

# Список

## теоретичних питань і задач

### для перескладання екзамену

### з математичного аналізу

#### 1 Інтеграл Рімана

##### Теоретичні питання.

1. *Означення інтеграла Рімана як границі інтегральних сум;*
2. *Формула Ньютона–Лейбніца;*
3. *Формула інтегрування частинами;*
4. *Формула заміни змінної;*
5. *Формули для площ плоских фігур.*

##### Типи задач.

1.1. $\int_a^b \frac{Ax + B}{mx^2 + nx + q} dx;$	1.6. $\int_a^b x^n \sin kx dx, \quad n = 1, 2, 3;$
1.2. $\int_a^b \frac{Ax + B}{\sqrt{mx^2 + nx + q}} dx;$	1.7. $\int_a^b x^n \cos kx dx, \quad n = 1, 2, 3;$
1.3. $\int_a^b \cos^n x dx, \quad n = 2, 3, 4;$	1.8. $\int_0^{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} dx;$
1.4. $\int_a^b \sin^n x dx, \quad n = 2, 3, 4;$	1.9. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3.$
1.5. $\int_a^b x^n \ln x dx, \quad n = 1, 2, 3;$	

#### 2 Числові ряди. Ознаки збіжності числових рядів з додатними членами

##### Теоретичні питання.

1. *Означення збіжності числового ряду. Геометричний і узагальнено-гармонічний ряди;*
2. *Необхідна умова збіжності і груба достатня ознака розбіжності;*

3. Ознаки порівняння: загальна, в асимптотичній формі, асимптотично-степенева;
4. Ознака Д'Аламбера;
5. Коренева ознака Коші.

#### Типи задач.

$$2.1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \quad a > 0;$$

$$2.5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^3 - 2k^2 + 1}{7k^5 + 4k^2 + 3k};$$

$$2.2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{k!};$$

$$2.6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!};$$

$$2.3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k};$$

$$2.7. \sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^p \frac{1}{\sqrt{k}};$$

$$2.4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{k^k};$$

$$2.8. \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{k}\right).$$

### 3 Числові ряди із знакозмінними членами

#### Теоретичні питання.

1. Означення абсолютної і умовної збіжності числового ряду;
2. Ознаки збіжності рядів із знакозмінними членами: ознака Лейбніца, ознака Діріхле, ознака Абеля.

#### Типи задач.

$$3.1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!};$$

$$3.5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}, \quad p > 0;$$

$$3.2. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k;$$

$$3.6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x};$$

$$3.3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k+100};$$

$$3.7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 < x < \pi.$$

$$3.4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k}{4}}{k};$$

### 4 Функціональні послідовності і функціональні ряди

#### Теоретичні питання.

1. Означення функціональної послідовності і функціонального ряду і їх області збіжності;

2. Означення рівномірної збіжності функціональної послідовності і функціонального ряду на  $D \subset \mathbb{R}$ ;

3. Мажорантна ознака Вейерштрасса.

### Типи задач.

Знайти область збіжності:

4.1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ;

4.5.  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$ ;

4.2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{10^k}$ ;

4.6.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{x^k}$ ;

4.3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ;

4.7.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ ;

4.4.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$ ;

Довести рівномірну збіжність функціонального ряду на множині  $D$ :

4.8.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{10^k}$ ,  $D = [-9, 9]$ ;

4.10.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctg kx}{k^2}$ ,  $D = \mathbb{R}$ ;

4.9.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2x)}{10^k}$ ,  $D = \mathbb{R}$ ;

4.11.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ,  $D = [-R, R]$ ,  
 $R > 0$ .

## 5 Степеневі ряди

### Теоретичні питання.

1. Означення степеневого ряду за степенями  $x$  і за степенями  $x - x_0$ ;
2. Радіус збіжності степеневого ряду і формули для обчислення радіуса збіжності;
3. Властивості степеневих рядів (неперервність суми, можливість почленного диференціювання і інтегрування);
4. Ряд Тейлора і Маклорена;
5. Стандартні розклади в ряди Маклорена основних елементарних функцій.

