КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

І. О. Ястремський

ЕВОЛЮЦІЯ КВАНТОВИХ СИСТЕМ У ЧАСІ

ПРИКЛАДИ ТА ЗАДАЧІ

Київ-2017

УДК 530.145
ББК 22.31я73

Рецензенти
канд. фіз.-мат. наук, доц. Максюта Микола Васильович
канд. фіз.-мат. наук, доц. Нетреба Андрій В'ячеславович

Затверджено вченою радою факультету радіофізики,
електроніки та комп`ютерних систем
(протокол № 5 від 12 лютого 2016 р.)

І. О. Ястремський

ЕВОЛЮЦІЯ КВАНТОВИХ СИСТЕМ У ЧАСІ. ПРИКЛАДИ ТА ЗАДАЧІ: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів.–К. 2017.-40 с.

У збірнику наведені задачі по розрахунку часової еволюції станів у квантово-механічних системах. До збірника увійшли як традиційні, так і задачі підвищеного рівня складності. Збірник містить короткі теоретичні відомості, приклади, задачі для самостійної роботи та математичний додаток. Збірник може бути використаний на семінарських заняттях з курсу "Квантова механіка". Збірник може бути рекомендований студентам, аспірантам та викладачам фізико–математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Зміст

Теоретичні відомості

Описати зміну станів квантово-механічних систем у часі можна декількома різними способами.

У **шредінгерівському представленні** зміна хвильової функції $\Psi(\mathbf{r},t)$ в часі описується нестаціонарним рівнянням Шредінгера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t)=\hat{H}\Psi(\mathbf{r},t), \qquad \text{(I)}$$

а оператори динамічних змінних (координати $\hat{\mathbf{r}}$, імпульсу $\hat{\mathbf{p}}$) від часу не залежать.

Так як (I) є рівняння першого порядку за часом, то для визначення еволюції $\Psi(\mathbf{r},t)$ достатньо знати $\Psi(\mathbf{r},t_0)$ у будь який конкретний момент часу t_0.

Помножаючи нестаціонарне рівняння Шредінгера (I) на Ψ^*, а комплексне спряжене рівняння (I) на Ψ, і далі віднімаючи їх, отримуємо рівняння неперервності

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(\mathbf{r},t)\right|^2+div\mathbf{j}=0, \qquad \text{(II)}$$

де

$$\mathbf{j}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\nabla\Psi^*-\Psi^*\nabla\Psi\right)$$

– густина струму ймовірності.

Якщо гамільтоніан не залежить явно від часу, то хвильова функція системи може бути записана у вигляді розкладу

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\sum_n c(E_n)e^{-iE_n t/\hbar}\Psi_{E_n}(\mathbf{r}) \tag{III}$$

за повною системою власних функцій $\Psi_{E_n}(\mathbf{r})$ гамільтоніану, що описує стаціонарні стани. Коефіцієнти $c(E_n)$ однозначно визначаються хвильовою функцією $\Psi(\mathbf{r},t=0)$ в початковий момент часу, а саме

$$c(E_n)=\int \Psi^*_{E_n}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r},t=0)dV\,. \tag{IV}$$

Якщо деякій фізичній величині f ставиться у відповідність квантово-механічний оператор $\hat{f}\equiv f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}},t)$, то оператор, який відповідає фізичній величині $\dot{f}\equiv df/dt$ (похідна за часом), визначається співвідношенням

$$\hat{\dot{f}}\equiv\dot{\hat{f}}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{f}\right]. \tag{V}$$

Фізичну величину, для якої $\dot{\hat{f}}=0$, називають інтегралом руху.

Часова функція Гріна $G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')$ задовольняє часовому рівнянню Шредінгера за змінними $\mathbf{r},t$ за початкової умови

$$G(\mathbf{r},t=t',\mathbf{r}',t')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,.$$

Іншими словами, функція Гріна $G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')$ описує часову еволюцію хвильового пакету, який у момент часу $t=t'$ локалізований у точці $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$. Функція Гріна дозволяє виразити хвильову функцію у довільний момент часу через хвильову функцію при $t=0$

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\int G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',0)\Psi(\mathbf{r}',t=0)dV'. \qquad \text{(VI)}$$

Якщо гамільтоніан не залежить явно від часу, то функція Гріна буде наступною (для неперервного спектру підсумовування необхідно замінити на інтегрування):

$$G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')=\sum_n e^{-iE_n(t-t')/\hbar}\Psi_{E_n}(\mathbf{r})\Psi^*_{E_n}(\mathbf{r}'). \qquad \text{(VII)}$$

У **гейзенбергівському представленні**, навпаки, від часу не залежить хвильова функція системи, а часова залежність операторів динамічних змінних визначається рівняннями

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}_\Gamma(t)=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{\mathbf{r}}_\Gamma(t)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{p}}_\Gamma(t)=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{\mathbf{p}}_\Gamma(t)\right], \qquad \text{(VIII)}$$

в яких гамільтоніан $\hat{H}(\hat{\mathbf{r}}_\Gamma(t),\hat{\mathbf{p}}_\Gamma(t),t)$, виражається вже через гейзенбергівські оператори $\hat{\mathbf{r}}_\Gamma(t),\hat{\mathbf{p}}_\Gamma(t)$. Тепер співвідношення (V) є вже не визначенням $\dot{\hat{f}}$, а безпосереднім наслідком (VIII).

