

Зауваження. Координати вектора $\mathbf{a} \in L_n$ будемо записувати як вектор-стовпчик, позначаючи їх наступним чином: $|\mathbf{a}\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}$.

Наслідки з теореми.

1. Координати будь-якого вектору простору у фіксованому базисі визначаються однозначно.
2. Два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх координати у фіксованому базисі.
3. Якщо $\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \mathbf{f}_k$ та $\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} \beta^k \mathbf{f}_k$ розклади довільних векторів простру L_n по базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$, то вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ в цьому базисі матиме координати $\alpha^1 + \beta^1, \dots, \alpha^n + \beta^n$, а вектор $\lambda \mathbf{a}$ – координати $\lambda\alpha^1, \dots, \lambda\alpha^n$. Доведіть цей факт самостійно.
4. Система векторів $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ простору L_n лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли лінійно незалежна система вектор-стовпчиків їх координат. Доведіть це самостійно.

5. Системи координат в просторі геометричних векторів.

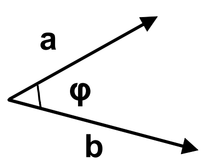
Повернемось у тривимірний простір геометричних векторів. Очевидно, базис в ньому утворюють довільні три не компланарні вектори (нагадаємо, що ***компланарними*** називаються три вектори, які паралельні одній площині). Отже, виберемо три не компланарних вектори та зведемо їх до спільного початку – деякої точки О. Одержимо ***загальну афінну систему координат***. Якщо три базисних вектори взаємно перпендикулярні, система координат називається ***прямокутною***. І нарешті, якщо у прямокутній системі координат базисні вектори мають одиничну довжину, маємо знайому із школи ПДСК – ***прямокутну декартову систему координат***. Базисні вектори в ній позначаються, як вже згадувалось вище, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, а координати вектора називаються відповідно абсциса, ордината та апліката. Будемо позначати їх наступним чином: $\mathbf{a} = \left\{a^1, a^2, a^3\right\}$. Це означає, що $\mathbf{a} = a^1\mathbf{i} + a^2\mathbf{j} + a^3\mathbf{k}$.

6. Добутки векторів.

В даному розділі розглядаються вектори із простору $L = \Re^3$ геометричних векторів.

6.1. Скалярний добуток векторів.

Означення 14. ***Скалярним добутком*** двох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Re^3$ називається число $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, рівне: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$, де φ – кут утворений векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, а через $|\mathbf{a}|$ позначено довжину вектора $\mathbf{a}$.



Неважко зрозуміти, що скалярний добуток двох ненульових векторів рівний 0 тоді і тільки тоді, коли

вектори ортогональні: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2$

<u>**Означення 2.**</u> ***Ортом*** вектора $\mathbf{a}\in\Re^3$ називається вектор $\mathbf{e_a}$ одиничної довжини співнапрямлений з вектором $\mathbf{a}$. Тобто $\mathbf{e_a}=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$.

<u>**Означення 3.**</u> ***Проекцією*** вектора $\mathbf{a}\in\Re^3$ на напрямок вектора $\mathbf{b}\in\Re^3, \mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ називається число $np_{\mathbf{b}}\mathbf{a}\cdot=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e_b}=|\mathbf{a}|\cdot\cos\varphi$. Звідси легко одержати, що $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=np_{\mathbf{b}}\mathbf{a}\cdot|\mathbf{b}|=np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}\cdot|\mathbf{a}|$

<u>**Зауваження**</u>. З означення випливає, що проекція додатна, якщо кут між векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ гострий, та від'ємна, у разі, коли кут тупий.

Властивості скалярного добутку векторів.

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\ \forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in\Re^3$ – комутативність скалярного добутку очевидно випливає з його означення;
2. $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in\Re^3\ \forall\lambda\in\Re$ – скалярний множник можна виносити за знак скалярного добутку (доведіть це самостійно);
3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\ \forall\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\Re^3$ – дистрибутивність скалярного добутку випливає із властивостей проекцій, які вивчались у курсі шкільної програми.
4. $|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\ \forall\mathbf{a}\in\Re^3$ – скалярний добуток вектора на себе визначає квадрат довжини вектора.

Нехай у просторі геометричних векторів вибрана деяка ПДСК. Як визначити скалярний добуток векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, якщо відомі їх координати? Отже, нехай маємо вектори $\mathbf{a}=\{a^1,a^2,a^3\}$ та $\mathbf{b}=\{b^1,b^2,b^3\}$. Визначимо скалярний добуток цих векторів, скориставшись властивостями скалярного добутку:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a^1\mathbf{i}+a^2\mathbf{j}+a^3\mathbf{k})\cdot(b^1\mathbf{i}+b^2\mathbf{j}+b^3\mathbf{k})=a^1b^1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a^2b^2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+a^3b^3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3$$

<u>**Зауваження**</u>. Зверніть увагу, що одержана формула має місце ***лише для ПДСК***. У загальній афінній системі координат ми мали б враховувати кути між базисними векторами.

Таким, чином ***у прямокутній декартовій системі координат*** справедлива наступна формула скалярного добутку двох векторів:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3} \qquad (1)$$

Формула (1) дає важливі наслідки, зокрема, довжина вектора визначається через його координати наступним чином:

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^2)^2}\quad\forall\mathbf{a}\in\Re^3 \qquad (2)$$

Для кута між двома векторами маємо формулу:

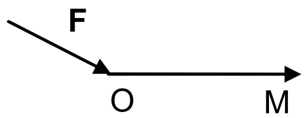
$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^2)^2}\sqrt{(b^1)^2+(b^2)^2+(b^2)^2}} \qquad (3)$$

<u>**Означення 15.**</u> ***Напрямними косинусами*** вектора $\mathbf{a}\in\Re^3$ називаються косинуси кутів, утворених вектором $\mathbf{a}$ з ортами ПДСК. Ці кути позначаються

відповідно α, β та γ, отже, з формули (3) випливає: $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1}{|\mathbf{a}|}$, аналогічно $\cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^2}{|\mathbf{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^3}{|\mathbf{a}|}$. Звідси маємо основну властивість напрямних косинусів:
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (4)$$
Таким чином, якщо $|\mathbf{a}| = 1$, то $\cos\alpha = a^1, \cos\beta = a^2, \cos\gamma = a^3$ – тобто, напрямними косинусами орта є його координати.

<u>Приклади</u>.

1. Знайдемо орт вектора $\mathbf{a} = \{1,1,1\}$. Маємо $|\mathbf{a}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, тому $\mathbf{e_a} = \left\{ 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} \right\}$.
2. Кут між ортами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ рівний $\pi/3$. Знайти скалярний добуток цих векторів. Знаходимо за означенням $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi = 1\cdot 1\cdot\cos\pi/3 = \sqrt{3}/2$.
3. Нехай $\mathbf{a} = \{-1,2,3\}$, $\mathbf{b} = \{2,0,1\}$. Знайдемо кут між цими векторами. З формули (3) одержимо $\cos\varphi = \frac{-2+0+3}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{70}}$, отже, $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{70}}$.
4. Знайдемо скалярний добуток $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ для векторів з прикладу 3. Виконаємо спочатку дії над векторами: $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 6\mathbf{a}^2 - 6\mathbf{b}^2 - 5\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 64 - 30 - 5 = 29$.

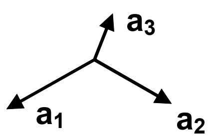


<u>Фізичний зміст скалярного добутку</u>.

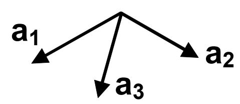
Якщо під впливом сили $\mathbf{F}$ деяка матеріальна точка переміщується з положення O у положення M , то робота A цієї сили по переміщенню даної точки рівна скалярному добутку сили та вектора переміщення точки: $A = \mathbf{F}\cdot\mathbf{OM}$. (див мал.)

6.2. Векторний добуток векторів.

<u>Означення 16.</u> Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \Re^3$, приведених до спільного початку, називається ***правою (лівою)***, якщо по цим векторам можна спрямувати відповідно великий, вказівний та середній пальці ***правої (лівої) руки***. Або ж при повороті на найменший кут від вектору $\mathbf{a}_1$ до вектору $\mathbf{a}_2$ напрямок вектору $\mathbf{a}_3$ відповідатиме руху ***правого (лівого)*** гвинта. (див. мал. нижче). Зрозуміло, що при зміні напрямку одного з векторів, або при зміні порядку нумерації двох з векторів трійка міняє свою орієнтацію на протилежну. Завжди вважатимемо, що орти ПДСК мають ***праву*** орієнтацію.



Права трійка векторів



Ліва трійка векторів

<u>Означення 17.</u> Векторним добутком двох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Re^3$ називається вектор $\mathbf{c}$, що визначається трьома умовами:

1. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$ де φ – кут утворений векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$;
2. вектор ортогональний до обох векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$;
3. вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ утворюють праву трійку.

Для векторного добутку використовуватимемо позначення $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Властивості векторного добутку векторів.

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Re^3$ – антикомутативність векторного добутку є наслідком зміни орієнтації трійки векторів при зміні їх порядку;
2. $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Re^3 \ \forall \lambda \in \Re$ – скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку (доведіть це самостійно);
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \Re^3$ – дистрибутивність векторного добутку
4. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$;
5. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні або принаймні один з них нульовий (доведіть це самостійно).

Знайдемо вираз векторного добутку через координати векторів-множників. Розглянемо вектори $\mathbf{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$ та $\mathbf{b} = \{b^1, b^2, b^3\}$. Визначимо їх векторний добуток, скориставшись властивостями векторного добутку та врахувавши, що $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^1\mathbf{i} + a^2\mathbf{j} + a^3\mathbf{k}) \times (b^1\mathbf{i} + b^2\mathbf{j} + b^3\mathbf{k}) = a^2b^3\mathbf{i} - a^3b^2\mathbf{i} - a^1b^3\mathbf{j} + a^3b^1\mathbf{j} + a^1b^2\mathbf{k} - a^2b^1\mathbf{k} \quad (5)$$

Враховуючи вигляд формули для обчислення визначника матриці розмірності 3, можна записати:

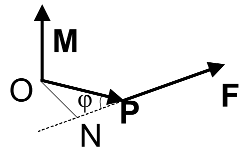
$$\boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}} \quad (6)$$

<u>Приклади</u>.

5. Знайдемо площу трикутника, побудованого на векторах з прикладу 3. Для цього визначимо спершу векторний добуток даних векторів:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = \{2, 7, -4\}$$

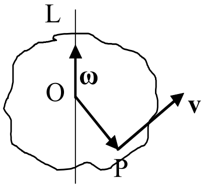
Модуль цього вектора визначає площу паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, отже шукана площа трикутника складає половину цієї величини: $S = \frac{1}{2}|\{2, 7, -4\}| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 49 + 16} = \frac{\sqrt{69}}{2}$ кв. од.



<u>Фізичний зміст векторного добутку</u>.

1. Одним з основних понять статики є момент сили $\mathbf{F}$, прикладеної до деякої точки P відносно фіксованої точки O.

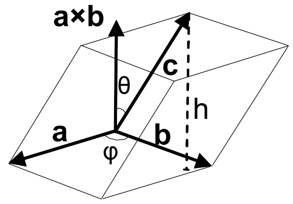
Моментом сили $\mathbf{F}$, прикладеної до точки P відносно фіксованої точки O, називається вектор $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, де $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ – радіус-вектор точки P. Величина моменту сили: $|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{OP}| \sin\varphi = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{ON}|$ – добуток величини сили на плече.



2. Якщо тверде тіло обертається навколо нерухомої осі L зі сталою кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$, то миттєва швидкість v довільної точки P цього тіла визначається ***формулою Ейлера***: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, де $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ – радіус-вектор точки P відносно полюса O на осі обертання L. Напрямлений вектор швидкості по дотичній до кола, по якому рухається точка P у бік обертання.

3. Мішаний добуток трьох векторів.

<u>Означення 18.</u> ***Мішаним*** добутком впорядкованої трійки векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ називається число, рівне $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.



Якщо кут між векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ позначити φ, а кут між векторним добутком $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ та вектором $\mathbf{c}$ – θ, то значення мішаного добутку можна обрахувати наступним чином:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \sin\varphi \cos\theta \qquad (7)$$

***Властивості мішаного добутку векторів*.**

1. Мішаний добуток ***правої трійки*** векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Це очевидно (див. мал.), оскільки площа основи такого паралелепіпеда рівна $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\varphi$, а висота h рівна $|\mathbf{c}| \cos\theta$. Отже, $V = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \sin\varphi \cos\theta = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Проте, у випадку лівої трійки векторів кут θ виявиться тупим і для визначення об'єму паралелепіпеда треба використовувати модуль мішаного добутку $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. Крім того, очевидно, що знак мішаного добутку визначає орієнтацію трійки векторів: якщо $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$, то трійка векторів права, інакше трійка ліва. Якщо ж вектори компланарні, тобто паралельні одній площині, то висота такого «паралелепіпеда» рівна 0, отже нулю рівний і його об'єм.
2. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (8)
   Дійсно, площу паралелограма можна визначити, взявши за основу іншу грань, наприклад, утворену векторами $\mathbf{b}$ та $\mathbf{c}$. Тоді маємо $V = |(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. А оскільки орієнтація трійки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ така сама, як і трійки $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$, то таким чином, бачимо, що у мішаному добутку векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ не має значення, до якої пари множників $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ чи $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ застосовувати векторне множення. Власне тому мішаний добуток просто позначають $\mathbf{abc}$, оскільки важливим виявляється лише порядок множників.
3. $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}$ (9)
   Дана властивість легко випливає із узагальнення властивості 2 та антикомутативності векторного добутку.
4. $\mathbf{abc} = 0$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарні.
   Достатність цього твердження була обґрунтована при доведенні першої властивості, тому доведемо тут необхідність. Отже, нехай $\mathbf{abc} = 0$. Якщо принаймні один з множників є нуль-вектором, то трійка напевне компланарна, тому далі вважатимемо, що всі вектори-множникі ненульові. У такому випадку із формули (7) випливає, що кут $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ – це означає компланарність векторів, або ж кут $\varphi = 0$. В цьому разі вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні, що також означає компланарність векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
5. $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ab}(\lambda\mathbf{c}) = \lambda\mathbf{abc} \ \ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \Re^3 \ \ \forall\lambda \in \Re$
   Дана властивість є наслідком відповідних властивостей скалярного та векторного добутків.