### Типи задач.

Знайти радіус степеневого ряду і дослідити на збіжність на кінцях інтервалу збіжності:

$$5.1. \sum_{k=1}^{\infty} x^k;$$

$$5.5. \sum_{k=1}^{\infty} (3x)^k;$$

$$5.2. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k;$$

$$5.6. \sum_{k=1}^{\infty} k! x^k;$$

$$5.3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k};$$

$$5.7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};$$

$$5.4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k 2^k};$$

$$5.8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k};$$

Розкласти дані функції в степеневі ряди:

$$5.9. f(x) = \frac{x}{3-x} :$$

а) за степенями  $x$ ;

в) за степенями  $(x+2)$ ;

б) за степенями  $(x-1)$ ;

г) за степенями  $\frac{1}{x}$ ;

$$5.10. f(x) = \sqrt[3]{x} :$$

а) за степенями  $(x-1)$ ;

в) за степенями  $(x-8)$ ;

б) за степенями  $(x+1)$ ;

$$5.11. f(x) = \ln x :$$

а) за степенями  $(x-1)$ ;

в) за степенями  $(x-2)$ ;

б) за степенями  $(x-e)$ ;

Знайти перші  $n$  членів розкладу в степеневий ряд за степенями  $x$  для функції  $f(x) : f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  :

$$5.12. f(x) = \operatorname{tg} x, \quad n = 2;$$

$$5.14. f(x) = e^x \cos x, \quad n = 2.$$

$$5.13. f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad n = 3;$$

## 6 Тригонометричні ряди Фур'є

**Теоретичні питання.**

1. Основна тригонометрична система функцій періодів  $T$  і  $2\pi$ ;
2. Ряд Фур'є  $T$ -періодичної і  $2\pi$ -періодичної функції;
3. Ряд Фур'є парної і непарної функції;
4. Рівність Парсеваля;
5. Формулювання теорем про рівномірну і поточкову збіжність;

6. Комплексна форма тригонометричного ряду Фур'є.

### Типи задач.

Розкласти функцію в тригонометричний ряд Фур'є:

6.1.  $f(x) = x$  при  $-\pi < x < \pi$ ,  $(T = 2\pi)$ ;

6.2.  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$  при  $0 < x < 2\pi$ ,  $(T = 2\pi)$ ;

6.3.  $f(x) = |\sin x|$ ;

6.4.  $f(x) = x^2$  при  $-\pi < x < \pi$ ,  $(T = 2\pi)$ ;

6.5.  $f(x) = |x|$  при  $-l < x < l$ ,  $(T = 2l)$ ;

6.6.  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$

Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є періода  $T = 2\pi$  :

а) за синусами;

б) за косинусами.

## 7 Невласні інтеграли

### Теоретичні питання.

1. Означення невластних інтегралів:  $\int_a^{+\infty}$ ,  $\int_{-\infty}^b$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ , v. p.  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ ,  $\int_a^b$  ( $b$  – особлива точка),  $\int_a^b$  ( $a$  – особлива точка),  $\int_a^b$  ( $c$  – особлива точка,  $a < c < b$ ), v. p.  $\int_a^b$ ;

2. Формули Ньютона-Лейбніца, заміни змінної, інтегрування частинами для невластних інтегралів;

3. Збіжність інтегралів  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ ,  $a > 0$ ,  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ ,  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$ ;

4. Асимптотична степенева ознака збіжності для невластних інтегралів першого і другого родів.

### Типи задач.

Обчислити інтеграли:

7.1.  $\int_0^1 \ln x dx$ ;

7.2.  $\int_0^1 x^n \ln x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

$$7.3. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}};$$

$$7.7. \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$7.4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)};$$

$$7.8. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bxdx, \quad a > 0;$$

$$7.5. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$7.9. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bxdx, \quad a > 0;$$

$$7.6. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad 4ac - b^2 > 0;$$

Дослідити на збіжність:

$$7.10. \int_0^{+\infty} \frac{(3x^2 + 1)dx}{4x^3 + 5x + 1};$$

$$7.13. \int_0^1 \frac{\sin x dx}{x^m(x^2 + 1)};$$

$$7.11. \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^n + 1} dx;$$

$$7.14. \int_0^1 \frac{\ln(1+x^m)}{x^n} dx \quad m, n > 0;$$

$$7.12. \int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{3x+2} e^{-x} dx;$$

$$7.15. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad n \in \mathbb{N}.$$

## 8 Інтеграли, залежні від параметра

**Теоретичні питання.**

1. Властивості власного інтеграла  $F(p) = \int_a^b f(x, p) dx$ ;
2. Формула Лейбніца і її узагальнення;
3. Класичні невластні інтеграли: Пуассона, Діріхле, Френеля;
4.  $\Gamma$ - і  $\beta$ -функції Ейлера і їх основні властивості.

**Типи задач.**

$$8.1. y = \frac{1}{w} \int_0^t f(\tau) \sin w(t-\tau) d\tau. \quad \text{Знайти } y', y'', y'' + w^2 y;$$

$$8.2. y = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad \text{Знайти } y', y'';$$

$$8.3. y = \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad \text{Знайти } y', y'';$$

8.4.  $y = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$ . Знайти  $y' + ay$ ;

8.5.  $y = \frac{1}{w} \int_0^t f(\tau) \operatorname{sh} w(t - \tau) d\tau$ . Знайти  $y', y'', y'' - w^2 y$ .