Хвильові функції у шредінгерівському та гейзенбергівському представленнях пов’язані між собою унітарним співвідношенням

$$\Psi_{\text{Ш}}\left(\mathbf{r},\mathrm{t}\right)=\hat{U}\left(t\right)\Psi_{\Gamma}\left(\mathbf{r}\right).$$

Зазвичай, зв’язок між представленнями вводиться так, що у початковий момент часу $\mathrm{t}=0$ $\Psi_{\Gamma}\left(\mathbf{r}\right)=\Psi_{\text{Ш}}\left(\mathbf{r},\mathrm{t}=0\right)$, а оператори в обох представленнях співпадають $\hat{A}_{\Gamma}\left(0\right)=\hat{A}_{\text{Ш}}$. Якщо гамільтоніан не залежить явно від часу, то $\hat{U}\left(t\right)=\exp\left\{-i\hat{H}t/\hbar\right\}$ і співвідношення між операторами у цих представленнях має вигляд

$$\hat{f}_{\Gamma}\left(t\right)=e^{i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{f}_{\text{Ш}}e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,. \qquad \text{(IX)}$$

Приклади

П.1. Знайти загальний розв'язок одновимірного нестаціонарного рівняння Шредінгера для вільної частинки.

Розв'язок. Для вільної частинки $V(x,t)=0$ і нестаціонарне рівняння Шредінгера набуває вигляду

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}.$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді добутку двох функцій

$$\psi(x,t)=X(x)T(t),$$

де $X(x)$ залежить лише від координати, а $T(t)$ лише від часу. Підставивши $\psi(x,t)$ у нестаціонарне рівняння Шредінгера і поділивши рівняння на $X(x)T(t)$, маємо

$$\frac{i\hbar}{T}\frac{dT}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2mX}\frac{d^2X}{dx^2}.$$

Оскільки ліва частина рівняння залежить від часу а права від координати, то рівняння можна задовольнити, якщо прирівняти обидві частини до константи γ, тобто маємо

$$\frac{i\hbar}{T}\frac{dT}{dt}=\gamma,$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{2m\gamma}{\hbar^2}X=0\,.$$

Після позначення $k^2=2m\gamma/\hbar^2$ частинний розв'язок для хвильової функції шукаємо у вигляді

$$\psi(x,t)=X(x)T(t)=e^{ikx}e^{-i\hbar k^2t/2m}\,.$$

Так як хвильова функція має бути скінченою при $|x|\to\infty$, число k є дійсним. Цей частинний розв'язок описує хвилю де Бройля з одиничною амплітудою та з хвильовим числом k. Загальний розв'язок нестаціонарного рівняння Шредінгера для вільної частинки є суперпозицією хвиль де Бройля з довільними хвильовими числами k та амплітудами $A(k)$, а саме

$$\psi(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A(k)e^{ikx-i\hbar k^2t/2m}dk.$$

П.2. У момент часу $t=0$ хвильова функція вільної частинки має вигляд $\psi(x,0)=Ce^{-x^2/a^2+ik_0x}$. Розглянути еволюцію хвильової функції $\psi(x,t)$, густини ймовірності $\rho(x,t)$ та густини струму $j(x,t)$.

Розв'язок. Розподіл густини ймовірності $|\Psi(x,t=0)|^2$ в початковий момент часу схематично зображено на рис.1. Представимо $\psi(x,t)$ як суперпозицію хвиль де Бройля (див. П.1)

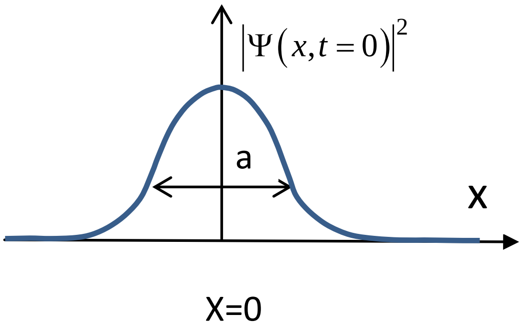

Рис. 1. Схематичне зображення густини ймовірності $\left|\Psi\left(x,t=0\right)\right|^2$ хвильового пакету при $t=0$.

$$\psi\left(x,t\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A\left(k\right)e^{ikx-i\hbar k^2 t/2m}dk\ .$$

Підставивши значення хвильової функції в момент часу $t=0$, знаходимо амплітуду $A\left(k\right)$:

$$A\left(k\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-x^2/a^2+ik_0x}e^{-ikx}dx=$$

$$=\frac{Ca}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{a^2\left(k-k_0\right)^2}{4}}.$$

Отже маємо

$$\psi(x,t)=\frac{Ca}{2\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(ikx-\frac{i\hbar k^2 t}{2m}-\frac{a^2k_0^2}{2}+a^2k_0k-\frac{a^2k^2}{2}\right)dk\ .$$

Виділивши повний квадрат і зробивши заміну

$$y=k\sqrt{1+\frac{i\hbar t}{ma^2}}-\frac{k_0+ix/a^2}{\sqrt{1+i\hbar t/ma^2}}\,,$$

зводимо шуканий інтеграл до табличного інтеграла Пуассона

$$\psi(x,t)=\frac{Ca}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+i\hbar t/ma^2}}e^{-\frac{a^2k_0^2}{2}}\times$$

$$\times\exp\left(\frac{a^2}{2}\frac{\left(k_0+ix/a^2\right)^2}{1+i\hbar t/ma^2}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2y^2/2}dy\,.$$

Таким чином,

$$\psi(x,t)=\frac{C}{\sqrt{1+i\hbar t/ma^2}}\exp\left[-\frac{x^2-2ia^2xk_0+\frac{i\hbar a^2k_0^2}{m}t}{2\left(1+i\hbar t/ma^2\right)a^2}\right].$$

Еволюція густини ймовірності

$$\rho(x,t)=\left|\psi(x,t)\right|^2=$$

$$= \frac{|C|^2}{\sqrt{1+\hbar^2 t^2 / m^2 a^4}} \exp\left[-\frac{\left(x - k_0 \hbar t / m\right)^2}{\left(1+\hbar^2 t^2 / m^2 a^4\right) a^2} \right].$$

З формули видно, що максимум густини ймовірності рухається зі швидкістю $k_0 \hbar / m$, а ширина хвильового пакету Δa збільшується з часом за законом

$$\Delta a = a\sqrt{1+\hbar^2 t^2 / m^2 a^4} .$$

Підставивши хвильову функцію у формулу для густини струму, отримуємо

$$j(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\psi^* \frac{-ik_0 - x / a^2}{1 - i\hbar t / ma^2} - \psi\psi^* \frac{ik_0 - x / a^2}{1 + i\hbar t / ma^2} \right) =$$

$$= \frac{\hbar k_0}{m} \frac{1 + \hbar t x / m a^4 k_0}{1 + \hbar^2 t^2 / m^2 a^4} \rho(x,t) .$$

П.3. Стан частинки в полі δ - ями (див. рис. 2) при $t = 0$ описується хвильовою функцією $\tilde{\Psi}_0(x) = A\exp\{-\beta|x|\}$, $\beta > 0$. Яка ймовірність $W(x)dx$ знайти частинку на відрізку $(x, x+dx)$ при $t \to \infty$? Знайти значення інтегралу $\int W(x)dx$ та порівняти його з початковим значенням. Пояснити отриманий результат.