6. $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{bc}=\mathbf{a}_1\mathbf{bc}+\mathbf{a}_2\mathbf{bc}\ \ \forall \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c}\in\Re^3$,

$\mathbf{a}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\mathbf{c}=\mathbf{ab}_1\mathbf{c}+\mathbf{ab}_2\mathbf{c}\ \ \forall \mathbf{a},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{c}\in\Re^3$,

$\mathbf{ab}(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2)=\mathbf{abc}_1+\mathbf{abc}_2\ \ \forall \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\in\Re^3$ – дистрибутивність мішаного добутку.

Знайдемо тепер вираз мішаного добутку через координати векторів-множників. Розглянемо вектори $\mathbf{a}=\{a^1,a^2,a^3\}$, $\mathbf{b}=\{b^1,b^2,b^3\}$ та $\mathbf{c}=\{c^1,c^2,c^3\}$. Визначимо їх мішаний добуток.

Оскільки $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a^1&a^2&a^3\\ b^1&b^2&b^3\end{vmatrix}=\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^1,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^3\}$,

а $\mathbf{abc}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^1c^1+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2c^2+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^3c^3$, то

$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}c^1&c^2&c^3\\ a^1&a^2&a^3\\ b^1&b^2&b^3\end{vmatrix}=\mathbf{cab}=\begin{vmatrix}a^1&a^2&a^3\\ b^1&b^2&b^3\\ c^1&c^2&c^3\end{vmatrix}$. Остаточно одержуємо формулу

$$\boxed{\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}a^1&a^2&a^3\\ b^1&b^2&b^3\\ c^1&c^2&c^3\end{vmatrix}} \qquad (10)$$

Зауваження. З формули (10) та властивості 3 мішаного добутку випливає вже відомий факт, що визначник матриці розмірності 3 не зміниться при циклічній перестановці рядків і змінить знак на протилежний при перестановці двох рядків.

Приклади.

6. Знайдемо об'єм тетраедра з вершинами $A=(-4,-3,9);B(3,4,2);C(5,2,-1);D(7,4,8)$.

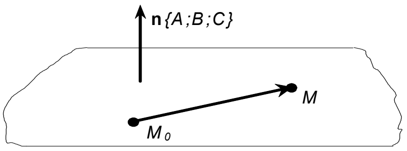
Даний тетраедр утворений векторами $\mathbf{AB}=\{7,7,-7\};\mathbf{AC}=\{9,5,-10\};\mathbf{AD}=\{11,7,-1\}$. Оскільки орієнтація цієї трійки нам невідома, об'єм тетраедра визначатимемо як $1/6$ модуля мішаного добутку векторів $\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD}$:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}7&7&-7\\ 9&5&-10\\ 11&7&-1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-35-441-770+385+63+490\right|=\frac{308}{6}=\frac{154}{3}\text{кв. од.}$$

Лекція 3. Площина та пряма в просторі.

1. Площина.

Поняття площини є одним із первісних геометричних понять. Вважатимемо, що у просторі обрана та зафіксована деяка ПДСК. Якщо визначити деякий напрямок з допомогою, наприклад, вектора $\mathbf{n}=\{A;B;C\}$, то тим самим визначена множина площин, перпендикулярних даному напрямку. Вектор $\mathbf{n}$



зветься ***нормаллю*** цих площин. Щоб визначити серед цієї множини конкретну площину, досить вказати точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ній (див. мал.). Позначимо $M(x, y, z)$ довільну точку цієї площини. Тоді вектори $\mathbf{M_0M}$ та $\mathbf{n}$ будуть ортогональними, а отже, рівняння

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad (1)$$

є векторним рівнянням площини. Тут $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r_0}$ – відповідно радіус-вектори точок M та M_0. Записавши рівність (1) у координатній формі, матимемо ***рівняння площини, заданої точкою та нормаллю***:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

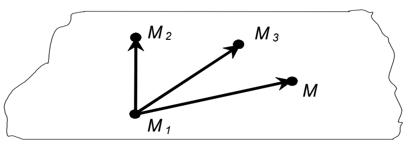
Рівняння (2), яке задає площину, є рівнянням першого порядку виду

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

Вірно й навпаки, будь-яке рівняння першого порядку (3) визначає деяку площину у просторі. Воно називається ***загальним рівнянням площини***. Дослідимо частинні випадки цього рівняння, коли деякі коефіцієнти в ньому рівні нулеві.

1. Припустимо, що $A = 0$. Тоді вектор нормалі площини, очевидно, ортогональний до осі OX, а сама площина їй паралельна.
2. Припустимо, що $A = B = 0$. Тоді площина паралельна обом осям і OX, і OY, тобто паралельна координатній площині XOY і перпендикулярна осі OZ.
3. Нехай $D = 0$. Дана площина проходить через початок координат – точку $O(0,0,0)$.
4. Припустимо, що $A = D = 0$ – площина паралельна осі OX та проходить через початок координат, отже, вісь OX належить площині.
5. Якщо $A = B = D = 0$, то маємо рівняння $z = 0$, яке задає координатну площину XOY.

Площина також може бути визначена трьома своїми точками. Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – три точки відповідно з радіус-векторами $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ та $\mathbf{r_3}$, які визначають деяку площину (див. рис.). Щоб записати її рівняння розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ цієї ж площини. Тоді вектори $\mathbf{r} - \mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ та $\mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}$ – компланарні, отже, їх мішаний добуток нульовий, тобто



$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_1})(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})(\mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}) = 0 \qquad (4)$$

є векторним ***рівнянням площини, заданої трьома точками***. Відповідне рівняння у координатній формі має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

<u>**Приклад 1**</u>**.** Знайти рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\mathbf{n} = (1;-1;2)$.

Заданий вектор $\mathbf{n}$ є нормаллю даної площини, а оскільки початок координат належить площині, в загальному рівнянні (3) слід покласти $D = 0$. Таким чином, шукане рівняння має вигляд $x-y+2z=0$.

Приклад 2. Скласти рівняння площини, що проходить через три дані точки $A(1,2,3)$, $B(0,-1,2)$ та $C(-2,1,0)$.

Запишемо рівняння площини у вигляді (5): $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$, або $8(x-1)-8(z-3)=0$, або нарешті, $x-z+2=0$.

Припустимо далі, що площина (3) не проходить через початок координат, тобто коефіцієнт $D\neq 0$, тоді рівняння площини можна подати у вигляді:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 ,$$

або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{6}$$

де $a=\frac{-D}{A}, b=\frac{-D}{B}, c=\frac{-D}{C}$ – відповідно координати точок перетину площини (3) з осями OX, OY та OZ. Зверніть увагу, якщо, наприклад, $A=0$, то координату точки перетину площини із віссю OX визначити неможливо – площина їй паралельна. Рівняння (6) носить назву рівняння площини ***у відрізках на осях***.

Двогранний кут α між двома площинами, заданими рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, можна визначити як кут між їх нормалями $\mathbf{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ та $\mathbf{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{7}$$

Зауваження. Зрозуміло, що таким чином буде визначений лише один з двох двогранних кутів, інший рівний $\pi-\alpha$.

З формули (7) випливає ***умова перпендикулярності двох площин***, а саме: дві площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{8}$$

Умова паралельності двох площин еквівалентна умові колінеарності їх нормалей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{9}$$

Приклад 3. Визначити кути між площинами $x-3y+7z-5=0$ та $2x-4y-2z+1=0$.

Нормалями до заданих площин є вектори $\mathbf{n}_1=(1,-3,7)$ та $\mathbf{n}_2=(2,-4,-2)$. Легко переконатись, що скалярний добуток цих векторів рівний нулю, тобто виконана умова (8): $1\cdot 2+(-3)\cdot(-4)+7\cdot(-2)=0$ – площини перпендикулярні.

Приклад 4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(2,1,0)$ перпендикулярно до площин $x+y-2z-3=0$ та $2x-y-z+4=0$.

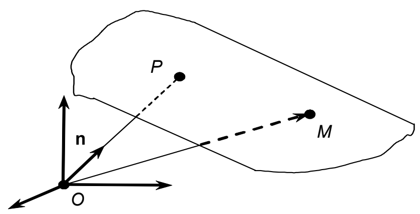
Оскільки шукана площина перпендикулярна до площин з нормалями $\mathbf{n}_1=(1,1,-2)$ та $\mathbf{n}_2=(2,-1,-1)$, то її нормаль $\mathbf{n}$ є перпендикулярною до обох нормалей $\mathbf{n}_1$ та $\mathbf{n}_2$, а отже, колінеарна їх векторному добутку $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$. Визначимо

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \{-3;-3;-3\}.$$ Таким чином, можна вважати, що $\mathbf{n} = \{1;1;1\}$.

Шукана площина тепер визначається рівнянням виду (2): $(x-2)+(y-1)+z=0$, або $x+y+z-3=0$.

<u>Приклад 5</u>. Знайти об'єм тетраедра, утвореного координатними площинами та площиною $2x+3y+4z-12=0$.

Запишемо рівняння даної площини у вигляді рівняння (6), перенісши вільний член у праву частину та поділивши обидві частини рівняння на -12. Одержимо рівняння $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$. Отже, прямокутний тетраедр має ребра з довжинами 6, 4 та 3. Його об'єм рівний 12 кубічним одиницям.

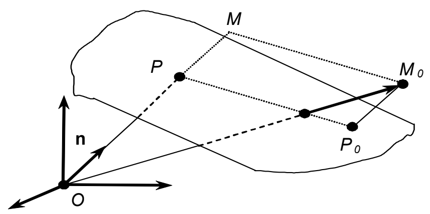


Розглянемо далі (див. рис.) орт $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ нормалі, <u>проведеної із початку координат до площини</u>. Якщо позначити через $|\mathbf{OP}| = p \ge 0$ відстань від початку координат до площини, то для довільної точки $M(x, y, z)$ площини маємо рівність $np_{\mathbf{n}}\mathbf{OM} = p$, або

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (10)$$

Дане рівняння називається ***нормальним рівнянням площини***, оскільки в ньому фігурує орт особливої нормалі площини – проведеної із початку координат. Щоб записати рівняння (3) у ***нормальній формі***, необхідно помножити обидві частини рівняння на коефіцієнт $\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, підібравши знак так, щоб виконувалась рівність $D\mu \le 0$.

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – довільна точка простору, яка розташована з



протилежного боку ніж початок координат відносно площини. Тоді для неї справджується очевидна рівність (див рис.):

$$np_{\mathbf{n}}\mathbf{OM_0} = |\mathbf{OP}| + |\mathbf{PM}| = p + |\mathbf{P_0M_0}| = p + d,$$

де $d = M_0P_0$ – відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини. Отже, в цьому випадку маємо $d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p$. Якщо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ розташована по той самий бік від площини, що й початок координат, то аналогічними міркуваннями (зробіть малюнок самостійно) доходимо висновку, що $np_{\mathbf{n}}\mathbf{OM_0} = p - d$, отже, $d = -(x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p)$. Введемо у розгляд величину

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p. \qquad (11)$$

Вона зветься ***відхиленням*** точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини і є результатом підстановки її координат у нормальне рівняння площини (10). Відхилення точки M_0 ***додатне***, якщо точка та початок координат розташовані по різні боки від площини і ***від'ємне***, якщо точка M_0 та початок координат розташовані по один бік площини. У будь-якому випадку, $d = |\delta|$.

<u>Приклад 6</u>. Знайти відстань та відхилення точки $M_0(-1{,}2{,}5)$ від площини $x-2y+3z+1=0$.

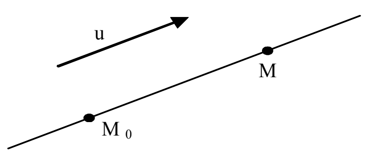
Довжина нормалі заданої площини дорівнює $\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$. Щоб записати нормальне рівняння цієї площини, досить поділити обидві частини заданого рівняння на коефіцієнт $-\sqrt{14}$. Отже, нормальне рівняння матиме вигляд: $\dfrac{-x+2y-3z-1}{\sqrt{14}}=0$. Визначимо відхилення точки M_0 : $\delta=\dfrac{1+4-15-1}{\sqrt{14}}=\dfrac{-11}{\sqrt{14}}$ – точка та початок координат знаходяться по один бік площини; відстань точки M_0 від площини рівна $d=\dfrac{11}{\sqrt{14}}$.

<u>Приклад 7</u>. Скласти рівняння площин, паралельних площині $4x-2y-4z-5=0$ та розташованих на відстані 2 одиниць від неї.

Щоб записати нормальне рівняння цієї площини, досить поділити обидві частини заданого рівняння на коефіцієнт $\pm\sqrt{4^2+2^2+4^2}=\pm 6$, причому знак треба вибрати так, щоб вільний член нормального рівняння був від'ємним. Отже, нормальне рівняння заданої площини матиме вигляд: $\dfrac{4x-2y-4z-5}{6}=0$. Тому рівняння паралельних площин, які розташовані на відстані 2 одиниць від неї, матимуть вигляд: $\dfrac{4x-2y-4z-5}{6}\pm 2=0$. Таким чином, шуканими є площини $4x-2y-4z+7=0$ та $4x-2y-4z-17=0$.

2. Пряма.

Якщо зафіксувати деякий вектор $\mathbf{u}=\{l,m,n\}$, то він задає напрямок у просторі. Тим самим визначена множина прямих паралельних даному напрямку. Для визначення конкретної прямої L з цієї множини, досить вказати точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на ній (див мал.). Щоб визначити цю пряму аналітично, тобто вказати рівняння, яке пов'язує координати довільної точки прямої $M(x,y,z)$, скористаємось колінеарністю векторів $\mathbf{M_0M}$ та $\mathbf{u}$ (вектор $\mathbf{u}$ називається ***напрямним вектором*** прямої) : $(\mathbf{r}-\mathbf{r})_\mathbf{0}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ або $\mathbf{r}-\mathbf{r_0}=\lambda\mathbf{u}$, де λ – довільне число. Таким чином одержане ***векторне рівняння прямої*** L.