Обчислити інтеграли:

8.6.  $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx, \quad a > 0;$

8.9.  $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(1+x)^n};$

8.7.  $\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx, \quad a > 0;$

8.10.  $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{1+x^n}, \quad n > 0.$

8.8.  $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x} dx;$

## 9 Інтеграл Фур'є

**Теоретичні питання.**

1. Запис інтеграла Фур'є в дійсній формі, випадки парних і непарних функцій;
2. Запис інтеграла Фур'є в комплексній формі.

Дані функції представити інтегралом Фур'є:

а) в дійсній формі;

б) в комплексній формі:

**Типи задач.**

9.1.  $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases}$

9.4.  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases}$

9.2.  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0, x > 1; \end{cases}$

9.5.  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ e^x, & x < 0; \end{cases}$

9.3.  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ -1, & -1 < x < 0, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$

9.6.  $f(x) = e^{-|x|}.$

## 10 Кратні інтеграли

### Теоретичні питання.

1. Формули обчислення подвійних і потрійних інтегралів;
2. ПСК, ЦСК, ССК;
3. Формули переходу до ПСК, ЦСК, ССК.

Обчислити інтеграли:

### Типи задач.

$$10.1. \iint_D (x + 2y) dx dy, \quad D : \begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0, \\ x + y \leq 1; \end{cases}$$

$$10.2. \iint_D xy^2 dx dy, \quad D : \begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq \sqrt{x}; \end{cases}$$

$$10.3. \iint_D (2x + y) dx dy, \quad D : \begin{cases} y \leq x, & y \leq 2 - x \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$10.4. \iint_D xy^2 dx dy, \quad D : \begin{cases} x = 0, & x = 1, \\ y = x^2, & y = x; \end{cases}$$

$$10.5. \iint_D xy dx dy, \quad D : \begin{cases} x = 0, & x = 2, \\ y = x, & y = 2x; \end{cases}$$

$$10.6. \iint_D \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} dx dy, \quad D : \left[ x^2 + y^2 \leq 1; \right.$$

$$10.7. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D : \left[ x^2 + y^2 = Rx \text{ або} \right.$$

$$D : \left[ x^2 + y^2 = Ry \text{ або} \quad D : \left[ x^2 + y^2 = -Rx \text{ або} \quad D : \left[ x^2 + y^2 = -Ry; \right. \right.$$

$$10.8. \iiint_D \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}, \quad D : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x = 0, & y = 0, & z = 0; \end{cases}$$

$$10.9. \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad D : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1; \end{cases}$$

$$10.10. \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad D : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ z = 2; \end{cases}$$

10.11.  $\iiint_D \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} dx dy dz, \quad D: \left[ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1. \right.$

## 11 Криволінійні інтеграли

### Теоретичні питання.

1. *Означення криволінійних інтегралів 1-го роду;*
2. *Формули обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду;*
3. *Означення криволінійних інтегралів 2-го роду;*
4. *Формули обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду;*
5. *Формула Гріна.*

### Типи задач.

№№ 4221–4224; №№ 4231, 4232, 4248–4250, 4252, 4254, 4297–4299.

## 12 Поверхневі інтеграли

### Теоретичні питання.

1. *Означення і формули обчислення поверхневих інтегралів 1-го роду;*
2. *Означення і формули обчислення поверхневих інтегралів 2-го роду;*
3. *Формула Остроградського;*
4. *Формула Стокса.*

### Типи задач.

№№ 4343–4345, 4352. №№ 4362, 4366. №№ 4371, 4373. №№ 4376–4380, 4388.

## 13 Елементи теорії поля

### Теоретичні питання.

1. *Означення похідної за напрямом, градієнта, дивергенції, ротора і формули їх обчислення;*
2. *Диференціальні операції в теорії поля;*
3. *Векторний запис формули Остроградського і Стокса;*
4. *Умови потенційності і соленоїдності векторного поля.*

**Типи задач.**

**13.1.** Знайти  $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ ;

**13.3.** Знайти  $\operatorname{div} \vec{F}(M_0), \operatorname{rot} \vec{F}(M_0)$ ;

**13.2.** Знайти  $\operatorname{grad} u(M_0)$ ;

**13.4.** Знайти  $\operatorname{div}(u\vec{F}), \operatorname{rot}(u\vec{F})$ .