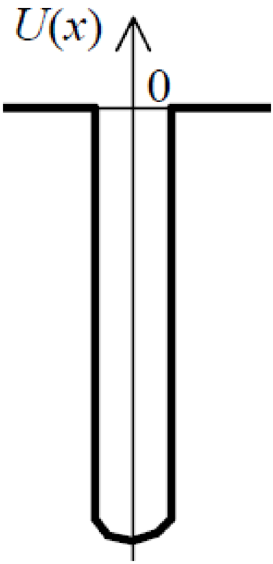

Рис. 2. Схематичне зображення дельта-ями.

Розв'язок. З умови нормування $A=\sqrt{\beta}$. Розклавши $\tilde{\Psi}_0(x)$ за власними функціями гамільтоніану і підставивши коефіцієнти розкладу в (III), знаходимо хвильову функцію у довільний момент часу

$$\begin{aligned}\Psi(x,t)&=\exp\left\{-\frac{iE_0t}{\hbar}\right\}c_0\Psi_0(x)+\\&+\int_0^\infty c(E)\exp\left\{-\frac{iEt}{\hbar}\right\}\Psi_E(x)dE\end{aligned}, \qquad (1)$$

де

$$\Psi_0(x)=\sqrt{\kappa_0}e^{-\kappa_0|x|},$$

$$E_0=-\frac{\hbar^2\kappa_0^2}{2m},$$

$$\kappa_0=\frac{m\alpha}{\hbar^2},$$

хвильова функція та енергія єдиного стану дискретного спектру в δ - ямі. Другий доданок в (1) – вклад неперервного спектру. Цей доданок описує локалізований хвильовий пакет, який за рахунок дисперсії "розпливається" в просторі, а при $t\to\infty$ його значення прямує до нуля (через швидкі осциляції підінтегральної функції в ньому відбувається взаємна компенсація вкладів сусідніх областей інтегрування, і при $t\to\infty$ вклад неперервного спектру відсутній), тобто при $t\to\infty$ залишається лише вклад локалізованого стану

$$\left|\Psi(x,t=\infty)\right|^2=\left|c_0\Psi_0(x)\right|^2=\kappa_0\left|c_0\right|^2e^{-2\kappa_0|x|}. \qquad (2)$$

Обчисливши

$$c_0 = \int \tilde{\Psi}_0(x)\Psi_0^*(x)dx = 2\sqrt{\kappa_0\beta}\Big/(\kappa_0+\beta)\,,$$

перепишемо (2) у вигляді

$$W(x) \equiv \left|\Psi(x,t=\infty)\right|^2 = \frac{4\beta\kappa_0^2}{(\beta+\kappa_0)^2}e^{-2\kappa_0|x|}. \qquad (3)$$

$W(x)$ визначає просторовий розподіл (густину ймовірності) частинки при $t\to\infty$. Знайдемо

$$w \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = \frac{4\beta\kappa_0^2}{(\beta+\kappa_0)^2} \le 1. \qquad (4)$$

Відмінність w від 1 означає, що частинка зі скінченою ймовірністю $(1-w)$ рухається на нескінченність, тобто, знаходиться в неперервному спектрі.

П.4. Частинка масою m знаходиться в полі $U(x)=kx^2\big/2$ (лінійний гармонічний осцилятор). У момент часу $t=0$ хвильова функція

$$\psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{b}\right)^2\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0x\right),$$

де $b=\sqrt{\hbar/m\omega}$. Знайти $\psi(x,t)$, $\overline{x}(t)$, $\overline{p}(t)$ та густину ймовірності $\rho(x,t)$.

Розв'язок. У відповідності з (III) шукаємо $\psi(x,t)$ у вигляді суперпозиції хвильових функцій стаціонарних станів гармонічного осцилятора $\psi_n(x)$

$$\psi(x,t)=\sum_n a_n\psi_n(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_n t\right). \tag{1}$$

Помножаючи (1) на $\psi_m^*(x)$ та інтегруючи від $-\infty$ до $+\infty$ по x, отримуємо

$$a_n=\frac{c_n}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{+\infty}H_n\left(\frac{x}{b}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{b}\right)^2\right)dx, \tag{2}$$

де

$$c_n=\left(\frac{1}{\pi b^2}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}.$$

Для обчислення цього інтеграла зручно скористатися властивістю твірної функції поліномів Ерміта:

$$\exp\left(2\lambda\frac{x}{b}-\lambda^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}H_n\left(\frac{x}{b}\right). \tag{3}$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $\exp\left(-x^2\big/2b^2-\left(x-x_0\right)^2\big/2b^2\right)$, інтегруємо по x. Використовуючи (2), отримуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(2\lambda\frac{x}{b}-\lambda^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{b}\right)^2\right)dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}{c_n}a_n. \tag{4}$$

Обчислюючи інтеграл в (4), одержуємо

$$\sqrt{\pi}b\exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{x_0}{b}\right)^2+\lambda\frac{x_0}{b}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}{c_n}a_n.$$

Розкладаючи в ряд $\exp\left(\lambda x_0/b\right)$ і порівнюючи з правою частиною рівності (4), отримуємо

$$a_n=\frac{\left(x_0/b\right)^n}{\sqrt{2^n n!}}\exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right). \tag{5}$$