Ця ж рівність для кожної координати вектора $\mathbf{M_0M}$ дає ***параметричні рівняння прямої*** L:

$$\begin{cases} x=x_\mathbf{0}+\lambda l \\ y=y_\mathbf{0}+\lambda m \\ x=z_\mathbf{0}+\lambda n \end{cases}. \qquad (12)$$

Тут $\lambda\in\mathbf{R}$ є параметром – кожна точка прямої визначена деяким його значенням. Якщо з рівностей (12) виключити параметр λ, то одержимо ***канонічні рівняння прямої***:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \qquad (13)$$

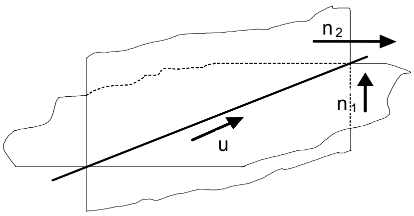
Розглянемо деякі частинні випадки. Припустимо, що одна з координат напрямного вектора прямої (13) рівна нулю, наприклад, $l=0$. Тоді пряма, очевидно, перпендикулярна осі абсцис. Якщо ж $l=m=0$, то пряма перпендикулярна до площини XOY , тобто паралельна осі аплікат.

Пряму також можна задати, вказавши дві точки $M_1=(x_1,y_1,z_1)$ та $M_2(x_2,y_2,z_2)$ на ній. Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка шуканої прямої. Тоді вектор $\mathbf{M_1M_2}$ буде напрямним і можемо записати канонічні ***рівняння прямої, заданої двома точками***:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (14)$$

Пряма у просторі може також бути визначена як ***лінія перетину двох непаралельних площин:***

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (15)$$



Ці рівняння описують площини, проте дають мало уявлення про власне пряму. Щоб записати пряму, задану рівняннями (15), у канонічному вигляді, необхідно визначити напрямний вектор прямої та деяку точку на ній. Напрямний вектор, очевидно, має бути паралельним кожній з площин, а отже, перпендикулярним до нормалей $\mathbf{n_1}$ та $\mathbf{n}_2$ обох площин, тому можна вважати, що $\mathbf{u}=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$. Для того, щоб визначити точку на прямій (3), покладемо одну із змінних, наприклад z, рівною z_0 і розв'яжемо систему $\begin{cases} A_1x+B_1y=-D_1-C_1z_0 \\ A_2x+B_2y=-D_2-C_2z_0 \end{cases}$ відносно змінних x та y.

<u>**Приклад 1**</u>**.** Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(3,1,-2)$ паралельно прямій $x=2-\lambda;\ y=-3\lambda;\ z=-1+2\lambda$.

Напрямний вектор $\mathbf{u}$ заданої прямої визначаємо із її параметричних рівнянь: $\mathbf{u}=\{-1;-3;2\}$. Шукана пряма паралельна заданій, отже, вектор $\mathbf{u}$ буде напрямним і для неї. За формулами (13) визначаємо канонічні рівняння нашої прямої: $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{2}$.

<u>**Приклад 2**</u>**.** Скласти канонічні рівняння прямої $x-2y+3z=0$, $x+y-6=0$.

Напрямний вектор $\mathbf{u}$ шуканої прямої визначимо як векторний добуток нормалей площин: $\mathbf{u}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\{-3;3;3\}$, або $\mathbf{u}=\{-1;1;1\}$. Знайдемо ще точку, що належить шуканій прямій. Покладемо, наприклад, $z=0$ та розв'яжемо систему $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y-6=0 \end{cases}$. Помноживши перше рівняння на -1 та додавши до другого, знайдемо $y=2$. Отже, $x=4$, і точка $(4,2,0)$ належить прямій. Запишемо канонічні рівняння цієї прямої: $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$.

<u>Зауваження</u>. Очевидна неоднозначність канонічних рівнянь (13) – можна було використати іншу точку на прямій та взяти за напрямний будь-який вектор, колінеарний до $\mathbf{u}=\{-1;1;1\}$.

<u>Означення 1.</u> ***Пучком площин***, що проходять через вісь L, називається вся сукупність площин, що проходять через пряму L.

<u>Зауваження.</u> Пучок площин англійською мовою звучить як: *pencil of planes* або *sheaf of planes*.

<u>Теорема.</u> Нехай вісь пучка L задана як лінія перетину двох непаралельних площин π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Тоді при довільних α та β, таких, що $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, пучок задається рівнянням:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (16)$$

<u>Зауваження.</u> Рівняння пучка у вигляді (4) описує і обидві площини π_1 та π_2. Якщо ж покласти у рівнянні (16) $\beta=\lambda\alpha$, то одержимо рівняння, яке описує всі площини пучка за винятком площини π_2.

<u>Приклад 3</u>. Записати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-4}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{1}$ та точку $M(1,1,1)$.

Шукана площина належить пучку з віссю $\begin{cases} 2(x-4)=y-4 \\ y-4=2(z-1) \end{cases}$, або $\begin{cases} 2x-y-4=0 \\ y-2z-2=0 \end{cases}$ і описується рівнянням $\lambda(2x-y-4)+y-2z-2=0$ при деякому значенні λ. Щоб визначити λ, підставимо в це рівняння координати заданої точки M: $\lambda(-3)-3=0$, отже, $\lambda=-1$. Тому шуканою є площина $x-y+z-1=0$.

Взаємне розташування прямої та площини.

Розглянемо основні задачі про взаємне розташування прямої та площини.

1. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ з площиною $Ax+By+Cz+D=0$.

   Використаємо рівняння прямої у параметричній формі (1) та підставимо їх у рівняння площини. Таким чином з'ясуємо, при якому значенні параметру λ має місце перетин прямої з площиною. Визначивши таким чином коефіцієнт λ, знайдемо координати точки перетину прямої та площини.

   <u>Приклад 4</u>. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{2}$ з площиною $3x-y-2z-7=0$.

   Підставимо параметричні рівняння прямої $x=3-\lambda;\ y=1-2\lambda;\ z=-2+2\lambda$ у рівняння площини: $3(3-\lambda)-(1-2\lambda)-2(-2+2\lambda)-7=0$, звідки $\lambda=1$. Отже, $x=2;\ y=-1;\ z=0$ – точка перетину даної прямої з площиною.

2. Знайти кут φ між прямою $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ та площиною $Ax+By+Cz+D=0$. Сформулювати умови їх паралельності та ортогональності.

   Неважко зрозуміти, що $\varphi=\pi/2-\alpha$ або $\varphi=\pi/2+\alpha$, де α – це кут між нормаллю площини та напрямним вектором прямої. Тому $\sin\varphi=\cos\alpha=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{u}|}=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$. Пряма та площина паралельні, коли $Al+Bm+Cn=0$, а перпендикулярні – при $\mathbf{n}\|\mathbf{u}$, тобто $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

   <u>Приклад 5</u>. Знайти кут φ між прямою $\frac{x-5}{6}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{1}$ та площиною $7x+2y-3z+5=0$.

   Тут $\mathbf{u}=\{6;-3;1\}$ – напрямний вектор прямої, а $\mathbf{n}=\{7;2;-3\}$ – нормаль площини. Тоді $\sin\varphi=$
$$=\frac{6\cdot 7+(-3)\cdot 2+1\cdot(-3)}{\sqrt{7^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{6^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{33}{\sqrt{46}\sqrt{62}}$$

3. Сформулювати умови належності прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$.

Для того, щоб пряма лежала у площині необхідно і достатньо виконання двох умов: пряма паралельна площині і одна точка прямої належить площині. Запишемо ці умови аналітично: $\begin{cases} Al+Bm+Cn=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$.

4. Сформулювати умови перетину двох непаралельних прямих $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$.

Переконайтесь самостійно, що умова перетину двох непаралельних прямих еквівалентна умові компланарності векторів $\mathbf{u_1}=\{l_1,m_1,n_1\}$, $\mathbf{u_2}=\{l_2,m_2,n_2\}$ та $\mathbf{M_1M_2}$, де $M_1=(x_1,y_1,z_1)$ та $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

5. Записати рівняння площини, що проходить через дві задані паралельні прямі.
6. Записати рівняння площини, що проходить через дві задані прямі, що перетинаються.
7. Знайти точку симетричну заданій відносно заданої площини.

<u>Приклад 6</u>. Знайти точку, симетричну точці $P(2,7,1)$ відносно площини $x-4y+z+7=0$.

Опустимо перпендикуляр із точки P на площину та знайдемо точку E перетину його з площиною. Точка

E буде серединою відрізку PQ, де Q – шукана симетрична точка. Отже, перпендикуляр має проходити через точку P, а його напрямним вектором буде нормаль заданої площини. Таким чином одержимо рівняння цього перпендикуляра: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z-1}{1}$. Точку E знайдемо, як описано в прикладі 4: $E(3,3,2)$. Далі, оскільки точка E – середина відрізку PQ, то її координати є напівсумою відповідних координат точок P та Q, звідки й знаходимо $Q(4,-1,3)$.

8. Знайти відстань між двома заданими паралельними прямими.
9. Знайти відстань до заданої прямої від точки, що не лежить на даній прямій.

<u>Приклад 7</u>. Знайти відстань точки $P(1,3,5)$ від прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

Побудуємо площину, що проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої: $1\cdot(x-1)-1\cdot(y-3)-1\cdot(z-5)=0$, або $x-y-z+7=0$. Відшукаємо точку E перетину цієї площини із заданою прямою: $E(-2,1,4)$. Шукана відстань дорівнює довжині відрізку PE: $d=|PE|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$.

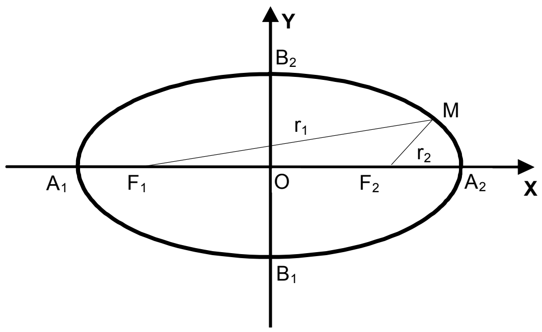
Лекція 4. Криві другого порядку.

Знамениті криві – ***еліпс***, ***гіпербола*** та ***парабола*** відомі математикам уже кілька тисячоліть. Їх відкриття приписують одному з учнів Платонівської Академії Менехму (IV ст. до н.е.). Він розглядав переріз прямого кругового конуса площинами і з'ясував, що в залежності від кута нахилу твірних конуса та розташування площини в перерізі з'являються криві з характерними геометричними властивостями. На його честь ці криві звалися тріадою Менехма. Сторіччям пізніше інший грецький математик Аполлоній присвятив цим кривим цілу монографію з восьми книг «Про конічні перерізи». Власне, саме Аполлоній дав назви «еліпс», «гіпербола» та «парабола» елементам тріади Менехма та відкрив багато залежностей, що й понині є предметом вивчення аналітичної геометрії. Розглянемо ***основні криві другого порядку***.

1. Еліпс.

Розглянемо геометричне місце точок, що мають таку властивість: сума відстаней будь-якої точки від двох фіксованих точок, які називаються фокусами, є величиною сталою. Покажемо, що цим геометричним місцем точок є еліпс.

Виберемо прямокутну систему координат так, щоб вісь OX співпала з фокальною віссю (прямою, якій належать фокуси), а фокуси знаходилися б симетрично відносно початку координат. Розглянемо довільну точку M з координатами (x, y), яка має вказану вище геометричну властивість. Координати фокусів позначимо відповідно $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$ (див. мал.). Нехай $r_1 = |F_1M|, r_2 = |F_2M|$.



<u>Означення 1.</u> r_1 та r_2 називаються ***фокальними радіусами*** точки M .

Покладемо $$r_1 + r_2 = 2a \quad (1)$$

(З очевидних геометричних міркувань випливає, що $2a > 2c$). Отже, маємо: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$,

або $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Оскільки обидві частини рівності додатні, піднесемо рівність до квадрату і виконаємо очевидні скорочення: $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$. Повторне піднесення до квадрату приводить до рівності:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Позначимо $b^2 = a^2 - c^2 > 0$ та поділимо обидві частини останньої рівності на a^2b^2. Остаточно одержимо: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

– це і є канонічне рівняння еліпса, ***центр*** якого знаходиться в початку координат. Залишаємо читачеві можливість самостійно переконатись, що проведені вище перетворення не привносять сторонніх коренів в рівняння (1). Параметри канонічного рівняння еліпса носять цілком природні назви: $A_1A_2 = 2a$ – велика вісь (a – велика піввісь) $B_1B_2 = 2b$ – мала вісь (b – мала піввісь).

<u>Означення 2.</u> ***Ексцентриситетом еліпса*** називають відношення відстані між фокусами до великої осі : $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Для еліпса очевидно, що $\varepsilon \in [0,1)$.

Корисними є формули, що зв'язують параметри еліпса з його ексцентриситетом: $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, або $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Ексцентриситет є мірою «сплюснутості» еліпса – зокрема при $\varepsilon = 0$ одержимо $a = b$, тобто рівняння (1) задає коло. Цікавим виявляється і «шлях у зустрічному напрямку» – вивести з канонічного рівняння (10) геометричну властивість (2). Дійсно, для довільної точки еліпса $M(x, y)$ маємо:

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) =$$

$$= x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) + 2ax\varepsilon + (c^2+b^2) = x^2\varepsilon^2 + 2ax\varepsilon + a^2 = (a+x\varepsilon)^2,$$

а отже, $$r_1 = a + x\varepsilon. \qquad (3)$$

Цілком аналогічно можна одержати, що $$r_2 = a - x\varepsilon, \qquad (4)$$

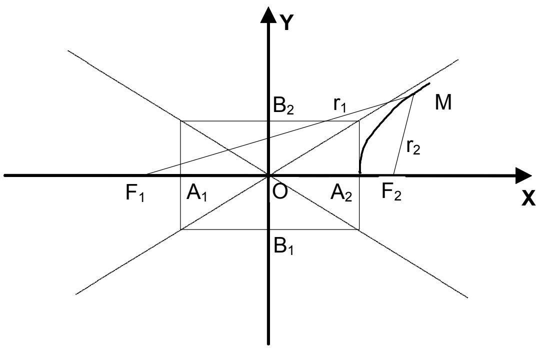
звідки й випливає властивість (2). Формули (3) та (4) дають раціональні вирази для фокальних радіусів r_1 та r_2.

Рівняння еліпса часто розглядається в параметричній формі: $x = a\cos t, y = b\sin t$, де $t \in [0, 2\pi]$.

2. Гіпербола.

Знайдемо криву, точки якої мають видатну геометричну властивість – модуль різниці відстаней будь-якої точки цієї кривої від двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є сталою величиною.

З цією метою розглянемо ПДСК, початок якої знаходиться посередині відрізку, кінцями якого є фокуси, а фокальна вісь збігається з віссю OX.



Нехай точка M має координати (x, y) (див. мал.). Координати фокусів позначимо відповідно $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, а фокальні радіуси точки M – $r_1 = |F_1M|$ та $r_2 = |F_2M|$. Покладемо

$$|r_1 - r_2| = 2a \qquad (5)$$

Припустимо спочатку, що $x > 0$, тоді $r_1 > r_2$. Отже з рівності (5) маємо: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, або $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Оскільки обидві частини рівності додатні, піднесемо рівність до квадрату і виконаємо очевидні скорочення: $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2$, звідки випливає $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$.

Позначивши $b^2 = c^2 - a^2 > 0$ остаточно одержимо канонічне рівняння правої гілки гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

Йому ж задовольняють і точки лівої гілки, для яких $x < 0$. Початок координат є ***центром гіперболи***, так само як і у випадку з еліпсом. Точки $A_1(-a;0)$ та $A_2(a;0)$ називаються вершинами гіперболи, відрізок $A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь, $B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь гіперболи.

Оскільки для точок гіперболи $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$, то при зростанні x від a до $+\infty$ y в першій чверті також зростає від 0 до $+\infty$. Неважко пересвідчитись, що

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}x - b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right) = +0$, тобто гілка гіперболи нескінченно наближається знизу до прямої $y = \frac{b}{a}x$, але не перетинає її.

Означення 3. Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються ***асимптотами гіперболи***.

Означення 4. ***Ексцентриситетом гіперболи*** називається відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$.
Для гіперболи $\varepsilon \in (1,+\infty)$. Очевидні також формули зв'язку параметрів гіперболи з її ексцентриситетом: $\varepsilon = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$, або $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

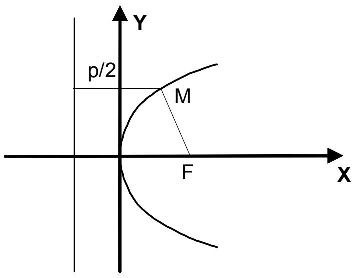
Пропонуємо переконатись самостійно, що для точок правої гілки гіперболи справедливі формули:

$$r_1 = x\varepsilon + a; \qquad r_2 = x\varepsilon - a, \tag{7}$$

а для точок лівої гілки – $r_1 = -x\varepsilon - a$; $\quad r_2 = -x\varepsilon + a$ (8)

Гіпербола, яка задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, має за дійсну вісь відрізок $2b$ на осі OY, а за уявну – відрізок $2a$ на осі OX. Вона називається ***спряженою*** до гіперболи (6).

3. Парабола.



Покажемо, що саме для точок параболи характерна наступна властивість: відстань будь-якої точки до деякої прямої, що зветься ***директрисою***, рівна відстані цієї точки до фокуса.
Введемо в розгляд ПДСК, вісь OX якої перпендикулярна директрисі, а початок координат є серединою відрізка проведеного від фокуса до директриси (див. мал.).
Нехай точка M має координати (x, y). Відстань від директриси до фокуса позначимо $p\ (p > 0)$. Тоді координати фокуса – точки $F\left(p/2;0\right)$. Позначимо $r = |FM|$ і одержимо: $p/2 + x = r$, або $p/2 + x = \sqrt{\left(p/2 - x\right)^2 + y^2}$, звідки і випливає рівняння параболи:

$$y^2 = 2px \tag{9}$$

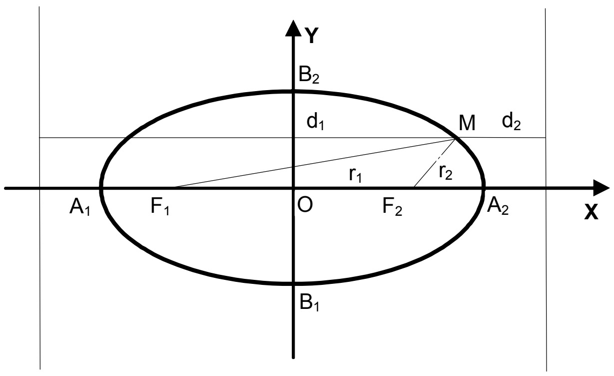
Її гілки симетричні відносно осі OX, вершина знаходиться в початку координат. Щоб узагальнити певним чином рівняння всіх трьох кривих, вважають ексцентриситет визначеним і для параболи і покладають його в цьому випадку рівним одиниці: $\varepsilon = 1$.

Рівняння директриси параболи: $x = -p/2$.

Фокальні властивості кривих другого порядку.

Спорідненість всіх трьох кривих проявляється і в спільних так званих ***фокальних*** властивостях. Введемо спершу поняття директрис для еліпса та гіперболи.

Означення 5. ***Директрисами*** еліпса або гіперболи називаються прямі, перпендикулярні фокальній осі еліпса або гіперболи, симетрично розташовані на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центру кривої (випадок кола, коли $\varepsilon = 0$, тут не розглядається). Таким чином і еліпс, і гіпербола мають по дві директриси (як і по два фокуси), які задаються рівняннями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Поняття директриси параболи і її рівняння були означені вище. Неважко помітити, що директриси всіх трьох кривих не перетинають самих кривих. Дійсно, для еліпса $\varepsilon < 1$, отже, $\frac{a}{\varepsilon} > a$, тобто директриси еліпса розташовані зовні його (див. мал. нижче).



Для гіперболи ж $\varepsilon > 1$, отже, $\frac{a}{\varepsilon} < a$, тобто директриси розміщені між гілками гіперболи. Для точок параболи $x \geq 0$, директриса знаходиться в півплощині $x \leq 0$, а ексцентриситет параболи вважають рівним 1: $\varepsilon = 1$.

Основна фокальна властивість кривих другого порядку визначена наступною теоремою.

Теорема. Відношення довжини фокального радіуса кожної точки довільної кривої другого порядку до відстані цієї точки до односторонньої з фокусом директриси є величиною сталою, рівною ексцентриситету кривої тобто

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \qquad (10)$$

Доведення. Позначимо, як і раніше, фокальні радіуси довільної точки еліпса або гіперболи r_1 та r_2, а відстані цієї точки до відповідних директрис – d_1 та d_2.

Отже, для лівого фокуса і лівої директриси еліпса маємо: $\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + x\varepsilon}{\frac{a}{\varepsilon} + x} = \varepsilon$.

Цілком аналогічно для правого фокуса та правої директриси еліпса :

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - x\varepsilon}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon.$$

Для гіперболи необхідно окремо розглянути точки лівої та правої гілок. Отже, для точок лівої гілки маємо:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{-x\varepsilon - a}{|x| - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{-x\varepsilon - a}{-x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon; \qquad \frac{r_2}{d_2} = \frac{-x\varepsilon + a}{|x| + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{-x\varepsilon + a}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Аналогічно, для точок правої гілки маємо: $\frac{r_1}{d_1} = \frac{x\varepsilon + a}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$; $\frac{r_2}{d_2} = \frac{x\varepsilon - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

Для параболи безпосередньо з рівняння (10) випливає $\frac{r}{d} = 1 = \varepsilon$, що цілком виправдовує визначення ексцентриситету параболи.

Лекція 5. Обернена матриця та способи її відшукання. Ранг матриці.

1. Означення оберненої матриці.

Матриці, які розглядатимуться в цьому розділі, вважаються квадратними матрицями порядку n.

Означення 1. Квадратна матриця $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ називається ***виродженою***, якщо $|\mathbf{A}| = 0$ і ***невиродженою***, якщо $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Означення 2. Квадратна матриця, що позначатиметься $\mathbf{A}^{-1}$, називається ***правою оберненою*** до невиродженої квадратної матриці $\mathbf{A}$, якщо

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \qquad (1)$$

Зауваження. Права обернена матриця виникає із-за не комутативності множення матриць. Якщо позначити елементи правої оберненої матриці як $\left(\widetilde{a}_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \mathbf{A}^{-1}$, то рівність (1) можна записати у вигляді:

$$a_j^i \widetilde{a}_k^j = \delta_k^i, \ j = \overline{1,n}, \text{ де } \delta_k^i = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} \text{ – символи Кронекера.}$$

Неважко показати, що з означення 2 випливають наступні природні наслідки:

Теорема 1. Якщо матриця $\mathbf{A}$ невироджена , то і матриця $\mathbf{A}^{-1}$ невироджена.

Теорема 2. Правою оберненою матрицею до $\mathbf{A}^{-1}$ є сама матриця $\mathbf{A}$, тобто $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$.

Теорема 3. Права обернена до $\mathbf{A}$ матриця є й лівою оберненою, тобто: $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Ця властивість дозволяє сформулювати наступне означення.

Означення 3. Квадратна матриця $\mathbf{A}^{-1}$, називається *оберненою* до невиродженої квадратної матриці $\mathbf{A}$, якщо $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. (2)

Теорема 4. Обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$ єдина.

Теорема 5. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

Теорема 6. $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$

2. Обчислення оберненої матриці.

Наведемо тепер вираз для елементів $\widetilde{a}_j^i, i, j = \overline{1,n}$ оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\widetilde{a}_i^j = \frac{\mathbf{A}_i^j}{|\mathbf{A}|}, \ i,j = \overline{1,n} \qquad (4)$$

Тут через $\mathbf{A}_i^j$ позначено алгебраїчне доповнення елементу a_j^i : $\mathbf{A}_i^j = (-1)\mathbf{M}_j^i$, де $\mathbf{M}_j^i$ – доповняльний мінор елементу a_j^i, тобто визначник матриці, яка утворюється із матриці $\mathbf{A}$ після викреслювання i-го рядка та j-го стовпчика.

<u>Теорема 7.</u> З теорем **1** та **3** і формули (4) випливає ***критерій існування оберненої матриці***: обернена до матриці $\mathbf{A}$ існує тоді і тільки тоді, коли матриця $\mathbf{A}$ не вироджена.

Таким чином, маємо наступне правило знаходження оберненої матриці.

<u>Правило знаходження оберненої матриці.</u> Отже, щоб визначити елементи матриці, оберненої до деякої матриці $\mathbf{A}$, необхідно, перш за все, обчислити визначник матриці $\mathbf{A}$. Якщо $|\mathbf{A}| \neq 0$, то обернена матриці існує. ***Елементи її j-го рядка дорівнюють алгебраїчним доповненням до елементів j-го стовпчика матриці $\mathbf{A}$, поділеним на визначник матриці***.

<u>Метод Гаусса знаходження оберненої матриці.</u>

Будемо розглядати рівність (1) у вигляді n систем лінійних рівнянь з n невідомими, якими є елементи стовпчиків $\left|\widetilde{\mathbf{A}}_i\right\rangle = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_i^1 \\ \widetilde{a}_i^2 \\ \vdots \\ \widetilde{a}_i^n \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,n}$ матриці $\mathbf{A}^{-1}$, тобто систем виду

$$\mathbf{A} \cdot \left|\widetilde{\mathbf{A}}_i\right\rangle = \left|\mathbf{E}_i\right\rangle, \ i = \overline{1,n} \qquad (3)$$

Якщо застосувати для пошуку розв’язків даних систем метод Гаусса, то необхідно буде перетворювати розширені матриці цих систем, які мають вигляд: $\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{E}_i\right), i = \overline{1,n}$, до вигляду $\left(\mathbf{E} \middle| \widetilde{\mathbf{A}}_i\right), i = \overline{1,n}$. Оскільки при цьому будуть виконуватись ті самі перетворення, то чому б не застосувати їх одночасно до всіх стовпчиків одиничної матриці? Отже, метод Гаусса відшукання оберненої матриці зводиться до виконання допустимих перетворень з «надрозширеною» матрицею $\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{E}\right)$. Звівши її до вигляду $\left(\mathbf{E} \middle| \widetilde{\mathbf{A}}\right) \equiv \left(\mathbf{E} \middle| \mathbf{A}^{-1}\right)$, одержимо обернену матрицю.

<u>Приклад 1.</u> Знайти обернену матрицю для невиродженої матриці: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

За умовою, $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$. Отже, оскільки алгебраїчним доповненням до елемента a є елемент d, і навпаки, а для елемента b– $(-c)$, так само , як і для елемента c – $(-b)$, то оберненою є матриця : $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти обернену матрицю для матриці $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1 спосіб (метод алгебраїчних доповнень).
Знайдемо визначник матриці $|\mathbf{A}| = -1+6+2=7$. Отже, матриця невироджена. Шукатимемо елементи оберненої матриці, які знаходяться в першому її стовпчику. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів першого рядка матриці $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}_1^1 = (-1)^{1+1}\cdot 2 = 2$, $\mathbf{A}_1^2 = (-1)^{1+2}\cdot(-1) = 1$, $\mathbf{A}_1^3 = (-1)^{1+3}\cdot 3 = 3$. Аналогічно знаходимо алгебраїчні доповнення елементів другого рядка: $\mathbf{A}_2^1 = (-1)^{1+2}\cdot 4 = -4$, $\mathbf{A}_2^2 = (-1)^{2+2}\cdot(-2) = -2$, $\mathbf{A}_2^3 = (-1)^{2+3}\cdot(-1) = 1$ та третього рядка: $\mathbf{A}_3^1 = (-1)^{1+3}\cdot 5 = 5$, $\mathbf{A}_3^2 = (-1)^{2+3}\cdot 1 = -1$, $\mathbf{A}_3^3 = (-1)^{3+3}\cdot(-3) = -3$. Таким чином, обернена матриця є такою:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}$$

2 спосіб (метод Гаусса).
Запишемо розширену матрицю і будемо виконувати очевидні перетворення над її рядками:

$$(\mathbf{A}|\,\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\,\mathbf{A}^{-1}),$$ отже, $$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}.$$

3. Означення та обчислення рангу матриці.

Розглянемо матрицю $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ розмірностей $m \times n$.

Означення 4. Мінор $\mathbf{M}$ матриці $\mathbf{A}$ порядку r називається ***базисним***, якщо $\mathbf{M} \neq 0$, а всі мінори порядків $r+1$ рівні нулю, або $r = \min(m,n)$ (тобто мінорів порядку $r+1$ не існує).

Наслідок 1. З теореми Лапласа випливає, що якщо порядок базисного мінору рівний r, то всі мінори порядків вищих за $r+1$ теж рівні нулю.