Підставляючи (5) в (1) та враховуючи, що $E_n=\hbar\omega(n+1\big/2),$ за допомогою (3) отримуємо шукану хвильову функцію

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0\cos\omega t}{b}\right)^2-\right.$$

$$\left.-i\left(\frac{\omega t}{2}+\frac{x}{b}\cdot\frac{x_0}{b}\sin\omega t-\frac{x_0^2}{4b^2}\sin 2\omega t\right)\right].$$

Середні значення координати та імпульсу в цьому стані такі:

$$\overline{x}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left|\psi(x,t)\right|^2dx=x_0\cos\omega t,$$

$$\overline{p}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,t)\,\hat{p}\psi(x,t)dx=x_0m\omega\sin\omega t.$$

Тоді густина ймовірності буде

$$\rho(x,t)=\left|\psi(x,t)\right|^2=\frac{1}{b\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x-\overline{x}(t)}{b}\right)^2\right).$$

Ми бачимо, що в середньому розглянутий хвильовий пакет рухається так само, як класичний осцилятор, починаючи рух з точки $x=x_0$ з нульовою швидкістю. На відміну від класичного осцилятора, в квантовому випадку координата та імпульс у будь-який момент часу не мають певних значень: вони є “розмазаними” в околах середніх значень.

П.5. Частинка масою m та зарядом e знаходиться в однорідному електричному полі напруженістю $\mathbf{E}$. Знайти оператори швидкості $\hat{\mathbf{v}}$ та прискорення $\hat{\mathbf{w}}$.

Розв'язок. Гамільтоніан частинки в полі напруженістю $\mathbf{E}$ має вигляд

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}).$$

Згідно (V)

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathbf{r}}, \hat{H}\right].$$

Оператор $\hat{\mathbf{r}}$ не залежить явно від часу, тому $\partial\hat{\mathbf{r}}/\partial t = 0$. Знайдемо комутатор

$$\left[\hat{\mathbf{r}}, \hat{H}\right]\Psi = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\Delta\left(\hat{\mathbf{r}}\Psi\right) - \hat{\mathbf{r}}\Delta\left(\Psi\right)\right) = \frac{\hbar^2}{m}\nabla\Psi = \frac{i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}\Psi.$$

Звідси, оператор швидкості

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{p}}/m.$$

Аналогічно для прискорення

$$\hat{\mathbf{w}} \equiv \dot{\hat{\mathbf{v}}} = \frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{v}}\right] = \frac{e}{m}\mathbf{E}.$$

П.6. Знайти зсув та ширину основного рівня частинки в полі одновимірної дельта-ями $U(x) = -\alpha\cdot\delta(x)$ ($\alpha > 0$), який виникає при накладанні однорідного поля $V(x)=-F_0 x$ (див. рис. 3). Поле вважати слабким $aF_0 << \hbar^2/ma^2$, де $a=\hbar^2/m\alpha=1/k_0$ визначає область локалізації частинки в основному стані.

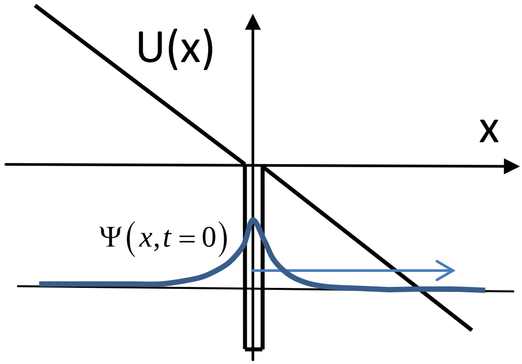

Рис. 3. Схематичне зображення хвильової функції $\Psi(x,t=0)$ та потенціалу, в якому знаходиться частинка. Локалізована частинка тунелює крізь потенціальний бар'єр. Стрілка позначає напрямок тунельного струму ймовірності.

Розв'язок. Гамільтоніан частинки має вигляд

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}-\alpha\delta(x)-Fx. \tag{1}$$

Рівень E_0 дискретного спектру в ізольованій δ - ямі при дії однорідного поля набуває ширини (розмивається) і стає квазістаціонарним станом частинки. Виникнення ширини рівня Γ, яка визначає час життя $\tau=\hbar/\Gamma$ стану, пов'язано з можливістю тунелювання частинки крізь бар'єр. Для визначення параметрів квазістаціонарного стану потрібно знайти розв'язок рівняння Шредінгера, яке має необхідні асимптотики при $x \longrightarrow \pm\infty$: при $x \to +\infty$ хвиля розповсюджується праворуч (умова випромінювання), а при $x \to -\infty$ хвиля затухає в класично забороненій області.

Заміна змінних

$$z = \xi\left(x + E/F\right),\ \xi = \left(2mF/\hbar^2\right)^{1/3}$$

приводить до рівняння $\Psi'' + z\Psi = 0$. З урахуванням відмічених вище асимптотик його розв'язок слід вибрати у вигляді наступних комбінацій функцій Ейрі:

$$\Psi = C_1\left[\mathrm{Ai}\left(-z\right) - i\mathrm{Bi}\left(-z\right)\right]\Big|_{z\to+\infty} \sim$$

$$\sim z^{-1/4}\exp\{i\frac{2}{3}z^{3/2}\},\quad x > 0,$$

$$\Psi = C_2\,\mathrm{Ai}\left(-z\right)\Big|_{z\to+\infty} \sim$$

$$\sim (-z)^{-1/4}\exp\left\{-\frac{2}{3}\left(-z\right)^{3/2}\right\},\ x < 0. \tag{2}$$

Використовуючи умови зшивки розв'язків у полі дельта-потенціалу в точці $x = 0$, отримуємо

$$\mathrm{Ai}\left(-z_0\right)\mathrm{Bi}\left(-z_0\right)+i\mathrm{Ai}^2\left(-z_0\right)= \tag{3}$$

$$=\frac{\xi\hbar^2}{2\pi m\alpha},\ z_0=\frac{\xi E}{F},$$

яке визначає спектр квазідискретних рівнів.

У випадку слабкого поля

$$\xi\hbar^2/m\alpha\ll 1,$$

права частина в рівнянні (3) мала. Щоб воно було виконано, необхідна малість і $Ai(-z_0)$, а для цього повинно бути $Re(-z_0)\gg 1$. Скориставшись асимптотиками функцій Ейрі, згідно з рівнянням (3) отримуємо

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2mE}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{5}{72\nu^2}+...\right)+\frac{i}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)e^{-2\nu}\right]=\frac{1}{k_0}, \tag{4}$$

де

$$\nu=\left(2/3\right)(-z_0)^{3/2},\ k_0=\frac{m\alpha}{\hbar^2}.$$

Рівняння (4) розв'язуємо методом послідовних наближень ($\mathrm{Re}\,\nu\gg 1$). У нульовому наближенні (коли вираз у квадратних дужках замінюється на 1)

$$E\approx E_0=-\hbar^2{k_0}^2/2m,$$

що відповідає незбуреному рівню в δ-ямі. Записуючи далі $E = E_0 + \Delta E - i\Gamma/2$ та замінюючи ν у квадратних дужках в (4) значенням нульового наближення $\nu_0 = \hbar^2 k_0{}^3 / 3mF$, отримуємо зсув рівня ΔE та його ширину Γ, які виникають при накладанні однорідного поля:

$$\Delta E = -\frac{5}{8}\frac{mF^2}{\hbar^2 k_0^4},$$

$$\Gamma = \frac{\hbar^2 k_0^2}{m}\exp\left\{-\frac{2\hbar^2 k_0^3}{3mF}\right\}. \tag{5}$$

Квадратний по полю зсув рівня визначає поляризованість основного стану частинки в δ- ямі, яка рівна $\beta_0 = 5me^2 / 4\hbar^2 k_0^4$ (тут $F = e\varepsilon$), і може бути розрахований на основі другого порядку теорії збурень.

Експоненціальна малість ширини рівня пов'язана з малою проникливістю бар'єра і може бути отримана на основі квазікласичного виразу для його проникливості. Така експоненціальна залежність ширини рівня від його енергії та "напруженості" однорідного поля характерна для частинки в довільних потенціалах, які спадають на великих відстанях.

П.7. Знайти механічні інтеграли руху для системи із N безспінових частинок, які знаходяться у таких полях:

1) в однорідному полі, яке залежить від часу;
2) у полі рівномірно зарядженого прямого дроту;
3) у полі нескінченної однорідної циліндричної гвинтової лінії (вісь гвинта – вісь z, крок гвинта – a, кут повороту навколо осі – ϕ).

Розв'язок. Гамільтоніан $\hat{H}_0$ системи за відсутності зовнішнього поля має найбільш високу симетрію: він інваріантний щодо довільного зсуву, повороту та відображення координат. Зовнішнє поле порушує симетрію, так що саме симетрія потенціальної енергії частинок у зовнішньому полі

$$U_{зовн}\left(r_1,...,r_n\right)=\sum_n U_n\left(r_n\right)$$

визначає симетрію гамільтоніана системи $\hat{H}=\hat{H}_0+U_{\text{зовн}}$ у цілому.

У свою чергу, симетрія $U_{\text{зовн}}$ однозначно визначається характером симетрії "джерел" зовнішнього поля; для її виявлення необхідно перейти до відповідної системи координат, яка була б адекватною симетрії системи (проявляється у незалежності $U_{\text{зовн}}$ від відповідних координат).

Приймаючи до уваги також явний вигляд операторів проекції імпульсу та моменту імпульсу

$$\hat{P}_z=-i\hbar\sum_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$

$$\hat{L}_z=-i\sum_n \frac{\partial}{\partial \phi_n},$$

збереження енергії системи у випадку $\partial U_{зовн}/\partial t=0$, аналізуємо наявність інтегралів руху в системі.

1) *Якщо* напрямок сил, діючих на частинки, залежить від часу, то ніяких інтегралів руху в системи немає. Якщо ж від часу залежать лише величини сил (але не їх напрямок, загальний для всіх частинок системи), то, вибравши вісь z уздовж цього напрямку, маємо

$$U_{\text{зовн}} = -\sum\nolimits_n F_n(t) z_n,$$

а інтеграли руху P_x, P_y, L_z (а при $F_n(t) = \text{const}$ також й інтеграл енергії E).

2) Система має аксіальну симетрію щодо осі z, яка спрямована уздовж дроту, та трансляційно інваріантна у цьому напрямку, так що $U_{\text{зовн}} = \sum\nolimits_n U_n(\rho_n)$, а інтегралами руху є E, P_z, L_z, I (збереження парності I відображує дзеркальну симетрію щодо площини, що перпендикулярна осі z).

3) Функція $U_{\text{зовн}} = \sum\nolimits_n U_n(\rho_n, z_n, \phi_n)$ інваріантна щодо перетворення

$$\phi_n \to \phi_n + \delta\alpha,\; z_n \to z_n + a\delta\alpha / 2\pi$$

за фіксованих значень ρ_n. При цьому $\delta U_{\text{зовн}} = 0$. Це означає, що оператор $U_{\text{зовн}}$, а тому і гамільтоніан $\hat{H}$, комутує з оператором

$$\sum_n \left(\frac{\partial}{\partial \phi_n} + \frac{a}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_n} \right) = \frac{i}{\hbar} \left(\hbar \hat{L}_z + \frac{a}{2\pi} \hat{P}_z \right).$$

Відповідно, інтегралом руху є комбінація $L_z + aP_z / 2\pi\hbar$, а також, у силу $\partial U_{\text{зовн}} / \partial t = 0$, й енергія E.

П.8. Знайти часову функцію Гріна для вільної частинки $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2 / 2m$.

Розв'язок. Виберемо вісь Ox уздовж напрямку руху частинки. Згідно з (VII) маємо (для неперервного спектр підсумовування потрібно замінити на інтегрування)

$$G\left(x,t,x',t'\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi_p\left(x\right)\Psi_p^*\left(x'\right)e^{-iE_n\left(t-t'\right)/\hbar}dp, \qquad (1)$$

де

$$\Psi_p\left(x\right)=\left(1\big/\sqrt{2\pi\hbar}\right)\exp\left(-ipx/\hbar\right)$$

– власна функція гамільтоніану $\hat{H}$, нормована на δ- функцію по імпульсу. Підставляючи $\Psi_p\left(x\right)$ в (1) та обчислюючи інтеграл, отримуємо шукану функцію Гріна

$$G\left(x,t;x',t'\right)=\left(-\frac{im}{2\pi\hbar\left(t-t'\right)}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{im\left(x-x'\right)^2}{2\hbar(t-t')}\right\}. \qquad (2)$$

Задачі

Представлення Шредінгера

1. Для вказаних нижче систем та їх хвильових функцій Ψ_0 у початковий момент часу $t=0$:

а) частинки в нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною a та $\Psi_0(x) = A\sin^3(\pi x / a)$ при $0 < x < a$;

б) плоского ротатора та $\Psi_0(\varphi) = A\sin^2\varphi$ (нагадуємо, що хвильова функція стаціонарних станів плоского ротатора має вигляд $\Psi_m(\varphi) = e^{im\varphi}\big/\sqrt{2\pi}, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$);

знайти хвильові функції в будь-який момент часу. Показати, що отримані хвильові функції є періодичними в часі. Знайти цей період.

2. Частинка, що вільно рухається, при $t=0$ описується хвильовою функцією $\psi(x,0) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\exp(ipx/\hbar)$. Знайти $\psi(x,t)$.

3. Впевнитись, що струм і густина ймовірності в П.2 задовольняють рівнянню неперервності

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0\,.$$

4. Стан вільної частинки в момент часу $t=0$ описується хвильовою функцією

$$\Psi_0(x) = A\exp\left(-x^2\big/2a^2 + ip_0x/\hbar\right).$$

Знайти зміну в часі наступних середніх величин: $\overline{x(t)}$, $\overline{p(t)}$, $\overline{(\Delta x(t))^2}$, $\overline{(\Delta p(t))^2}$.

5. Для попередньої задачі оцінити час, за який ширина хвильового пакету збільшиться удвічі для: 1) електрона, який локалізований в області $a = 10^{-8}\,см$; 2) макрочастинки з масою $m = 10^{-6}\,г$, яка локалізована в області розміром $a = 10^{-2}\,см$.

6. Маємо в момент часу $t = 0$ нормований хвильовий пакет

$$\Psi(x, t = 0) = \int c(E)\Psi_E(x)dE\,,\ \int |\Psi|^2 dx = 1\,,$$

побудований із власних функцій гамільтоніану, які відповідають неперервній частині енергетичного спектру. Показати, що густина ймовірності знаходження частинки в будь-якій точці прямує до нуля, якщо $t \to \infty$. Чому ця обставина не суперечить збереженню нормування хвильової функції?

7. Знайти асимптотичну ($t \to \infty$) поведінку хвильової функції $\Psi(x, t)$ вільної частинки, якщо в момент часу $t = 0$ її стан визначається нормованою на одиницю хвильовою функцією $\Phi_0(p)$ в імпульсному представленні. Впевнитись у збереженні нормування.

8. Впевнитись, що знайдена в П.8 функція Гріна задовольняє нестаціонарне рівняння Шредінгера.

9. У початковий момент часу

$$\Psi(x, t = 0) = A\exp\left\{\frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{(x - x_0)^2}{2a^2}\right\},\ (p_0 > 0,\ x_0 > 0).$$

Розглянути відбиття цього хвильового пакету від непроникної стінки, тобто для потенціалу

$$V = \begin{cases} \infty, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Вважається $x_0 >> a$, так, що в початковий момент часу можна вважати $\Psi(x,0) = 0$ при $x \geq 0$ (див. рис. 4). При знаходженні розв'язку цієї задачі скористатися часовою функцією Гріна $G(x,t,x',t')$.

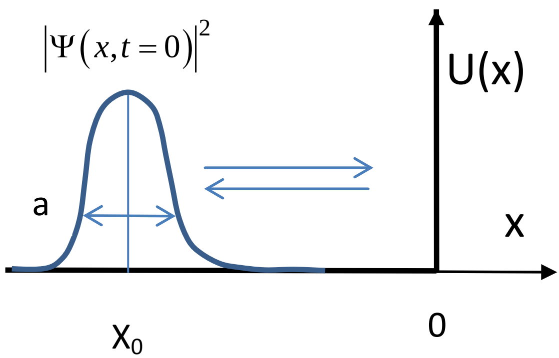

Рис. 4. Розподіл густини ймовірності $\left|\Psi(x,t=0)\right|^2$ у початковий момент часу $t = 0$.

Зміна в часі фізичних величин

10. Частинка масою m рухається в одновимірному потенціалі $U(x)$. Знайти $\overline{\dfrac{dx}{dt}}$ та $\overline{\dfrac{dp_x}{dt}}$. Отримати квантове рівняння Ньютона

$$m\overline{\frac{d^2x}{dt^2}} = -\overline{\frac{\partial U}{\partial x}} = F_x .$$

11. Показати, що середнє значення похідної за часом від фізичної величини, яка явно не залежить від часу, в стаціонарному стані дискретного спектру рівне нулю. Ґрунтуючись на цьому результаті, усередненням оператора $d\left(\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}}\right)/dt$ довести теорему віріала для частинки, яка рухаються в потенціалі $U = \alpha r^{\nu}$.

12. Знайти механічні інтеграли руху для системи із N безспінових частинок, які знаходяться у таких полях:
1) вільний рух частинок;
2) у полі нескінченної однорідної площини;
3) у полі однорідної кулі;
4) у полі двох точок.

13. Показати, що для частинки в однорідному полі оператор $\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{F_0}t$ є оператором величини, яка зберігається ($\mathbf{F_0}$ - сила, яка діє на частинку). Порівняти з результатом класичної механіки.

Гейзенбергівське представлення

14. Довести співвідношення

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}\left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \ldots .$$

15. Знайти гейзенбергівські оператори координати та імпульсу з використанням унітарного перетворення, яке пов'язує шредінгерівське та гейзенбергівське представлення, та на основі безпосереднього розв'язку рівнянь руху для гейзенбергівських операторів для наступних випадків:

а) вільний рух;

б) рух в однорідному полі $U = -F_0 x$;

в) для лінійного гармонічного осцилятора.

16. Використовуючи гейзенбергівські оператори координати та імпульсу, знайти наступні середні значення: $\overline{x(t)}$, $\overline{p(t)}$, $\overline{\left(\Delta x(t)\right)^2}$, $\overline{\left(\Delta p(t)\right)^2}$ для вказаних у попередній задачі систем, які знаходяться в стані з хвильовою функцією

$$\Psi(x) = A\exp\left\{ip_0 x/\hbar - \left(x - x_0\right)^2 \big/ 2a^2\right\}.$$

17. У попередній задачі для лінійного осцилятора знайти значення ширини хвильового пакету a, вважаючи, що дисперсії як координати, так й імпульсу в даному стані не залежать від часу, а їх добуток набуває мінімально можливе значення, яке визначається співвідношенням невизначеності $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar / 2$.

18. Виходячи з рівнянь руху для гейзенбергівських операторів, показати, що

$$\left[\hat{p}_i(t), \hat{x}_k(t)\right] = -i\hbar\delta_{ik} .$$

19. Частинка, яка описується деяким нормованим хвильовим пакетом, знаходиться в однорідному та змінному в часі полі, причому сила $\left|\mathbf{F}(t)\right| \to 0$, якщо $t \to \pm\infty$. Знайти зміну середнього значення енергії частинки, яка викликана дією поля. Порівняти з результатом класичної механіки.

Квазістаціонарні стани

20. Знайти зсув та ширину рівнів частинки в полі наступного потенціалу (див. рис.5)

$$U(x)=\begin{cases} +\infty, \text{ при } x\le 0; \\ \beta\cdot\delta(x-a), \text{при } x>0, \text{ де } a,\beta>0. \end{cases}$$

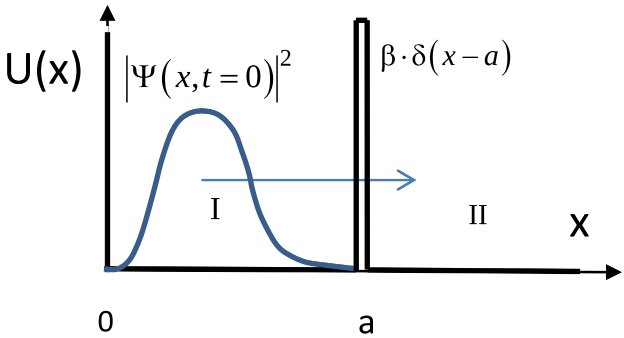

Рис. 5. Схематичне зображення густини ймовірності $|\Psi(x,t=0)|^2$ хвильового пакету, який тунелює через дельта-бар'єр. Стрілка позначає напрямок тунельного струму ймовірності.

Значення фундаментальних фізичних сталих

Стала Планка

$h = 6,6260755 \cdot 10^{-27}$ ерг$\cdot$с $= 6,6260755 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с $= 4,1356692 \cdot 10^{-15}$ еВ$\cdot$с;

Зведена стала Планка

$\hbar = 1,0545726 \cdot 10^{-27}$ ерг$\cdot$с $= 1,0545726 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с $= 6,5821220 \cdot 10^{-16}$ еВ$\cdot$с;

Елементарний заряд

$e = 4,80319199 \cdot 10^{-10}$ од. СГСЕ $= 1,60217733 \cdot 10^{-19}$ Кл;

Маса спокою електрона

$m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-28}$ г $= 9,1093897 \cdot 10^{-31}$ кг $= 5,48579903 \cdot 10^{-4}$ а.о.м.;

Маса спокою протона

$m_p = 1,6726231 \cdot 10^{-24}$ г $= 1,6726231 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1,007276470$ а.о.м.;

Маса спокою нейтрона

$m_n = 1,6749286 \cdot 10^{-24}$ г $= 1,6749286 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1,008664904$ а.о.м.

Швидкість світла у вакуумі

$c = 2,99792458 \cdot 10^{10}$ см$\cdot$с$^{-1}$ $= 2,99792458 \cdot 10^{8}$ м$\cdot$с$^{-1}$;

Гравітаційна стала

$G = 6,67259 \cdot 10^{-8}$ дин$\cdot$см$^2 \cdot$ г$^{-2}$ $= 6,67259 \cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$м$^2 \cdot$ кг$^{-2}$.

Математичний додаток

Дельта функція Дірака

Нехай $f\left(x\right)$ неперервна разом зі своїми похідними функція на інтервалі $\left(-\infty,+\infty\right)$ $\left(f\left(x\right)\to 0, \text{якщо } x\to\pm\infty\right)$. Тоді δ - функція визначається таким чином:

$$\int\delta\left(x-x_0\right)f\left(x\right)dx=f\left(x_0\right).$$

Дельта-функція задовольняє наступним співвідношенням:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(x\right)dx=1;$$

$$\delta\left(-x\right)=\delta\left(x\right);$$

$$x\delta\left(x\right)=0;$$

$$\delta\left(ax\right)=\frac{1}{\left|a\right|}\delta\left(x\right),\ a\neq 0;$$

$$f\left(x\right)\delta\left(x-a\right)=f\left(a\right)\delta\left(x-a\right);$$

$$\delta\left[f\left(x\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta\left(x-x_i\right)}{\left|\frac{df\left(x\right)}{dx}\right|_{x=x_i}},$$

де x_i - нулі функції $f\left(x\right), n$ - кількість нулів на всій осі x.

Пуассонівські інтеграли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$ – інтеграл Пуассона.

Диференціюючи інтеграл Пуассона за параметром α n разів і користуючись парністю підінтегрального виразу, отримуємо

$$\int_{0}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \ (n = 0,1,2,\ldots).$$

Для випадку непарних ступенів полінома перед експонентою можна отримати, що

$$\int_{0}^{+\infty} x^{2m+1} e^{-x^2} dx = \frac{m!}{2}, \ (m = 0,1,2,\ldots).$$

Поліноми Ерміта

Поліноми Ерміта $H_n(x)$ можуть бути визначені на проміжку $-\infty \le x \le \infty$ за допомогою твірної функції

$$F(x,t) = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \ . \qquad (1)$$

Звідси безпосередньо отримуємо

$$H_n(x)=\left(\frac{\partial^n F(x,t)}{\partial x^n}\right)_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}=$$

$$=(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}-\ldots. \quad (2)$$

Звідси

$$\begin{aligned} &H_0(x)=1; \quad H_1(x)=2x; \\ &H_2(x)=4x^2-2; \quad H_3(x)=8x^3-12x. \end{aligned} \quad (3)$$

Поліноми Ерміта задовольняють таким співвідношенням:

$$\frac{dH_n(x)}{dx}=2nH_{n-1}(x); \quad (4)$$

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0, \ (n\geq 1). \quad (5)$$

Вироджена гіпергеометрична функція

Ця функція для усіх скінчених z та a та за довільного c, не рівному $0,-1,-2,\ldots,$ визначається рядом:

$$F(a,c;z)=1+\frac{a}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\cdot\frac{z^2}{2!}+\ldots. \quad (1)$$

Звідси $F(a,a;z)=e^z$. Вироджена гіпергеометрична функція є частинним розв’язком наступного рівняння:

$$z\frac{d^2\Phi}{dz^2}+\left(c-z\right)\frac{d\Phi}{dz}-a\Phi=0\,. \tag{2}$$

Якщо c - неціле число, то другим частинним розв'язком (2) є функція:

$$z^{1-c}F\left(a-c+1,2-c;z\right)\,. \tag{3}$$

Функція $F\left(a,c;z\right)$ задовольняє ряду співвідношень, які випливають із формул (1) та (2):

$$\begin{gathered}
F\left(a,c;z\right)=e^zF\left(c-a,c;z\right);\\
\left(c-a\right)F\left(a-1,c;z\right)+\left(2a-c+z\right)F\left(a,c;z\right)=aF\left(a+1,c;z\right);\\
\frac{d}{dz}F\left(a,c;z\right)=\frac{a}{c}F\left(a+1,c+1;z\right);\\
\frac{d^n}{dz^n}F\left(a,c;z\right)=\frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(a\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(c+n\right)}\cdot F\left(a+n,c+n;z\right).
\end{gathered} \tag{4}$$

Якщо a рівне нулю або цілому від'ємному числу, $a=-n$, то $F\left(a,c;z\right)$ зводиться до поліному n-го степеня:

$$F\left(-n,c,z\right)=1-\frac{n}{c}z+...+\left(-1\right)^n\frac{\left(c-1\right)!}{\left(c+n-1\right)!}z^n=$$

$$=\frac{z^{1-c}e^z\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c+n\right)}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{c+n-1}\cdot e^{-z}\right). \tag{5}$$

Асимптотики функцій:

$$\operatorname{Re} z \to \infty,\ F(a,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^{z} \left[1 + O\left(|z|^{-1}\right)\right];$$

$$\operatorname{Re} z \to -\infty,\ F(a,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} \left[1 + O\left(|z|^{-1}\right)\right]; \tag{6}$$

$\operatorname{Re} c \to \infty,\ F(a,c;z) = 1 + O\left(|c|^{-1}\right)$ для скінчених z, a.

Будь-яке рівняння вигляду

$$(a_0 x + b_0)\frac{d^2\phi}{dx^2} + (a_1 x + b_1)\frac{d\phi}{dx} + (a_2 x + b_2)\phi = 0 \tag{7}$$

може бути зведене до (2) наступною заміною: $\phi = e^{\nu x}\Phi$, $x = \lambda z + \mu$, де величини ν, λ, μ визначаються з системи рівнянь

$$a_0\mu + b_0 = 0;\ a_0 + \lambda(2a_0\nu + a_1) = 0;\ a_0\nu^2 + a_1\nu + a_2 = 0. \tag{8}$$

Література

1. Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко. Сборник задач по теоретической физике. М. : Высш. шк., 1984.

2. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган. Задачи по квантовой механике. Учебное пособие: В 2 ч. М. : Едиториал УРСС, 2001.

3. З. Флюгге. Задачи по квантовой механике: М.: Мир, 1974, Т. 1, 2.

4. И. И. Гольдман, В. Д. Кривченков. Сборник задач по квантовой механике. М. : Гостехиздат, 1957.

5. В. В. Балашов, В. К. Долинов. Курс квантовой механики. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 336 с.

6. В. І. Висоцький. Квантова механіка та її використання у прикладній фізиці.– К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008.– 367с.

7. Овечко В. С., Шека Д. І. Фізика атомів та атомних структур (від класики до квантів). - К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. –184 с.

8. А. С. Давыдов. Квантовая механика. – М.: Наука, 1973.– 704 с.

9. Д. И. Блохинцев. Основы квантовой механики. – М. : Наука, 1983. – 664 с.

10. П. Н. Харченко, О. В. Прокопенко, Г. Ю. Карлаш. Атомна фізика в задачах: Навчальний посібник. – К.: "Академдрук", 2007. – 333 с.

11. М. Абрамовиц, И. Стиган. Справочник по специальным функциям. М. : Наука, 1979. – 830 с.