Наслідок 2. Базисний мінор, очевидно, визначений неоднозначно.

Наслідок 3. Будь-яка матриця, крім нуль-матриці, має базисний мінор.

Означення 5. Стовпчики і рядки матриці $\mathbf{A}$, які містять базисний мінор, називаються ***базисними стовпчиками*** та ***базисними рядками***.

Означення 6. *Рангом* матриці $\mathbf{A}$ (позначається $\mathrm{Rank}\,\mathbf{A}$ або $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}$) називається ***порядок її базисного мінору***.

Наступна теорема не тільки описує вплив перетворень матриці на її ранг, але й дає спосіб визначення базисного мінору.

Теорема 8. Ранг матриці не зміниться при виконанні наступних елементарних перетворень рядків або стовпчиків матриці (будемо називати ці перетворення допустимими):

– множення рядка (стовпчика) на число не рівне нулю;
– додавання до рядка (стовпчика) іншого рядка (стовпчика);
– перестановка двох довільних рядків (стовпчиків).

Таким чином, дана теорема дає наступний метод обчислення рангу довільної матриці – треба виконувати допустимі елементарні перетворення над рядками або стовпчиками матриці, намагаючись звести її до якомога простішого вигляду, коли матриця містить достатню кількість нулів. Проілюструємо цей метод на прикладах, а потім сформулюємо остаточний висновок.

Приклад 3. Обчислити ранг матриці $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 4 & -1 & -5 & -6\\ -1 & 7 & 2 & 18\\ 2 & -5 & -3 & -14\end{pmatrix}$

Використаємо перший рядок матриці з першим елементом, рівним одиниці, для того, щоб одержати нульові значення під ним так само, як ми це робили розв'язуючи систему методом Гаусса. Перетворення рядків при цьому не змінюватимуть ранг матриці:

$$\mathbf{A}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & -1 & -22\\ 0 & 9 & 1 & 22\\ 0 & -9 & -1 & -22\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & -1 & -22\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Нулі в останніх двох рядках одержані внаслідок додавання до них другого рядка безпосередньо і помноженого на (-1). Отже,

$\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=\mathrm{Rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & -1 & -22\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$, оскільки очевидно, що базисним мінором є, наприклад, мінор $\mathbf{M}_{1,2}^{1,2}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -9\end{vmatrix}=-9$. Будь-який мінор третього порядку обов'язково включатиме нульовий рядок, а отже, буде рівним нулю.

Приклад 4. Обчислити ранг матриці $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$

Спочатку переставимо перший і другий рядки і елементарними перетвореннями одержимо нулі в першому стовпчику матриці під елементом, рівним 1:

$$\mathbf{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Тепер переставимо другий та третій рядки і одержимо нулі під другим елементом другого рядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

І нарешті третій рядок помножимо на (-1) та додамо до четвертого:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриці такого вигляду будемо називати *трапецієподібними*. Тепер можна сказати, що

$$\operatorname{Rg} \mathbf{A} = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} = 3.$$

Базисним можна вважати, наприклад, мінор $\mathbf{M}_{1,2,3}^{1,2,3} = 1$.

Ми скористались тут очевидним фактом, що якщо до будь-якої матриці дописати або викреслити з матриці рядок (стовпчик), повністю складений з нулів, – це не змінить рангу матриці.

Висновок. Для обчислення рангу матриці необхідно звести її допустимими елементарними перетвореннями до трапецієподібного вигляду, що дозволяє явним чином визначити базисний мінор, а отже, і ранг матриці.

4. Теорема про базисний мінор матриці.

Теорема 10 (про базисний мінор). В довільній матриці кожний рядок (стовпчик) є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпчиків).

Наслідок 1. Ранг матриці, визначений як порядок базисного мінору матриці, може бути еквівалентним чином визначений як максимальна кількість лінійно незалежних рядків (стовпчиків) матриці.

Наслідок 2 (критерії виродженості квадратної матриці). Наступні твердження є еквівалентними:

1. Визначник матриці рівний нулю.
2. Ранг r квадратної матриці менший за її порядок n.
3. Рядки або стовпчика квадратної матриці лінійно залежні.

Наслідок 3 (критерії невиродженості матриці). Наступні твердження є еквівалентними:

1. Визначник матриці не дорівнює нулю.
1. Ранг r квадратної матриці рівний її порядку n.
3. Рядки та стовпчика квадратної матриці лінійно незалежні.

Лекція 6. Загальна теорія систем n лінійних рівнянь з m невідомими.

1. Критерій сумісності системи.

Розглянемо систем m лінійних рівнянь з n невідомими загального виду:

$$\mathbf{A}\cdot\left|\mathbf{x}\right\rangle=\left|\mathbf{b}\right\rangle, \tag{1}$$

або $$\{\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j = b^i,\ \ i=\overline{1,m}$$

<u>Означення 1.</u> ***Розв'язком*** системи (1) називатимемо такий вектор $\left|\boldsymbol{\alpha}\right\rangle=\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^n\end{pmatrix}$,

який перетворює кожне рівняння системи на тотожність: $\mathbf{A}\cdot\left|\alpha\right\rangle\equiv\left|\mathbf{b}\right\rangle$.

<u>Означення 2.</u> Система (1) називається ***сумісною***, якщо вона має розв'язок.

<u>Теорема 1.</u> (Кронекера-Капеллі – критерій сумісності системи лінійних рівнянь)
Система (1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи рівний рангу матриці системи, тобто $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\,\mathbf{b})=\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}$.

<u>Означення 3.</u> ***Загальним розв'язком*** системи (1) називається множина всіх її розв'язків, виражена формулою.

2. Однорідна система лінійних рівнянь.

<u>Означення 4.</u> Якщо в системі (1) вектор-стовпчик $\left|\mathbf{b}\right\rangle$ нульовий:

$$\mathbf{A}\cdot\left|\mathbf{x}\right\rangle=\left|\mathbf{0}\right\rangle, \tag{2}$$

(надалі просто $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$), то така система називається ***однорідною***.

<u>Зауваження.</u> Однорідна система (2), очевидно, завжди сумісна. Вона має принаймні один розв'язок $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, який називається ***тривіальним***. Цікавість являють нетривіальні розв'язки цієї системи, якщо вони існують.

<u>Наслідок з теореми Крамера.</u> Однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний (тривіальний) розв'язок, тоді і тільки тоді, коли $|\mathbf{A}|\neq 0$.

Отже, для існування нетривіальних розв'язків необхідно і достатньо, щоб $|\mathbf{A}|=0$, або $\mathrm{Rg}\,\mathbf{A}=r<n$.

Позначимо через H множину всіх розв'язків однорідної системи (2) та дослідимо властивості цих розв'язків.

<u>Теорема 2.</u> Якщо $\mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_2$ – розв'язки системи (2) , то і $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ є роз в'язком, або $\forall\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in H\Rightarrow\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2\in H$.

► Дійсно, з дистрибутивності множення матриць випливає, що $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$. ◄

Теорема 3. Якщо $\mathbf{x}_1$ – розв'язок системи (2) , то і $\lambda\mathbf{x}_1$ є розв'язком $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, або $\forall\lambda\in\mathbf{R}\ \forall\mathbf{x}_1\in H \Rightarrow \lambda\mathbf{x}_1\in H$.

► Справді, $\mathbf{A}\cdot(\lambda\mathbf{x})=\lambda\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$. ◄

Наслідок. Оскільки $\mathbf{0}\in H$, то множина H розв'язків системи (2) – лінійний простір, який є частиною простору L_n , тобто його підпростором.

Виявляється, що розмірність цього підпростору визначається наступною теоремою.

Теорема 4. Розмірність простору H розв'язків однорідної системи (2) рівна $n-r$, де n – кількість невідомих, r – ранг матриці системи.

Означення 5. Довільний базис $\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2,\ldots,\mathbf{H}_{n-r}$ простору H розв'язків однорідної системи (2) називається ***фундаментальною системою розв'язків***.

З теореми **4** випливає наслідок, який визначає структуру загального розв'язку однорідної системи (2).

Наслідок. Загальний розв'язок однорідної системи (2) $\left|\mathbf{x}\right\rangle_{заг.одн.}$ є лінійною комбінацією векторів фундаментальної системи розв'язків:

$$\left|\mathbf{x}\right\rangle_{заг.одн.}=\sum_{k=1}^{n-r}c^k\cdot\left|\mathbf{H}_k\right\rangle . \qquad (3)$$

Тут $c^k, k=\overline{1,n-r}$ – довільні сталі.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} 3x^1+x^2-8x^3+2x^4+x^5=0\\ 2x^1-2x^2-3x^3-7x^4+2x^5=0\\ x^1+11x^2-12x^3+34x^4-5x^5=0\\ x^1-5x^2+2x^3-16x^4+3x^5=0 \end{cases}$$

Запишемо матрицю системи та використаємо допустимі перетворення, щоб визначити її базисний мінор (першим рядком відразу запишемо третій, бо в ньому перший коефіцієнт рівний 1):

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2\\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 0 & -24 & 21 & -75 & 12\\ 0 & -32 & 28 & -100 & 16\\ 0 & -16 & -14 & -50 & 8 \end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4\\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4\\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \end{pmatrix}\to\to\begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином $r=\operatorname{Rg}\mathbf{A}=2$ (базисним мінором вважатимемо мінор $\mathbf{M}_{1,2}^{1,2}$), $\dim(H)=n-r=5-2=3$. Змінні, які відповідають стовпчикам базисного мінору, називаються ***базисними змінними***, решта – ***вільними змінними***. Отже, базисні змінні – це x^1,x^2, тоді x^3,x^4,x^5 – незалежні змінні. Продовжимо допустимі перетворення над матрицею системи таким чином, щоб базисний мінор $\mathbf{M}_{1,2}^{1,2}$ (через $\mathbf{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_l}$ позначений мінор, утворений елементами матриці, що належать одночасно рядкам з індексами $i_1,\dots,i_k$ та стовпчикам з індексами $j_1,\dots,j_l$) зробити одиничним:

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & \frac{25}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{19}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & \frac{25}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Тепер

базисні змінні легко виражаються через вільні: $\begin{cases} x^1 = \frac{19}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^5 \\ x^2 = \frac{7}{8}x^3 - \frac{25}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^5 \end{cases}$. Звідки випливає

$$:\begin{cases} x^1 = \frac{19}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^5 \\ x^2 = \frac{7}{8}x^3 - \frac{25}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^5 \\ x^3 = x^3 \\ x^4 = x^4 \\ x^5 = x^5 \end{cases}$$

, або у матричній формі: $$\left|\mathbf{x}\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{8} & -\frac{25}{8} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix}$$

Вектор-стовпчики цієї матриці утворюють нормальну фундаментальну систему розв'язків даної системи: $\left|\mathbf{H}_1\right\rangle^T = \left(\frac{19}{8}; \frac{7}{8}; 1; 0; 0\right)$, $\left|\mathbf{H}_2\right\rangle^T = \left(\frac{3}{8}; -\frac{25}{8}; 0; 1; 0\right)$, $\left|\mathbf{H}_3\right\rangle^T = \left(-\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; 0; 0; 1\right)$. Загальний розв'язок даної системи виражається формулою (3), яка в координатній формі набуває вигляду:

$$\begin{cases} x^1 = \frac{19}{8}c^1 + \frac{3}{8}c^2 - \frac{1}{2}c3 \\ x^2 = \frac{7}{8}c^1 - \frac{25}{8}c^2 + \frac{1}{2}c^3 \\ x^3 = c^1 \\ x^4 = c^2 \\ x^5 = c^3 \end{cases}$$

, де c^1, c^2, c^3 – довільні сталі.

3. Неоднорідна система лінійних рівнянь.

Повернемось до розгляду неоднорідної системи (1): $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

<u>Означення 5.</u> Однорідна система $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ з тою самою матрицею системи називається ***зведеною*** системою для системи (1).

Покажемо, що загальний розв'язок зведеної однорідної системи (2) істотно пов'язаний з розв'язками неоднорідної системи (1). Припущення про існування розв'язків системи (1) згідно з теоремою Кронекера-Капеллі означає рівність рангів: $\mathrm{Rg}\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{b}\right) = \mathrm{Rg}\,\mathbf{A}$. Вважатимемо цю умову виконаною.

<u>Теорема 5.</u> Нехай $\left|\boldsymbol{\alpha}_1\right\rangle$ та $\left|\boldsymbol{\alpha}_2\right\rangle$ – розв'язки системи (1). Тоді вектор-стовпчики $\left|\boldsymbol{\alpha}_1\right\rangle - \left|\boldsymbol{\alpha}_2\right\rangle$ та $\left|\boldsymbol{\alpha}_2\right\rangle - \left|\boldsymbol{\alpha}_1\right\rangle$ будуть розв'язками зведеної системи (2).

► Підставимо в ліву частину системи (1) наприклад, вектор-стовпчик $|\boldsymbol{\alpha}_1\rangle - |\boldsymbol{\alpha}_2\rangle$ та використаємо дистрибутивність множення матриць:

$\mathbf{A}\cdot(|\boldsymbol{\alpha}_1\rangle - |\boldsymbol{\alpha}_2\rangle) = \mathbf{A}\cdot|\boldsymbol{\alpha}_1\rangle - \mathbf{A}\cdot|\boldsymbol{\alpha}_2\rangle = |\mathbf{b}\rangle - |\mathbf{b}\rangle = \mathbf{0}$, отже, $\mathbf{A}\cdot(|\boldsymbol{\alpha}_1\rangle - |\boldsymbol{\alpha}_2\rangle) = \mathbf{0}$, що і треба було показати. ◄

<u>**Теорема 6.**</u> Нехай $|\boldsymbol{\alpha}_1\rangle$ та $|\boldsymbol{\alpha}_2\rangle$ – розв'язки системи (1) з стовпчиками вільних членів, рівними відповідно $|\mathbf{b}_1\rangle$ та $|\mathbf{b}_2\rangle$. Тоді вектор-стовпчик $|\boldsymbol{\alpha}_1\rangle + |\boldsymbol{\alpha}_2\rangle$ буде розв'язком системи (1) з правою частиною $|\mathbf{b}_1\rangle + |\mathbf{b}_2\rangle$.

Доведення повністю аналогічне попередньому.

<u>**Теорема 7.**</u> Нехай $|\boldsymbol{\alpha}\rangle$ – деякий розв'язок системи (1). Тоді довільний вектор $|\boldsymbol{\beta}\rangle$ буде розв'язком цієї ж системи тоді і тільки тоді, коли знайдеться такий розв'язок $|\boldsymbol{\alpha}_0\rangle$ зведеної системи (2), що $|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\boldsymbol{\alpha}\rangle + |\boldsymbol{\alpha}_0\rangle$.

► <u>Необхідність</u>. Нехай $|\boldsymbol{\beta}\rangle$ є розв'язком системи (1). Позначимо $|\boldsymbol{\beta}\rangle - |\boldsymbol{\alpha}\rangle = |\boldsymbol{\alpha}_0\rangle$. Тоді з теореми **5** випливає, що $|\boldsymbol{\alpha}_0\rangle$ є розв'язком зведеної системи (2).

<u>Достатність</u>. Нехай $|\boldsymbol{\alpha}\rangle$ є розв'язком системи (1), $|\boldsymbol{\alpha}_0\rangle$ – розв'язок зведеної системи (2). Тоді з теореми **6** маємо, що вектор-стовпчик $|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\boldsymbol{\alpha}\rangle + |\boldsymbol{\alpha}_0\rangle$ також буде розв'язком системи (1) з тою самою правою частиною. ◄

<u>**Наслідок.**</u> Нехай $|\mathbf{H}_1\rangle, |\mathbf{H}_2\rangle, \ldots, |\mathbf{H}_{n-r}\rangle$ – фундаментальна система розв'язків зведеної однорідної системи (2), а $|\mathbf{x}\rangle_{част.\,неодн.}$ – деякий розв'язок системи (1) (його називають ***частинним розв'язком***). Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи (1) визначається наступною формулою:

$$|\mathbf{x}\rangle_{заг.\,неодн.} = |\mathbf{x}\rangle_{част.\,неодн.} + \sum_{k=1}^{n-r} c^k \cdot |\mathbf{H}_k\rangle. \qquad (4)$$

Тут $c^k, k = \overline{1, n-r}$ – довільні сталі.

<u>**Приклад 2.**</u> Знайти загальний розв'язок системи: $\begin{cases} 4x^1 + x^2 - 2x^3 + x^4 = 3 \\ x^1 - 2x^2 - x^3 + 2x^4 = 2 \\ 2x^1 + 5x^2 - x^4 = -1 \\ 3x^1 + 3x^2 - x^3 - 3x^4 = 1 \end{cases}$

Будемо виконувати допустимі перетворення над рядками розширеної матриці системи, зводячи її до спрощеного вигляду:

$$(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -9 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Отже, $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = \operatorname{Rg}\mathbf{A} = 3$. Базисним мінором вважатимемо мінор $\mathbf{M}_{1,2,3}^{1,3,4}$. Отже, базисними змінними у нашому випадку будуть x^1, x^3, x^4, тоді x^2– незалежна змінна. Перетворимо тепер базисний мінор $\mathbf{M}_{1,2,3}^{1,3,4}$ допустимими перетвореннями рядків на одиничну матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{9}{2} & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Запишемо рівняння, що відповідають спрощеній системі, та знайдемо залежність базисних змінних від незалежної змінної:

$$\begin{cases} x^1 + \frac{5}{2}x^2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2}x^2 + x^3 = -\frac{5}{2} \\ x^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}x^2 \\ x^3 = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}x^2 \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи (1) визначимо, надавши довільного значення вільній змінній, наприклад, $x^2 = 0$. Тоді $|\mathbf{x}\rangle^T_{част.неодн.} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{5}{2}; 0\right)$. Оскільки $n = 4,\ r = 3$, фундаментальна система розв'язків зведеної однорідної системи (2) складається з одного вектора, наприклад, при $x^2 = 2$: $|\mathbf{H}_1\rangle^T = (-5; 2; -9; 0)$. Отже, $|\mathbf{x}\rangle_{заг.неодн.} = |\mathbf{x}\rangle_{част.неодн.} + c\cdot|\mathbf{H}_1\rangle$, тобто $|\mathbf{x}\rangle_{заг.неодн.} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}^T + c\cdot\begin{pmatrix} -5 & 2 & -9 & 0 \end{pmatrix}^T$, де c – довільна стала.

<u>**Приклад 3.**</u> Знайти загальний розв'язок системи: $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -2x - 2y + 4z = -2 \end{cases}$

Неважко зрозуміти, що ранг цієї системи рівний 1, отже, простір розв'язків цієї системи має розмірність 2, і власне, описується рівнянням площини $x + y - 2z = 1$. Використаємо очевидність цього прикладу, щоб зробити більш наочною структуру загального розв'язку. Маємо: $|x, y, z\rangle^T_{част.неодн.} = (2; 1;\ 1)$, фундаментальна система розв'язків складається з векторів $|\mathbf{H}_1\rangle^T = (1;\ -1; 0)$ та $|\mathbf{H}_2\rangle^T = (2;\ 0; 1)$, отже, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{заг.неодн.} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Зверніть увагу, вектори $|\mathbf{H}_1\rangle$ та $|\mathbf{H}_2\rangle$ є базисом двовимірного підпростору – площини $x + y - 2z = 0$, паралельної площині $x + y - 2z = 1$, яка визначена системою. Вектор же $(2; 1;\ 1)$

забезпечує зсув цієї площини відносно першої. Таким чином, розв'язки неоднорідної системи не утворюють лінійного простору, проте можуть бути одержані з лінійного простору, породженого зведеною однорідною системою, «зсувом» на деякий вектор, що належить множині розв'язків неоднорідної системи.

Лекція 7. Поняття про лінійний оператор. Власні числа та власні вектори лінійного оператора.

1. Поняття про лінійний оператор.

Нехай L_n – деякий лінійний (векторний) простір. Розглянемо відображення цього простору: $A: L_n \to L_n$, тобто закон, по якому кожному вектору $\mathbf{x} \in L_n$ ставиться у відповідність деякий вектор $\mathbf{y} \in L_n$: $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Таке відображення називається ***оператором***.

Зауваження. Якщо $L_n = \mathbf{R}$, то оператор – це просто функція у просторі $\mathbf{R}$.

Означення 1. Оператор $A: L_n \to L_n$, називається ***лінійним оператором*** у просторі L_n, якщо

1. $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in L_n, \forall \mathbf{y} \in L_n$; (1)
2. $A\lambda\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in L_n, \forall \lambda \in \mathbf{R}$. (2)

Означення 2. ***Образом (множиною значень)*** лінійного відображення $A: L_n \to L_n$ називається множина $\operatorname{Im} A = \{\mathbf{y} \in L_n : \exists \mathbf{x} \in L_n,\ A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.

Означення 3. ***Ядром*** лінійного відображення $A: L_n \to L_n$ називається множина $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{x} \in L_n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

Неважко переконатись (зробіть це самостійно!), що множини $\operatorname{Im} A$ та $\operatorname{Ker} A$ є підпросторами простору L_n. Крім того, розмірності цих підпросторів пов'язані, як визначено у наступній теоремі:

Теорема 1. Нехай $A: L_n \to L_n$ – лінійний оператор. Тоді

$$\dim(\operatorname{Im} A) + \dim(\operatorname{Ker} A) = \dim(L_n) = n .$$

Приклади.

1. Нехай $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \forall \mathbf{x} \in L_n$. Неважко переконатись, що це лінійний оператор в просторі L_n. Його називають нуль-оператором. Неважко зрозуміти, що $\operatorname{Im} A = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Ker} A = L_n$.

2. Нехай $A\mathbf{x} = \mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in L_n$. Тоді $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y} = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$; $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} \ \forall \lambda \in \mathbf{R}$. Цей лінійний оператор називають ***тотожним*** і позначають E. Для тотожного оператора: $\operatorname{Im} A = L_n$, $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$

3. Визначимо для деякого числа $\alpha \in \mathbf{R}$ оператор $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in L_n$. Очевидно, що обидві умови лінійності виконані. Цей лінійний оператор називають ***оператором гомотетії***.

У загальному випадку для того, щоб задати лінійний оператор, зручно мати правило, згідно якому по відомим координатам вектора $\mathbf{x} \in L_n$ можна одержати значення координат вектора $\mathbf{y} \in L_n$. Отже, виберемо деякий базис $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ у просторі L_n. Нехай $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \mathbf{f}_i$, $\mathbf{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \mathbf{f}_i$. Крім того, необхідно визначити дію лінійного оператору A на базисні вектори:

$$\begin{cases} A\mathbf{f}_1 = a_1^1\mathbf{f}_1 + a_1^2\mathbf{f}_2 + \cdots + a_1^n\mathbf{f}_n \\ A\mathbf{f}_2 = a_2^1\mathbf{f}_1 + a_2^2\mathbf{f}_2 + \cdots + a_2^n\mathbf{f}_n \\ \qquad\qquad \vdots \\ A\mathbf{f}_n = a_n^1\mathbf{f}_1 + a_n^2\mathbf{f}_2 + \cdots + a_n^n\mathbf{f}_n \end{cases}$$

або
$$A\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \mathbf{f}_i \text{ , де } \quad j = 1,\ldots,n. \tag{3}$$

З вектор-стовпчиків координат векторів $A\mathbf{f}_j$, $j = 1,\ldots,n$ можна утворити квадратну матрицю порядку n: $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$. Вона називається матрицею лінійного оператора A в базисі $\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n\}$. Таким чином, у вибраному базисі кожному лінійному відображенню відповідає певна квадратна матриця порядку n. Справедливо і навпаки: для будь-якої квадратної матриці порядку n існує лінійний оператор в простору L_n.

Наслідок. Якщо $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, де $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{f}_i$, а $\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{f}_k$, то, знаючи матрицю $\mathbf{A} = \left(a_i^k\right)_{i,k=\overline{1,n}}$, лінійного відображення A в базисі $\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n\}$, можемо записати:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i A\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{k=1}^{n} a_i^k \mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^k x^i \mathbf{f}_k ,$$

а враховуючи однозначність розкладу вектору $\mathbf{y}$ по базису $\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n\}$, одержимо:

$$y^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k x^i,\ k = 1,\ldots,n \text{ , або: } \qquad \left|\mathbf{y}\right\rangle = \mathbf{A}\cdot\left|\mathbf{x}\right\rangle, \tag{4}$$

тобто дія відображення A на довільний вектор $\mathbf{x}$ зводиться до множення матриці $\mathbf{A}$ лінійного відображення на координатний стовпчик цього вектора.

Приклади.

1. Розглянемо оператор A лінійного проектування геометричних векторів простору $\mathbf{R}^3$ на площину XOY. Якщо використати за базисні вектори $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ ПДСК, то дію оператора A на базисні вектори, очевидно, маємо визначити наступним чином: $A(\mathbf{i}) = \mathbf{i}, A(\mathbf{j}) = \mathbf{j}, A(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$. Отже, матрицею лінійного проектування в цьому базисі буде матриця $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ядром цього оператора є вісь OZ, тобто $\dim(\mathrm{Ker}\, A) = 1$.

2. Знайти матрицю цього ж оператора в базисі $\mathbf{f}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{f}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{f}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Розглянемо образи базисних векторів: $A(\mathbf{f}_1) = A(\mathbf{i}) = \mathbf{i} = \mathbf{f}_1$, $A(\mathbf{f}_2) = A(\mathbf{j}) = \mathbf{j} = \mathbf{f}_2$, $A(\mathbf{f}_3) = A(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$. Таким чином, матриця цього перетворення в базисі $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ є такою: $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Перетворення матриці лінійного відображення при заміні базисів просторів.

Нехай, як і раніше, $A: L_n \to L_n$ – лінійне відображення, а $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right),\ i, j = \overline{1,n}$ – матриця цього оператора в деяких базисі $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$. Розглянемо деякий інший базис $\{\mathbf{f}_1', \ldots, \mathbf{f}_n'\}$ простору L_n з матрицею $\mathbf{T} = \left(t_j^i\right),\ i, j = \overline{1,n}$ переходу до нього, що означає, що базисні вектори пов'язані співвідношеннями: $\mathbf{f}_j' = \sum_{i=1}^{n} t_j^i \mathbf{f}_i,\ j = \overline{1,n}$. Знайдемо вираз для матриці $\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\widetilde{a}_i^k\right),\ i, j = \overline{1,n}$ лінійного оператора A в базисі $\{\mathbf{f}_1', \ldots, \mathbf{f}_n'\}$. Для цього розглянемо довільний вектор $\mathbf{x} \in L_n$ з координатами $\left|\mathbf{x}\right\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ та $\left|\mathbf{x}'\right\rangle = \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$ відповідно у базисах $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ та $\{\mathbf{f}_1', \ldots, \mathbf{f}_n'\}$. Нехай його образом є вектор $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ з координатами $\left|\mathbf{y}\right\rangle = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$ та $\left|\mathbf{y}'\right\rangle = \begin{pmatrix} y'^1 \\ \vdots \\ y'^n \end{pmatrix}$ відповідно. Зауважимо, що зв'язок старих та нових координат векторів, що розглядаються, виражається наступним чином: $\left|\mathbf{x}\right\rangle = \mathbf{T}\left|\mathbf{x}'\right\rangle$, $\left|\mathbf{y}\right\rangle = \mathbf{T}\left|\mathbf{y}'\right\rangle$. Підставивши ці вирази у формулу (4), одержимо: $\mathbf{T}\left|\mathbf{y}'\right\rangle = \mathbf{A}\mathbf{T}\left|\mathbf{x}'\right\rangle$, або $\left|\mathbf{y}'\right\rangle = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\left|\mathbf{x}'\right\rangle$, оскільки матриця переходу завжди має обернену. Але за означенням матриці $\widetilde{\mathbf{A}}$, маємо $\left|\mathbf{y}'\right\rangle = \widetilde{\mathbf{A}}\left|\mathbf{x}'\right\rangle$, тобто

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}, \qquad (5)$$

оскільки матриця лінійного відображення для будь-якого базису визначається однозначно. Формула (5) як раз і виражає шуканий зв'язок між матрицями лінійних операторів в різних базисах простору L_n.

Таким чином, при переході до нового базису матриця лінійного оператора змінюється за формулою (5).

Означення 4. Матриці, пов'язані співвідношенням (5), де $\mathbf{T}$ – деяка неособлива матриця, називаються ***подібними*** з матрицею подібності $\mathbf{T}$.

Наслідок. Матриці лінійного оператора в різних базисах – подібні між собою.

3. Знайти ядро та базис образу лінійного оператора A, який в деякому базисі простору геометричних векторів задається матрицею $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

► Вектор $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \left|\mathbf{x}\right\rangle = \left|\mathbf{0}\right\rangle$, тобто $\mathbf{x}$ – це розв'язок однорідної системи рівнянь з матрицею $\mathbf{A}$. Знайдемо всі розв'язки цієї системи методом Гауса:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\left|\mathbf{A}\right| = 1$, дана однорідна система рівнянь має лише тривіальний розв'язок, отже, $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$. З теореми **1** випливає, що $\dim(\operatorname{Im} A) = 3$, а тому базисом образу заданого лінійного оператора A може бути довільний базис простору, наприклад $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.◄

3. Власні числа та власні вектори лінійного оператора.

Нехай L_n – лінійний простір, в якому діє лінійний оператор A: $A: L_n \to L_n$.

Означення 5. Ненульовий вектор $\mathbf{x} \in L_n$ називається ***власним вектором, який відповідає (належить) власному числу (значенню)*** λ, лінійного оператора A, якщо

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (6)$$

Наступне питання, яке нам належить вирішити, – як відшукати власні числа та вектори лінійного оператора. Рівняння (6) можна записати у вигляді: $A\mathbf{x} = \lambda E\mathbf{x}$, або

$$(A - \lambda E)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (7)$$

Тобто множина власних векторів, що відповідають даному власному числу λ, є ядром оператора $A - \lambda E$. Рівняння (7) еквівалентне, як було показано раніше, матричному рівнянню

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot |\,\mathbf{x}\rangle = \mathbf{0}, \qquad (8)$$

де $\mathbf{A}$ – матриця лінійного оператора A в тому ж базисі $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, в якому дані координати вектора $\mathbf{x}$. Рівність (8) є однорідною системою n лінійних рівнянь з n невідомими координатами власного вектора $\mathbf{x} \in L_n$, заданими в тому ж базисі:

$$\begin{cases} (a_1^1 - \lambda)x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = 0 \\ a_1^2 x^1 + (a_2^2 - \lambda)x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \cdots + (a_n^n - \lambda)x^n = 0 \end{cases} \qquad (8^1)$$

Згідно з означенням **5**, шуканий вектор $\mathbf{x}$ не рівний нулю. Такий вектор існує тоді і тільки тоді, коли визначник системи (8) рівний нулю:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_n = 0 \qquad (9)$$

<u>**Означення 6.**</u> Рівняння (9) носить назву ***характеристичного рівняння***, а його ліва частина називається ***характеристичним поліномом*** матриці $\mathbf{A}$. Неважко визначити коефіцієнти характеристичного полінома $P_n(\lambda)$, зокрема, $p_n = |\mathbf{A}|,\ p_1 = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{A}$, де $\mathrm{Sp}\,\mathbf{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^i$.

<u>**Зауваження.**</u>

1. Рівняння (9) є рівнянням n–го порядку відносно λ, а отже, не завжди має корені над полем дійсних чисел, проте завжди має корені над полем комплексних чисел.

2. Характеристичне рівняння та характеристичний поліном визначені через матрицю $\mathbf{A}$ лінійного оператора, вигляд якої, як нам відомо, залежить від вибору базису простору L_n. Наступна теорема демонструє, що насправді і характеристичне рівняння, і характеристичний поліном повністю визначаються ***лише самим оператором*** A.

<u>**Теорема 2.**</u> Характеристичне рівняння (9) <u>не залежить від вибору базису</u>, в якому визначена матриця $\mathbf{A}$ лінійного оператора A.

<u>**Теорема 3.**</u> Нехай лінійний оператор $A: L_n \to L_n$ має n попарно різних власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тоді існує базис лінійного простору, що складається із власних векторів оператора A, в якому матриця оператора має діагональний вид. (Кажуть, що матриця лінійного оператора діагоналізується).

4. Алгоритм відшукання власних чисел та власних векторів лінійного оператора.

Нехай $\mathbf{A}$ – матриця лінійного оператора A, що діє в лінійному просторі L_n над полем дійсних чисел, в деякому базисі цього простору. Для відшукання власних чисел та власних векторів даного лінійного оператора діє наступний алгоритм.

1. Складаємо характеристичне рівняння $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$.

2. Шукаємо спектр оператора – дійсні розв'язки цього рівняння, якщо вони існують. (Якщо дійсних розв'язків немає, то не існуватиме і власних векторів з дійсними координатами.)

3. Для кожного значення спектру розв'язуємо систему (8), яка визначає координати власних векторів, що належать даному власному числу.

4. Якщо кількість так визначених лінійно незалежних власних векторів рівна розмірності простору, то можна стверджувати, що матриця $\mathbf{A}$ лінійного оператора приводиться до діагонального виду в новому базисі із власних векторів (іншими словами вона подібна діагональній матриці $\mathbf{D}$, у якої на діагоналі розташовані власні числа). Матрицею переходу $\mathbf{T}$, до цього нового базису є <u>матриця</u>, <u>стовпчики якої складені із координат власних векторів, розташованих у порядку, що відповідає власним числам</u>.

<u>Приклади.</u>

1. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора, який в деякому базисі задається матрицею $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

► Складаємо характеристичне рівняння:

$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2-4=\lambda^2-8\lambda+12=0$, звідки знаходимо власні числа: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=6$.

Шукаємо власні вектори, що належать цим власним числам.

Система (8) для $\lambda_1=2$ набуває вигляду: $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, звідки маємо $x^1+x^2=0$, а тому першим власним вектором є вектор $\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

Далі, система (8) для $\lambda_2=6$ набуває вигляду: $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, звідки маємо $x^1-x^2=0$, отже, другим власним вектором є вектор $\mathbf{f}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.◄

Таким чином, доходимо висновку, що матриця даного оператора в базисі $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\}$ подібна до матриці $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ з матрицею подібності $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ – матриця переходу від вихідного базису до базису $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\}$: $\mathbf{D}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}^{-1}$.

2. З’ясувати, чи приводиться до діагонального вигляду матриця $\mathbf{A}$ деякого лінійного оператора, де $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}$. Знайти цю діагональну матрицю, якщо вона існує.

► Складаємо характеристичне рівняння:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 8\\ 3 & -1-\lambda & 6\\ -2 & 0 & -5-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(1+\lambda)(5+\lambda)-16(1+\lambda)=-(1+\lambda)^3=0,$$

звідки знаходимо єдине власне число: $\lambda=-1$.

Із системи (8) знайдемо власні вектори, що належать цьому власному числу: $\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 3 & 0 & 6\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, звідки маємо: $x^1+2x^3=0$. Ця система має два лінійно незалежних розв’язки: $\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ та $\mathbf{f}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$. Ці два вектори утворюють базис двовимірного інваріантного підпростору власних векторів, але в жодному базисі матриця даного лінійного оператора не є подібною до діагональної, оскільки власних векторів не вистачає для вибору базису. ◄

3. Визначити власні вектори лінійного оператора, який задається матрицею $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}$

► Складаємо характеристичне рівняння:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)=0,$$

звідки знаходимо власні числа: $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

Оскільки маємо три різних власних числа, то матриця лінійного оператора подібна до діагональної. Розв’яжемо систему (8) для кожного значення спектру.

Нехай $\lambda_1=-1$: $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, звідки маємо: $x^1=x^2=0$. Отже, система має один розв’язок, наприклад: $\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

Нехай $\lambda_2 = 1$: $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, звідки маємо: $x^1 = -x^3, x^2 = 0$.

Значенню $\lambda_2 = 1$ відповідає один вектор, наприклад: $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Нехай $\lambda_3 = 2$: $(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, звідки маємо: $x^1 = 2x^2, x^3 = -2x^2$.

Одержимо третій власний вектор: $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Отже, в базисі з власних векторів $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, матриця заданого лінійного оператора – діагональна: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, матрицею переходу до цього власного базису є $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. ◄

Практичне заняття 1. Матриці. Визначник квадратної матриці. Системи лінійних рівнянь, теорема Крамера.

Завдання для аудиторної роботи.

1. Знайти значення матричних виразів $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ та $-\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ для заданих матриць: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
2. Знайти добутки матриць $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ та $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ з попереднього прикладу.
3. Знайти добутки матриць $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ та $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$, де матриця $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
4. Обчислити визначники:

   а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & x \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg}\alpha \\ -\operatorname{tg}\alpha & 1 \end{vmatrix}$; *г)* $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; *є)* **(*)** $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$;

5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, розкривши його по другому рядку.
6. Розв'язати систему за формулами Крамера:
$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 5x+2y=12 \end{cases}$$
7. Розв'язати систему за формулами Крамера:
$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -x+y+5z=16 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$$
8. **(*)**Дослідити систему та визначити її розв'язки в залежності від значення параметра λ:
$$\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи.

9. Знайти значення матричного виразів $\mathbf{A}-2\mathbf{B}$ та $-\mathbf{A}+3\mathbf{B}$ для заданих матриць: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & -2a \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
10. Знайти добутки матриць $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ та $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ з попереднього прикладу.
11. Знайти добутки матриць $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T$ та $\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}$, де матриця $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
12. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} r & s \\ t & r \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; *г)* $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_b a \\ \log_b a & \log_a b \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; *є)* **(*)** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$;

13. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$, розкривши його по другому стовпчику.
14. **(*)**Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, розкривши його по елементах

рядка, що містить букву.

15. (*)Числа 143, 312 та 273 діляться на 13. Довести, що визначник $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ також ділиться на 13.
16. Розв'язати систему за формулами Крамера:
$$\begin{cases} 3t + 2s = 1 \\ 7t - 3s = 10 \end{cases}$$
17. Розв'язати систему за формулами Крамера:
$$\begin{cases} -x - 2y + 5z = -8 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = -7 \end{cases}$$
18. (*)Дослідити систему та визначити її розв'язки в залежності від значення параметра μ:
$$\begin{cases} (\mu + 3)x + y + 2z = \mu \\ \mu x + (\mu - 1)y + z = 2\mu \\ 3(\mu + 1)x + \mu y + (\mu + 3)z = 5 \end{cases}$$

Практичне заняття 2. Геометричні вектори, лінійні операції з ними. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів.

Завдання для аудиторної роботи.

19. Знайти орт вектора $\mathbf{a} = \{2,-5,-1\}$.
20. Вектор $\mathbf{a}$ складає з координатними осями OX та OY кути, рівні відповідно 120^0 та 60^0. Визначити його координати, якщо $|\mathbf{a}| = 6$.
21. (*)Знайти модуль суми та різниці векторів $\mathbf{a} = \{-1,2,3\}$ та $\mathbf{b} = \{2,4,-1\}$.
22. Три сили $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ та $\mathbf{Q}$ прикладені до однієї точки та діють у взаємно перпендикулярних напрямках. Знайти величину їх рівнодіючої сили $\mathbf{S}$, якщо відомо, що: $|\mathbf{F}| = 10\,k\Gamma, |\mathbf{P}| = 11\,k\Gamma, |\mathbf{Q}| = 2\,k\Gamma$.
23. (*)Задані вектори $\mathbf{a} = \{-2,1,1\}$, $\mathbf{b} = \{1,3,-2\}$ та $\mathbf{c} = \{4,-2,0\}$. Знайти розклад вектора $\mathbf{d} = \{3,2,-1\}$ по базису $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.
24. (*)До деякої точки прикладені вектори $\mathbf{a} = \{2,-6,3\}$ та $\mathbf{b} = \{-2,2,-1\}$. Знайти вектор $\mathbf{c}$, напрямлений по бісектрисі кута між ними, якщо відомо, що $|\mathbf{c}| = 21$.
25. Вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ утворюють кут $2\pi/3$. Відомо, що $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$. Знайти $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$.
26. Дані вектори $\mathbf{p} = \{1,2,3\}$ та $\mathbf{q} = \{-3,2,2\}$. Знайти а) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, б) $(2\mathbf{p} - \mathbf{q})^2$, в) $\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2}$.

27. Відомі вершини трикутника: $A(1,-1,0)$, $B(-2,0,1)$, $C(0,3,2)$. Знайти його внутрішній та зовнішній кути при вершині A.
28. Для векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ із задачі 25 знайти а) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, б) $((\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}))^2$.
29. Для векторів $\mathbf{p}$ та $\mathbf{q}$ із задачі 26 знайти а) $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$, б) $(2\mathbf{p}-\mathbf{q})\times(\mathbf{p}+\mathbf{q})$,в) $((\mathbf{p}-\mathbf{q})\times(\mathbf{p}-\mathbf{q}))^2$.
30. Обчислити площу трикутника ABC із задачі 27.
31. Відомо, що вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ утворюють кут $\pi/6$, а вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярний до них обох. Знайти $\mathbf{abc}$, якщо $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=1$, $|\mathbf{c}|=4$.
32. Визначити, правою чи лівою є трійка векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ із задачі 23.
33. Перевірити, чи належать одній площині точки $A(0,1,1)$, $B(1,-1,2)$, $C(2,-1,1)$ та $D(3,1,-2)$.

Завдання для самостійної роботи.

34. Вектор $\mathbf{a}$, довжина якого рівна 7, складає з координатними осями OX, OY та OZ рівні кути. Визначити його координати.
35. Задані вектори $\mathbf{p}=\{1,2,3\}$, $\mathbf{q}=\{0,-1,-2\}$ та $\mathbf{r}=\{3,1,0\}$. Знайти розклад вектора $\mathbf{d}=\{7,5,5\}$ по базису $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$.
36. До деякої точки прикладені вектори $\mathbf{a}=\{3,-2,-6\}$ та $\mathbf{b}=\{-1,2,-2\}$. Знайти вектор $\mathbf{c}$, напрямлений по бісектрисі їх зовнішнього кута, якщо відомо, що $|\mathbf{c}|=\sqrt{42}$.
37. Кут між векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ рівний 45^0. Відомо, що $|\mathbf{a}|=\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}|=3$. Знайти $(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$, $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$.
38. Знайти а) $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$, б) $(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2$, в) $(3\mathbf{p}-2\mathbf{q})^2$ для векторів $\mathbf{p}=\{-1,2,1\}$ та $\mathbf{q}=\{2,-3,1\}$.
39. Знайти зовнішній та внутрішній кути при вершині C трикутника ABC із задачі 27.
40. Для векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ із задачі 37 знайти а) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, б) $((\mathbf{a}-2\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+\mathbf{b}))^2$.
41. Для векторів $\mathbf{p}$ та $\mathbf{q}$ із задачі 38 знайти а) $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$, б) $(\mathbf{p}-\mathbf{q})\times(\mathbf{q}+\mathbf{p})$.
42. Обчислити площу паралелограма $ABCD$, три вершини якого знаходяться у точках $A(1,1,1)$, $B(0,-1,2)$, $C(3,-2,5)$.
43. Визначити, правою чи лівою є трійка векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ із задачі 35.
44. Знайти об'єм тетраедра із вершинами $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,2)$, $C(3,-2,5)$.

Практичне заняття 3. Площина та пряма.

Завдання для аудиторної роботи.

45. Точка $Q(-1,-2,1)$ – основа перпендикуляра, проведеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.
46. Перевірити, чи будуть перпендикулярними площини: а) $2x-2y+z+1=0$ та $x+3y+4z-2=0$; б) $x+y-5z+10=0$ та $6x-y+z-1=0$.

47. Визначити, при яких значеннях параметрів α та β наступні пари площин будуть паралельними: а) $\alpha x+2y-5z-2=0$ та $3x-6y+\beta z+4=0$; б) $2x+(\alpha-1)y-z+3=0$ та $(\beta+2)x-3y+z=0$.
48. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат паралельно векторам $\mathbf{a}=\{5,-1,2\}$ та $\mathbf{b}=\{1,3,-1\}$.
49. Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки: $M_1(1,1,4)$, $M_2(0,-1,1)$, $M_3(2,-1,3)$.
50. (*)Довести, що три наступні площини проходять через одну пряму: $x-y+2z-1=0$; $2x+y-3z+2=0$; $4x-y+z=0$.
51. Привести наступні рівняння площин до нормального вигляду: а) $x-2y+2z+1=0$ б) $6x-2y+3z-5=0$ в) $3x-4z+2=0$.
52. Визначити відстань та відхилення точки $M_0(-1,-2,3)$ від кожної з площин із задачі 51 .
53. (*)Визначити, чи перетинає площина $x+y+z+5=0$ відрізок PQ, де $P(1,-2,1)$, $Q(-1,-5,0)$.
54. Скласти канонічне рівняння прямої $x-y+2z-3=0$; $2x+y-z=0$.
55. Довести перпендикулярність наступних прямих: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{1}$ та $3x+y-z-1=0$; $x-2y+2z+2=0$.
56. (*)Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $x-y+z-2=0$ та $4x+y-3z-2=0$ паралельно вектору $\mathbf{u}=\{1,1,1\}$.
57. (*)Визначити, у тупому чи гострому двогранному куті, утвореному перетином площин $2x-2y+z-1=0$ та $x+y-3z+2=0$ лежить початок координат.
58. Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{1}$ та площини $x+y+z+5=0$.
59. (*)Знайти проекцію Q_0 точки $Q(-1,-1,1)$ на площину $2x-y+z-6=0$.

<u>Завдання для самостійної роботи.</u>

60. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\mathbf{l}=\{-2,1,1\}$.
61. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(0,-3,1)$ паралельно до вектора $\mathbf{l}=\{2,2,-1\}$.
62. Визначити двогранний кут між площинами $x-y+2z-5=0$ та $2x+y-3z-2=0$.
63. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-1,2,-1)$ паралельно площині XOZ.
64. Для кожної з наступних площин визначити кути, які утворює їх нормаль з координатним осями та відстань від початку координат до площини а) $2x+2y-z+9=0$ б) $2x+11z-5=0$.
65. Обчислити відстань між паралельними площинами $x-2y+3z-2=0$ та $2x-4y+6z+5=0$.

66. Довести перпендикулярність наступних прямих: $x-2y+2=0$; $x-2z-2=0$ та $x-2y-3z-1=0$; $2x+y+z+3=0$.

67. (*)Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $5x-y+2z-1=0$ та $x+2y-z-2=0$ перпендикулярно площині $x+y-3z-1=0$.

68. (*)Визначити, у тупому чи гострому двогранному куті, утвореному перетином площин $x-2y+z-1=0$ та $3x+2y+3z+5=0$ лежить точка $M(1,2,1)$.

Практичне заняття 4. Криві другого порядку.

Завдання для аудиторної роботи.

69. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його менша вісь рівна 2, а відстань між директрисами рівна $20/3$.

70. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між його фокусами рівна 8, а відстань між директрисами рівна $17/2$.

71. Для еліпса, заданого рівнянням $16x^2+25y^2=400$, записати його: а) півосі; б) відстань між фокусами; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

72. (*)Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1$, відстань яких до правого фокуса рівна 23.

73. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо додатково відомо, що а) відстань між її фокусами рівна 20, а асимптотами є прямі $y=\pm 3/4x$;

    б) відстань між її фокусами рівна 6, а відстань між директрисами рівна $16/3$.

74. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між її вершинами рівна 4, а асимптотами є прямі $y=\pm x/\sqrt{3}$.

75. Для гіперболи, заданої рівнянням $x^2-8y^2=32$, записати її: а) півосі; б) відстань між фокусами; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис; ґ) рівняння асимптот.

76. (*)Переконатись, що точка $M\left(-27/5, 8\sqrt{14}/5\right)$ лежить на гіперболі $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ та визначити довжини її фокальних радіусів.

77. Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, про яку додатково відомо, що

    а) парабола розташована в лівій півплощині, симетрично відносно осі абсцис, а її параметр рівний 4;

б) парабола розташована у нижній півплощині, симетрично відносно осі ординат, а відстань між її вершиною та директрисою рівна 1.

78. Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, якщо відомо, що вона розташована симетрично відносно осі абсцис та проходить через точку $M(-10,-5)$.
79. Визначити фокус та рівняння директриси параболи $x^2=12y$.
80. На параболі $y^2=-8x$ знайти точки, фокальний радіус яких рівний 10.
81. (*)Скласти рівняння параболи, якщо відомий її фокус $F(-2,1)$ та директриса $x+4=0$.
82. (*)Наступні рівняння привести до канонічного вигляду, визначити тип кривої та схематично зобразити її розташування відносно нової та старої систем координат:

а) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$;

б) $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$

в) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$

<u>Завдання для самостійної роботи.</u>

83. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його більша вісь рівна 8, а відстань між директрисами рівна $32/3$.
84. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо його менша вісь рівна 16, а ексцентриситет рівний $3/5$.
85. Для еліпса, заданого рівнянням $16x^2+y^2=16$, записати його: а) півосі; б) відстань між фокусами; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.
86. (*)Визначити точки еліпса $2x^2+9y^2=18$, відстань яких до лівого фокуса рівна 2.
87. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо додатково відомо, що а) відстань між її вершинами рівна 10, а асимптотами є прямі $y=\pm 2x$;

   б) її уявна вісь рівна $2\sqrt{5}$, а ексцентриситет рівний $3/2$.
88. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо додатково відомо, що відстань між її директрисами рівна $3\sqrt{5}$, а асимптотами є прямі $y=\pm\sqrt{3}x$.
89. Для гіперболи, заданої рівнянням $9x^2-16y^2=-144$, записати її: а) півосі; б) відстань між фокусами; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис; г) рівняння асимптот.
90. (*)На гіперболі $9x^2-16y^2=-144$ знайти точки, фокальний радіус яких рівний 10.
91. Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, про яку додатково відомо, що:

а) парабола розташована у правій півплощині, симетрично відносно осі абсцис, а її параметр рівний 3;
б) парабола розташована у верхній півплощині, симетрично відносно осі ординат, а відстань між її вершиною та директрисою рівна 5.

92. Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, якщо відомо, що вона розташована симетрично відносно осі ординат та проходить через точку $M(2,-8)$.

93. Визначити фокус та рівняння директриси параболи $y^2 = {}^4\!/_3\, x$.

94. (*)Скласти рівняння параболи, якщо відомий її фокус $F(3,-2)$ та директриса $y-2=0$.

Практичне заняття 5 Обернена матриця. Ранг матриці. Системи лінійних рівнянь (загальний випадок).

Завдання для аудиторної роботи.

95. Знайти обернені матриці для наступних: а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ г) (*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (Застосувати метод мінорів та метод Гаусса).

96. Знайти ранг наступних матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 11 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 41 & -12 & 1 & 13 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ в) (*) $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 14 & 15 & 16 \\ 15 & 20 & 21 & 22 \end{pmatrix}$

97. Знайти загальний розв'язок наступних систем лінійних однорідних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 12x_2 + 14x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ б) (*) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 11x_2 - 7x_3 - 14x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

98. Наступні системи лінійних неоднорідних рівнянь дослідити на сумісність та знайти їх загальний розв'язок:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$ б) (*) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$

Завдання для самостійної роботи.

99. Знайти обернені матриці для наступних:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\alpha \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ г) **(*)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (Застосувати метод мінорів та метод Гаусса).

100. Знайти ранг наступних матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ б) **(*)** $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

101. Знайти загальний розв'язок наступних систем лінійних однорідних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$ б) **(*)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 13x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 9x_5 = 0 \\ -x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$

102. Наступні системи лінійних неоднорідних рівнянь дослідити на сумісність та знайти їх загальний розв'язок:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 5x_4 = 4 \end{cases}$ б) **(*)** $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

Відповіді.

4. а) 10; б) $x^2 - y$; в) $\sec^2\alpha$; г) 0; д) 1; є) $2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc$ **5.** 0 **6.** $x = 2,\ y = 1$
7. $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ **8.** При $(\lambda - 1)\cdot(\lambda + 2) \neq 0$ $x = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2},\ y = \dfrac{1}{\lambda+2},\ z = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$; при $\lambda = 1$ $x = 1 - y - z$; при $\lambda = 2$ система несумісна **12.** а) -5; б) $r^2 - ts$; в) $\sin(\alpha - \beta)$; г) $\dfrac{\log_a^4 b - 1}{\log_a^2 b}$; д) -20; є) $(ab + bc + ca)x + abc$ **13.** -23 **14.** $3a - b + 2c - d$ **16.** $x = 1,\ y = -1$
17. $x = -1,\ y = 2,\ z = -1$ **18.** При $\mu\cdot(\mu - 1) \neq 0$ $x = -\dfrac{\mu^2 + 4\mu - 15}{\mu^2},\ y = \dfrac{\mu^2 + \mu + 15}{\mu^2}$, $z = \dfrac{-4\mu^2 + \mu + 15}{\mu^2}$; при $\mu = 1$ $x = 2 - z,\ y = -7 + 2z$; при $\mu = 0$ система несумісна
20. $\mathbf{a} = \{-3, 3, \pm 3\}$ **22.** 15 **23.** $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$ **24.** $\mathbf{c} = \{-4, -2, -1\}$ **27.** $\cos A = 9/\sqrt{231}$
30. $S_{ABC} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ **36.** $\mathbf{d} = \mathbf{p} - \mathbf{q} + 2\mathbf{r}$ **37.** $\mathbf{c} = \{4, -5, -1\}$ **44.** $V_{OABC} = 3$ *куб. од.*
48. $5x - 7y - 16z = 0$ **49.** $x + y - z + 2 = 0$ **53.** Так **54.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-5} = \dfrac{z}{-3}$

56. $2x+3y-5z+2=0$ **57.** У тупому куті **58.** $(-2{,}0{,}-3)$ **59.** $Q_0=(1.-2{,}2)$

61. $3x+y+8z-5=0$ **63.** $y-2=0$ **65.** $\dfrac{9}{2\sqrt{14}}$ **67.** $16x-y+5z-5=0$ **68.** У гострому куті **69.** $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ **70.** $x^2+\dfrac{y^2}{17}=1$ **72.** $\left(-10{,}\pm3\sqrt{5}\right)$ **73. а)** $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$ **б)** $\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$

74. $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ **76.** 6 та 12 **77. а)** $y^2=-8x$ **б)** $x^2=-4y$ **78.** $y^2=-\dfrac{5}{2}x$

79. $F(0,3)$, $y+3=0$ **80.** $(-8{,}\pm8)$ **81.** $(y-1)^2=4(x+3)$ **82. а)** гіпербола $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{1}=1$

б) еліпс $\dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{9}=1$ **в)** парабола $y'^2=2x'$ **83.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1$ **84.** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$

86. $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{7}},\ \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$ **87. а)** $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{100}=1$ **б)** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ **88.** $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{15}=-1$

90. $\left(\pm2\sqrt{12},\pm6\right)$; $\left(\pm\dfrac{4}{5}\sqrt{231},\pm\dfrac{48}{5}\right)$ **91. а)** $y^2=6x$ **б)** $x^2=10y$ **92.** $y^2=-\dfrac{x}{2}$

93. $F\left(\dfrac{1}{3},0\right)$, $x+\dfrac{1}{3}=0$ **94.** $(x-3)^2=4y$ **95. а)** $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix}\operatorname{tg}\alpha & -1\\ 1 & \operatorname{tg}\alpha\end{pmatrix}\cos^2\alpha$

в) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -8 & 2 & 1\end{pmatrix}$ **г)** $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ **96. а)** 2 **б)** 2 **в)** 2 **97. а)** $\begin{cases}x_1=-\dfrac{10}{7}x_3+x_4\\ x_2=\dfrac{9}{7}x_3\end{cases}$

б) $\begin{cases}x_1=-7x_2+4x_3+9x_4\\ x_5=10x_2-5x_3-13x_4\end{cases}$ **99. а)** $\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix}1 & 2 & -7\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix}5 & -1 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ **100. а)** 2 **б)** 2 **101. а)** $\begin{cases}x_1=-\dfrac{5}{3}x_2+\dfrac{8}{3}x_3\\ x_4=-\dfrac{11}{3}x_2+17\dfrac{8}{3}x_3\end{cases}$

б) $\begin{cases}x_1=16x_2+4x_4-10x_5\\ x_3=11x_2+3x_4-7x_5\end{cases}$

Зміст

Навчальне видання

Вища математика.
Аналітична геометрія та лінійна алгебра.

Методичний посібник для студентів напряму підготовки «Радіотехніка» радіофізичного факультету університету

Упорядник:

Єфіменко Світлана Володимирівна

Друкується за авторською редакцією

Підписано до друку ??.12.2011. Формат $60x80^{16}$.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний.
Наклад ?? примірників. Ум. друк. арк. 4,5.

Видавнича лабораторія радіофізичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка