КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Моторна О. В.

ТЕОРІЯ МІРИ

Методичний посібник

Київ 2009

УДК.517

Рецензенти
доктор фіз.-мат. наук, проф. В. М. Радченко,
кандидат фіз.-мат. наук, доц. О. М. Радченко

Моторна О.В.

Теорія міри

В курсі математичного аналізу, який викладається для студентів радіофізичного і фізичного факультетів, теорія міри Лебега є темою для самостійного вивчення. Дана методична розробка створена для допомоги студентам цих факультетів при вивченні теми "Теорія міри" та є главою для підручника з вищої математики.

УДК 517

Зміст

Деякі домовленості і позначення

- Розглядатимемо множини з $\mathbf{R}$.
- Надалі позначатимемо:
  E - довільні множини,
  F - замкнені множини,
  G - відкриті множини,
  I - інтервали (a, b), $a < b$.
  Наприклад, множина $(0, 1)$ може бути позначена буквою I, G або E, але не може бути позначена буквою F; множина $[0, 1)$ може бути позначена буквою E, але не може бути позначена ні буквою I, ні G, ні F.
- Розглядатимемо скінченні суми $\sum\limits_{k=1}^{n}$, об'єднання $\bigcup\limits_{k=1}^{n}$, перетини $\bigcap\limits_{k=1}^{n}$ та зліченні суми $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$, об'єднання $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}$ та перетини $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}$.
  У випадках, коли сума (об'єднання, перетин) може бути або скінченною, або зліченною, будемо писати $\sum\limits_{k}$ (відповідно $\bigcup\limits_{k}$, $\bigcap\limits_{k}$).
- Порожню множину $\emptyset$ будемо одночасно вважати відкритою і замкненою.
- Вважатимемо, що всі множини, які ми будемо розглядати, є обмеженими, тобто
$$\forall E \quad \exists d > 0 \ : \ E \subset (-d, d).$$

Відомі факти

1. Об'єднання довільної множини відкритих множин є множиною відкритою.
2. Перетин скінченної кількості відкритих множин є множиною відкритою:
$$\bigcap_{k=1}^{n} G_k = G.$$
3. Об'єднання скінченної кількості замкнених множин є множиною замкненою:
$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k = F.$$

4. Перетин довільної множини замкнених множин є множиною замкненою.

5. Різниця замкненої і відкритої множин є множиною замкненою:

$$F\backslash G = F_0.$$

6. Різниця відкритої і замкненої множин є множиною відкритою:

$$G\backslash F = G_0.$$

7.

   Лема 0.1 (Гейне-Бореля)**.** *Із будь-якого покриття замкненої обмеженої множини відкритими множинами можна виділити скінченне покриття.*

8.

   Лема 0.2 (про структуру відкритої множини)**.** *Кожна відкрита множина $G \subset \mathbf{R}$ є не більш ніж зліченним об'єднанням інтервалів, які попарно не перетинаються, тобто*

$$\forall G \quad \exists \{I_k\}_{k=1}^{\infty} : I_k \cap I_m = \emptyset,\ k \neq m, \quad \text{та} \quad G = \bigcup_k I_k.$$

   Інтервали $I_k = (a_k, b_k)$ в зображенні $G = \bigcup\limits_k I_k$ називаються складовими інтервалами множини G.

9.

   Теорема 0.1 (про перестановку членів ряду)**.** *Якщо числовий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ є збіжним і всі його члени a_k невід'ємні, то ряд, отриманий будь-якою перестановкою членів цього ряду, є також збіжним, і суми обох рядів рівні.*

10. Нехай $E \subset I$, позначимо $\overline{E} := I\backslash E$. Тоді, як відомо з теорії множин, для будь-яких множин $E_i \subset I$:

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_k E_k} &= \bigcap_k \overline{E_k}, \\ \overline{\bigcap_k E_k} &= \bigcup_k \overline{E_k}, \\ \overline{E_1\backslash E_2} &= \overline{E_1} \cup E_2. \end{aligned} \tag{0.1}$$

0.0.1 Вступ

В курсі математичного аналізу вивчались множини, вимірні за Жорданом. Зокрема, вимірними за Жорданом є всілякі скінченні об'єднання та перетини інтервалів та сегментів. В той же час зліченні об'єднання та перетини вимірних за Жорданом множин не завжди є вимірними за Жорданом. Наприклад, як добре відомо, не вимірною за Жорданом є множина раціональних точок будь-якого інтервалу.

З іншого боку, така множина є вимірною за Борелем, оскільки вона є зліченним об'єднанням замкнених множин (раціональних точок). Дамо означення.

Означення 1.1 (множини, вимірної за Борелем)**.** Якщо множину E можна отримати, виходячи з замкнених і відкритих множин, з допомогою скінченного числа або зліченної множини операцій об'єднання та перетину, то множина E називається борельовою множиною. Обмежена борельова множина називається вимірною за Борелем.

Ще ширшим класом вимірних множин є множини, вимірні за Лебегом. В посібнику розглядаються множини , вимірні за Лебегом, означається їх міра Лебега та досліджуються властивості міри Лебега.

Зауважимо, якщо множина є вимірною за Жорданом, то вона вимірна і за Борелем, і за Лебегом, і всі відповідні міри цієї множини рівні. Існують обмежені множини, вимірні за Лебегом, але не вимірні за Борелем. Нарешті, існують множини, не вимірні і за Лебегом.

Насамкінець нагадаємо, що в посібнику міра Лебега μE вводиться лише для обмежених множин $E \subset \mathbf{R}$. Для необмежених множин міра Лебега вводиться так:

Означення 1.2. Необмежена множина $A \subset \mathbf{R}$ називається вимірною за Лебегом, якщо при кожному $d > 0$ вимірною за Лебегом є множина

$$A \cap (-d, d).$$

Мірою Лебега необмеженої вимірної за Лебегом множини $A \subset \mathbf{R}$ називається число

$$\mu A := \lim_{d \to \infty} \mu(A \cap (-d, d)).$$

1.0.2 Довжина відкритої та замкненої множини

Означення 2.1 (довжини порожньої множини)**.** Довжиною порожньої множини вважатимемо число нуль і позначатимемо $|\emptyset| = 0$.

Означення 2.2 (довжини інтервалу)**.** Довжиною інтервалу $I = (a, b)$ називається число $|I| = b - a$.

Означення 2.3 (довжини відкритої множини)**.** Довжиною відкритої множини G називається сума довжин її складових інтервалів і позначається $|G|$. Іншими словами, якщо

$$G = \bigcup_k I_k,$$

де $I_k = (a_k, b_k)$ - складові інтервали множини G, то

$$|G| := \sum_k |I_k| = \sum_k (b_k - a_k). \tag{2.1}$$

Зауваження 2.1. У наступній лемі ми покажемо, що ряд (2.1) є збіжним, тому означення 2.3 є коректним, якщо враховувати, що, внаслідок теореми про перестановку членів ряду, сума ряду (2.1) не залежить від порядку нумерації складових інтервалів I_k.

Лема 2.1. *Якщо відкрита множина G є підмножиною деякого інтервалу $I = (a, b)$, то довжина множини G менша або дорівнює довжині інтервалу I, тобто*

$$G \subset I \quad \Longrightarrow \quad |G| \le |I|\,.$$

Доведення. Розглянемо два випадки. I Випадок. Нехай G має n складових інтервалів, тобто $G = \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$. Тоді їх можна перенумерувати в порядку слідування зліва направо, і вважатимемо, що саме так вони і занумеровані. Тоді $b_k \le a_{k+1}$ для кожного $k = 1, 2, \ldots, n-1$, тому

$$\begin{aligned}
|G| = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) &= (b_n - a_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - a_k) \\
&\le (b_n - a_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = b_n - a_1 \\
&\le b - a = |I|\,.
\end{aligned}$$

II Випадок. Нехай G має зліченну кількість складових інтервалів, тобто $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$. Тоді, використовуючи означення суми ряду та перший випадок, маємо

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |I_k| \le b - a.$$

Лема доведена. □

Лема 2.2. *Якщо* $G_1 \subset G_2$, *то* $|G_1| \le |G_2|$.

Доведення. Нехай I_k^1 та I_m^2 є складовими інтервалами відповідно множин G_1 та G_2, тобто $G_1 = \bigcup\limits_k I_k^1$ та $G_2 = \bigcup\limits_m I_m^2$. Оскільки $G_1 \subset G_2$, то

$$\forall k \ \exists! m : \ I_k^1 \subset I_m^2.$$

При кожному m позначимо через K_m множину всіх індексів k таких, що $I_k^1 \subset I_m^2$. Зауважимо, множина K_m може бути скінченою, нескінченою, порожньою. За лемою 2.1, при кожному m маємо

$$\sum_{k\in K_m} |I_k^1| \le |I_m^2|,$$

звідки

$$|G_1| = \sum_k |I_k^1| = \sum_m \sum_{k\in K_m} |I_k^1| \le \sum_m |I_m^2| = |G_2|\,.$$

Лема доведена. □

Лема 2.3. *Якщо відкриті множини* G_1 *та* G_2 *не перетинаються, то довжина їх об'єднання дорівнює сумі їх довжин, тобто*

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad |G_1 \cup G_2| = |G_1| + |G_2|\,.$$

Доведення. Нехай I_k^1 та I_k^2 є складовими інтервалами відповідно множин G_1 та G_2. Спочатку припустимо, що G_1 та G_2 складені із нескінченого числа складових інтервалів, тобто $G_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^1$ та $G_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^2$. При всіх $k \ge 1$ позначимо

$$I_{2k-1} := I_k^1 \quad \text{та} \quad I_{2k} := I_k^2.$$

Оскільки множини G_1 та G_2 не перетинаються, то не перетинаються і їх складові інтервали. Тоді $G_1 \cup G_2 = \cup_{m=1}^{\infty} I_m$, отже, за означенням довжини відкритої множини,

$$|G_1 \cup G_2| = \sum_{m=1}^{\infty} |I_m| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_{2k-1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |I_{2k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^1| + \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^2|$$
$$= |G_1| + |G_2|.$$

Якщо ж одна із множин G_1 та G_2 складена із скінченого числа складових інтервалів, скажімо $G_1 = \bigcup_{k=1}^{n} I_k^1$, то позначимо

$$I_k := \begin{cases} I_k^1, & \text{якщо} \quad k \le n, \\ I_{k-n}^2, & \text{якщо} \quad k > n. \end{cases}$$

Тоді $G_1 \cup G_2 = \cup_m I_m$, отже, за означенням довжини відкритої множини,

$$|G_1 \cup G_2| = \sum_{m} |I_m| = \sum_{k=1}^{n} |I_k| + \sum_{k>n} |I_k| = \sum_{k=1}^{n} |I_k^1| + \sum_{k} |I_k^2|$$
$$= |G_1| + |G_2|.$$

Лема доведена. □

Лема 2.4. *Для кожної пари відкритих множин G_1 та G_2 має місце нерівність*

$$|G_1 \cup G_2| \le |G_1| + |G_2|\,.$$

Доведення. Нехай I_k^1 та I_k^2 є складовими інтервалами відповідно множин G_1 та G_2. Розглянемо два випадки. I випадок. Нехай

$$G_1 \cup G_2 = I = (a, b).$$

Візьмемо додатнє $\varepsilon < \frac{1}{2}(b-a)$ і позначимо $F_\varepsilon := [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Оскільки F_ε є замкненою множиною, то за лемою Гейне-Бореля існують числа n_1 та n_2 такі, що

$$F_\varepsilon \subset (\cup_{k=1}^{n_1} I_k^1) \cup (\cup_{k=1}^{n_2} I_k^2).$$

Тому

$$b - a - 2\varepsilon < \sum_{k=1}^{n_1} |I_k^1| + \sum_{k=1}^{n_2} |I_k^2| < \sum_{k} |I_k^1| + \sum_{k} |I_k^2|$$
$$= |G_1| + |G_2|\,.$$

Внаслідок довільності $\varepsilon > 0$, маємо

$$|G_1| + |G_2| \ge b - a = |I| = |G_1 \cup G_2|.$$

У випадку $G_1 \cup G_2 = I$ лема доведена.
II Загальний випадок. Позначимо чере I_m складові інтервали множини $G_1 \cup G_2$. Для кожного m позначимо черкез K_m^1 множину всіх індексів k таких, що $I_k^1 \subset I_m$. Зауважимо, що при різних m множини K_m^1 не перетинаються. Аналогічно для кожного m позначимо черкез K_m^2 множину всіх індексів k таких, що $I_k^2 \subset I_m$. Згідно з випадком I, для кожного m маємо

$$|I_m| \le \sum_{k \in K_m^1} |I_k^1| + \sum_{k \in K_m^2} |I_k^2|.$$

Тому

$$\begin{aligned}|G_1 \cup G_2| &= \sum_m |I_m| \\ &\le \sum_m \left(\sum_{k \in K_m^1} |I_k^1| + \sum_{k \in K_m^2} |I_k^2| \right) = \sum_k |I_k^1| + \sum_k |I_k^2| \\ &= |G_1| + |G_2|.\end{aligned}$$

Лема доведена.

□

Наслідок 2.1. *Для кожного набору $\{G_k\}_{k=1}^n$ відкритих множин G_k має місце нерівність*

$$\left| \bigcup_{k=1}^n G_n \right| \le \sum_{k=1}^n |G_n| .$$

Доведення. Виводиться з леми 2.4 за індукцією. □

Лема 2.5. *Для кожної відкритої множини G і кожної точки $a \in \mathbf{R}$ має місце рівність*

$$|G \backslash \{a\}| = |G| .$$

Доведення. Якщо $a \notin G$, то $G \backslash \{a\} = G$ і рівність очевидна. Рівність також очевидна, якщо $a \in G = (a_1, b_1)$. Нехай $a \in G$ і $G = \bigcup_n (a_n, b_n)$. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $a \in (a_1, b_1)$. Тоді

$$\begin{aligned}|G \backslash \{a\}| &= |(a_1, a)| + |(a, b_1)| + \sum_{n \ge 2} (b_n - a_n) = a - a_1 + b_1 - a + \sum_{n \ge 2} (b_n - a_n) \\ &= b_1 - a_1 + \sum_{n \ge 2} (b_n - a_n) = \sum_n (b_n - a_n) \\ &= |G| .\end{aligned}$$

Лема доведена. □

Означення 2.4 (довжини замкненої множини)**.** Довжиною замкненої множини F називається число

$$|F| := |G| - |G \backslash F|\,,$$

де G - будь-яка відкрита множина, що містить F.

Зауваження 2.2. Щоб переконатися в коректності означення 2.4, треба показати, що довжина множини F не залежить від вибору G.

Лема 2.6. *Якщо $F \subset G_1$ та $F \subset G_2$, то*

$$|G_1| - |G_1 \backslash F| = |G_2| - |G_2 \backslash F|\,. \tag{2.2}$$

Доведення. Розглянемо чотири випадки, в залежності від структури відкритих множин G_1 і G_2. I Випадок. Нехай $G_1 = I_1 = (a, b)$, $G_2 = I_2$. Позначимо через a^* "найлівішу" точку множини F, а через b^* - "найправішу", тобто

$$a^* \in F \quad \text{та} \quad a^* \leq x,\ \forall x \in F; \qquad b^* \in F \quad \text{та} \quad b^* \geq x,\ \forall x \in F.$$

Оскільки множина F є замкненою, то точки a^* та b^* існують. Позначимо

$$I^* := (a^*, b^*) \quad \text{та} \quad G^* := I^* \backslash F.$$

Тоді

$$G_1 \backslash F = G^* \cup (a, a^*) \cup (b^*, b),$$

і за лемою 2.3,

$$|G_1 \backslash F| = |G^*| + (a^* - a) + (b - b^*),$$

отже

$$|G_1| - |G_1 \backslash F| = b - a - (|G^*| + (a^* - a) + (b - b^*)) = b^* - a^* - |G^*|\,.$$

Аналогічно

$$|G_2| - |G_2 \backslash F| = b^* - a^* - |G^*|\,,$$

звідси

$$|G_1| - |G_1 \backslash F| = |G_2| - |G_2 \backslash F|\,.$$

У першому випадку рівність (2.2) доведено.

II Випадок. Нехай $G_1 = I = (a, b)$, $G_2 \subset G_1$, $G_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (a_k, b_k)$, де I_k - складові інтервали множини G_2. Для $n = 1$ твердження доведено у випадку I. Припустимо, що рівність (2.2) має місце для числа $n - 1$, і доведемо її по індукції для числа n. Вважатимемо, що інтервали I_k занумеровані так, що $I_n = (a_n, b_n)$ є найправішим серед них. Позначимо

$$G_1^- := (a, a_n), \quad G_1^+ := (a_n, b), \quad G_2^- := \cup_{k=1}^{n-1} I_k, \quad \text{та} \quad G_2^+ := (a_n, b_n)$$

– відкриті множини. За умовою леми, $F \subset G_2$, звідки $a_n \notin F$, тому множини

$$F^- := G_1^- \cap F = G_2^- \cap F \quad \text{та} \quad F^+ := G_1^+ \cap F = G_2^+ \cap F$$

є замкненими. За припущенням індукції маємо

$$\left|G_1^-\right| - \left|G_1^- \backslash F^-\right| = \left|G_2^-\right| - \left|G_2^- \backslash F^-\right|,$$

та

$$\left|G_1^+\right| - \left|G_1^+ \backslash F^+\right| = \left|G_2^+\right| - \left|G_2^+ \backslash F^+\right|.$$

Додамо ці дві рівності і дістанемо

$$(\left|G_1^-\right| + \left|G_1^+\right|) - (\left|G_1^- \backslash F^-\right| + \left|G_1^+ \backslash F^+\right|) = (\left|G_2^-\right| + \left|G_2^+\right|) - (\left|G_2^- \backslash F^-\right| + \left|G_2^+ \backslash F^+\right|),$$

звідки, за лемою 2.3,

$$|G_1 \setminus \{a_n\}| - |(G_1 \setminus F) \setminus \{a_n\}| = |G_2| - |G_2 \setminus F|.$$

Тепер рівність (2.2) для випадку II випливає із леми 2.5.
III Випадок. Нехай $G_1 = I = (a, b)$, $G_2 \subset G_1$, $G_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$. За умовою $F \subset G_2$, тобто замкнена множина F покрита нескінченним числом інтервалів I_k. Тоді за лемою Гейне-Бореля з цього нескінченного числа інтервалів можна виділити скінченне покриття, тобто

$$\exists n : F \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k.$$

Позначимо $G_2^- := \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$, $G_2^+ := \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} I_k$, тоді $G_2 = G_2^- \cup G_2^+$. Використовуючи лему 2.3 та випадок II, маємо

$$\begin{aligned} |G_2| - |G_2 \backslash F| &= \left|G_2^- \cup G_2^+\right| - \left|(G_2^- \backslash F) \cup G_2^+\right| \\ &= \left|G_2^-\right| + \left|G_2^+\right| - (\left|G_2^- \backslash F\right| + \left|G_2^+\right|) = \left|G_2^-\right| - \left|G_2^- \backslash F\right| \\ &= |G_1| - |G_1 \backslash F|. \end{aligned}$$

Рівність (2.2) для випадку III доведено.
IV Випадок. Нехай G_1 та G_2 - будь-які відкриті множини. Позначимо

через I довільний інтервал, що містить обидві множини G_1 і G_2. Тоді, за доведеним вище, мають місце рівності

$$|G_1| - |G_1 \backslash F| = |I| - |I \backslash F| = |G_2| - |G_2 \backslash F|.$$

Лему доведено. □

Лема 2.7. *Якщо $G \subset F$, то $|F \backslash G| = |F| - |G|$.*

Доведення. Нехай $F \subset I$. Оскільки $I \backslash (F \backslash G) = (I \backslash F) \cup G$, то, використовуючи означення довжини замкненої множини і лему 2.3, маємо

$$|I \backslash (F \backslash G)| = |I \backslash F| + |G| = |I| - |F| + |G|,$$

тобто

$$|F| - |G| = |I| - |I \backslash (F \backslash G)|.$$

За означенням довжини замкненої множини,

$$|F \backslash G| = |I| - |I \backslash (F \backslash G)|.$$

З останніх двох рівностей випливає справедливість леми. □

Лема 2.8. *Якщо замкнені множини F_1 та F_2 не перетинаються, то довжина їх об'єднання дорівнює сумі їх довжин, тобто*

$$F_1 \cap F_2 = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad |F_1 \cup F_2| = |F_1| + |F_2|.$$

Доведення. Нехай $F_1 \subset I$ та $F_2 \subset I$. Оскільки $F_1 \cup F_2$ замкнена множина, то за означенням довжини замкненої множини

$$|I \backslash (F_1 \cup F_2)| = |I| - |F_1 \cup F_2|.$$

З іншого боку, за тим же означенням,

$$|(I \backslash F_1) \backslash F_2| = |I \setminus F_1| - |F_2| = |I| - |F_1| - |F_2|.$$

Враховуючи, що $I \backslash (F_1 \cup F_2) = (I \backslash F_1) \backslash F_2$, маємо

$$|F_1 \cup F_2| = |F_1| + |F_2|.$$

Лема доведена. □

Наслідок 2.2. *Якщо замкнені множини $F_1, \ldots, F_n$ попарно не перетинаються, то*

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n} F_n \right| = \sum_{k=1}^{n} |F_n|.$$

Доведення. Виводиться з леми 2.8 за індукцією. □

1.0.3 Означення міри Лебега

Означення 3.1 (зовнішньої міри)**.** Зовнішньою мірою Лебега множини E називається число

$$\mu^* E := \inf_{G \supset E} |G| .$$

Означення 3.2 (внутрішньої міри)**.** Внутрішньою мірою Лебега множини E називається число

$$\mu_* E := \sup_{F \subset E} |F| .$$

Означення 3.3 (вимірної множини і міри Лебега)**.** Множина E називається вимірною, якщо її внутрішня міра дорівнює зовнішній, тобто якщо $\mu_* E = \mu^* E$. Мірою Лебега вимірної множини E називається число

$$\mu E := \mu_* E = \mu^* E.$$

Лема 3.1. *Для будь-якої множини E має місце нерівність*

$$\mu_* E \leq \mu^* E.$$

Доведення. Нехай множини F і G такі, що $F \subset E \subset G$. За означенням довжини замкненої множини, $|G| - |F| = |G \backslash F| \geq 0$, звідки

$$|F| \leq |G| .$$

Тоиу $\sup_{F \subset E} |F| \leq |G|$ для кожної відкритої множини $G \supset E$, отже

$$\sup_{F \subset E} |F| \leq \inf_{G \supset E} |G| ,$$

тобто

$$\mu_* E \leq \mu^* E.$$

Лема доведена □

Приклад 3.1. *Кожний інтервал I є вимірним за Лебегом і $\mu I = |I|$.*

Доведення. Нехай $I = (a, b)$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо відрізок $F_\varepsilon = [a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}]$. Оскільки $|F_\varepsilon| = |I| - \varepsilon$ та $F_\varepsilon \subset I$, то, за властивостями супремума,

$$\mu_* I \geq |F_\varepsilon| = |I| - \varepsilon.$$

З іншого боку $I \subset I$, тому

$$\mu^* I \leq |I| .$$

За лемою 3.1, $\mu_* E \leq \mu^* E$, отже $\forall \varepsilon > 0$,

$$|I| - \varepsilon \leq \mu_* I \leq \mu^* I \leq |I|\,,$$

звідки

$$\mu_* I = \mu^* I = |I|\,.$$

□

Приклад 3.2. *Кожний відрізок* $F_0 = [a, b]$ *є вимірним за Лебегом і* $\mu F_0 = |F_0|$.

Доведення. Оскільки $F_0 \subset F_0$, то $|F_0| \leq \mu_* F_0$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо інтервал $I_\varepsilon = (a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2})$. Очевидно, $F_0 \subset I_\varepsilon$, тоді, за властивостями супремума та інфімума,

$$\mu^* F_0 \leq |I_\varepsilon| = (b - a) + \varepsilon = |F_0| + \varepsilon,$$

тобто

$$|F_0| \leq \mu_* F_0 \leq \mu^* F_0 \leq |F_0| + \varepsilon$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$. З довільності ε випливає, що

$$\mu_* F_0 = \mu^* F_0 = |F_0|\,.$$

□

1.0.4 Властивості міри Лебега

Лема 4.1 (про вимірність доповнення)**.** *Якщо E вимірна множина, і $I \supset E$, то множина $\overline{E} := I \backslash E$ також вимірна, і виконується рівність*

$$\mu(I \backslash E) = \mu I - \mu E.$$

Доведення. За означенням вимірної множини,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F,\ G \subset I : F \subset E \subset G, \quad |G| \leq \mu E + \varepsilon \quad \text{та} \quad |F| \geq \mu E - \varepsilon.$$

Оскільки $\overline{E} \subset I \setminus F$ і множина $I \setminus F$ є відкритою, то

$$\mu^* \overline{E} \leq |I \backslash F| \,.$$

За означенням довжини замкненої множини,

$$|I \backslash F| = |I| - |F| \,.$$

Тому

$$\mu^* \overline{E} \leq |I| - \mu E + \varepsilon.$$

Оцінимо внутрішню міру. Позначимо $F_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \backslash G$, де $(a, b) = I$. Тоді $F_\varepsilon \subset I \backslash G \subset \overline{E}$ і F_ε - замкнена множина. Використовуючи означення довжини замкненої множини, маємо

$$\mu_* \overline{E} \geq |F_\varepsilon| = |I| - |I \backslash F_\varepsilon| = |I| - |(I \backslash [a + \varepsilon, b - \varepsilon]) \cup G| \,.$$

За лемою 2.4,

$$\begin{aligned} |I| - |(I \backslash [a + \varepsilon, b - \varepsilon]) \cup G| &\geq |I| - |I \backslash [a + \varepsilon, b - \varepsilon]| - |G| \\ &= |I| - |(a, a + \varepsilon)| - |(b - \varepsilon, b)| - |G| \\ &= |I| - 2\varepsilon - |G| \\ &\geq |I| - \mu E - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,

$$|I| - \mu E - 3\varepsilon \leq \mu_* \overline{E} \leq \mu^* \overline{E} \leq |I| - \mu E + \varepsilon$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$. Внаслідок довільності ε маємо

$$\mu_* \overline{E} = \mu^* \overline{E} = |I| - \mu E.$$

Тобто множина $I \backslash E$ вимірна і $\mu(I \backslash E) = \mu I - \mu E$. □

Властивість 4.1 (адитивність). *Якщо множини E_1 і E_2 вимірні і $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то їх о'бєднання $E_1 \cup E_2$ є також вимірною множиною і*

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2.$$

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки множини E_1 і E_2 вимірні, то існують множини F_1, G_1, F_2, G_2, такі що

$$F_1 \subset E_1 \subset G_1, \qquad |G_1| \leq \mu E_1 + \varepsilon, \qquad |F_1| \geq \mu E_1 - \varepsilon;$$
$$(4.1)$$
$$F_2 \subset E_2 \subset G_2, \qquad |G_2| \leq \mu E_2 + \varepsilon, \qquad |F_2| \geq \mu E_2 - \varepsilon.$$

Враховуючи, що $F_1 \cup F_2$ - замкнена множина і $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, за лемою 2.8 маємо

$$\mu_*(E_1 \cup E_2) \geq |F_1 \cup F_2| = |F_1| + |F_2| \geq \mu E_1 + \mu E_2 - 2\varepsilon.$$

Так само врахуємо, що $G_1 \cup G_2$ - відкрита множина і

$$(E_1 \cup E_2) \subset (G_1 \cup G_2).$$

Тому за лемою 2.4 маємо

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) \leq |G_1 \cup G_2| \leq |G_1| + |G_2| \leq \mu E_1 + \mu E_2 + 2\varepsilon.$$

Таким чином

$$\mu E_1 + \mu E_2 - 2\varepsilon \leq \mu_*(E_1 \cup E_2) \leq \mu^*(E_1 \cup E_2) \leq \mu E_1 + \mu E_2 + 2\varepsilon,$$

тоді, внаслідок довільності ε, маємо

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2.$$

□

Властивість 4.2 (напівадитивність). *Якщо множини E_1 і E_2 вимірні, то їх об'єднання $E_1 \cup E_2$ є також вимірною множиною і*

$$\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu E_1 + \mu E_2. \tag{4.2}$$

Доведення. Повторимо міркування попередньої властивості до нерівностей (4.1) включно. Оскільки $(F_1 \cup F_2) \subset (E_1 \cup E_2) \subset (G_1 \cup G_2)$, то для вимірності множини $E_1 \cup E_2$ досить довести нерівність

$$\big|(G_1 \cup G_2)\big| - \big|(F_1 \cup F_2)\big| < 4\varepsilon.$$

Для цього використаємо означення довжини замкненої множини:

$$|(G_1 \cup G_2)| - |(F_1 \cup F_2)| = |(G_1 \cup G_2) \backslash (F_1 \cup F_2)|\,.$$

Оскільки

$$(G_1 \cup G_2) \backslash (F_1 \cup F_2) \subset (G_1 \backslash F_1) \cup (G_2 \backslash F_2),$$

то за лемами 2.2 і 2.4, знову використовуючи означення довжини замкненої множини, маємо

$$\begin{aligned} |(G_1 \cup G_2) \backslash (F_1 \cup F_2)| &\le |(G_1 \backslash F_1) \cup (G_2 \backslash F_2)| \\ &\le |G_1 \backslash F_1| + |G_2 \backslash F_2| = |G_1| - |F_1| + |G_2| - |F_2| \\ &\le 4\varepsilon, \end{aligned}$$

що і треба було довести. Отже, об'єднання $E_1 \cup E_2$ є вимірною множиною. Нерівність (4.2) легко випливає з леми 2.4:

$$\mu(E_1 \cup E_2) \le |G_1 \cup G_2| \le |G_1| + |G_2| \le \mu E_1 + \mu E_2 + 2\varepsilon.$$

Внаслідок довільності ε маємо

$$\mu(E_1 \cup E_2) \le \mu E_1 + \mu E_2.$$

□

Властивість 4.3. *Якщо множини E_1 і E_2 вимірні, то їх перетин $E_1 \cap E_2$ є також вимірною множиною.*

Доведення. Нехай I – довільний інтервал, такий що $E_1 \subset I$ та $E_2 \subset I$. Тоді $E_1 \cap E_2 = I \backslash ((I \backslash E_1) \cup (I \backslash E_2))$, тому вимірність перетину випливає із леми 4.1 про вимірність доповнення і попередньої властивості. □

Властивість 4.4. *Якщо множини E_1 і E_2 вимірні, то їх різниця $E_1 \backslash E_2$ є також вимірною множиною, і якщо $E_2 \subset E_1$, то*

$$\mu(E_1 \backslash E_2) = \mu E_1 - \mu E_2. \tag{4.3}$$

Доведення. Нехай I – довільний інтервал, такий що $E_1 \subset I$ та $E_2 \subset I$. Тоді, використовуючи співвідношення (1.1), маємо

$$E_1 \backslash E_2 = \overline{\overline{E_1} \cup E_2} = E_1 \cap \overline{E_2}.$$

Вимірність $\overline{E_2}$ випливає з леми 4.1, тоді вимірність $E_1 \cap \overline{E_2}$, а отже і $E_1 \backslash E_2$, випливає з властивості 4.3. Оскільки $E_2 \cup (E_1 \backslash E_2) = E_1$ і $E_2 \cap (E_1 \backslash E_2) = \emptyset$, то, за властивостю 4.1, $\mu E_2 + \mu(E_1 \backslash E_2) = \mu E_1$, тобто

$$\mu(E_1 \backslash E_2) = \mu E_1 - \mu E_2.$$

□

1.0.5 σ - адитивність міри

Лема 5.1 (про зліченне об'єднання відкритих множин)**.** *Якщо* $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, *то* $|G| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |G_n|$.

Доведення. Нехай $G = \bigcup\limits_{k} I_k$, де $I_k = (a_k, b_k)$ - складові інтервали множини G. Розглянемо два випадки.

I випадок. G складена із скінченного числа інтервалів I_k, тобто

$$G = \bigcup_{k=1}^{N} I_k.$$

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і позначимо $F_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{N} [a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k - \frac{\varepsilon}{2^k}]$. Оскільки F_ε - замкнена множина і міститься в $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, то за лемою Гейне-Бореля існує скінченне підпокриття цієї множини, тобто

$$\exists M : F_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{M} G_k.$$

Тоді

$$G_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{M} (a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k - \frac{\varepsilon}{2^k}) \subset \bigcup_{k=1}^{N} [a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k - \frac{\varepsilon}{2^k}] = F_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{M} G_k$$

Користуючись наслідком 2.1 до леми 2.4, маємо

$$|G_\varepsilon| \le \sum_{k=1}^{M} |G_k|.$$

З іншого боку

$$|G_\varepsilon| = |G| - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{2^k}.$$

Тому

$$|G| = |G_\varepsilon| + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{2^k} < |G_\varepsilon| + 2\varepsilon \le \sum_{k=1}^{M} |G_k| + 2\varepsilon$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} |G_k| + 2\varepsilon.$$

Внаслідок довільності ε маємо твердження леми.
II випадок. Множина G складена із нескінченного числа інтервалів I_k, тобто
$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$
Оскільки
$$|G| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \infty,$$
то
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \sum_{k=N+1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$
Представимо множину G у вигляді $G = G_{(N)} \cup G_\varepsilon$, де $G_{(N)} := \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$ та $G_\varepsilon := \bigcup\limits_{k=N+1}^{\infty} I_k$. Враховуючи, що множини $G_{(N)}$ і G_ε не перетинаються, маємо
$$|G| = \left|G_{(N)}\right| + |G_\varepsilon| < \left|G_{(N)}\right| + \varepsilon.$$
Множина $G_{(N)}$ складена із скінченного числа інтервалів, отже, до неї можна застосувати висновки I-го випадку, тобто
$$\left|G_{(N)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |G_n|,$$
звідси
$$|G| \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} |G_n|.$$
Внаслідок довільності ε, отримаємо шукану нерівність. □

Теорема 5.1 (про міру зліченного об'єднання). *Нехай* $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ *і всі множини* E_n *попарно не перетинаються. Якщо всі множини* E_n *є вимірними, то множина* E *також вимірна і має місце рівність*
$$\mu E = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$
Доведення. Оцінимо внутрішню і зовнішню міри множини E і покажимо, що вони рівні. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки мнохини E_n вимірні, то
$$\forall n \quad \exists F_n \; : \; F_n \subset E_n \; \text{ і } \; \mu E_n \leq \mu F_n + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Замкнеі множини F_n попарно не перетинаються та $\bigcup\limits_{n=1}^{N} F_n \subset E$ для будь-якого N. Тому, за наслідком 2.2 леми 2.8,

$$\sum_{n=1}^{N} |F_n| = \left|\bigcup_{n=1}^{N} F_n\right| \leq \mu_* E,$$

тобто

$$\mu_* E \geq \sum_{n=1}^{N} |F_n| \geq \sum_{n=1}^{N} \mu E_n - \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}.$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{N} \mu E_n \leq \mu_* E + \varepsilon.$$

Внаслідок довільності N

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n \leq \mu_* E + \varepsilon,$$

і внаслідок довільності ε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n \leq \mu_* E.$$

Оскільки E_n вимірні, то

$$\forall n \quad \exists G_n \ : \ E_n \subset G_n \text{ і } |G_n| \leq \mu E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Тоді за лемою 5.1

$$\mu^* E \leq \left|\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |G_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n + \varepsilon,$$

внаслідок довільності ε

$$\mu^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n \leq \mu_* E \leq \mu^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n,$$

тобто

$$\mu_* E = \mu^* E = \mu E = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$

$\square$

Наслідок 5.1. *Будь-яка відкрита множина G є вимірною, і її міра дорівнює її довжині:*
$$\mu G = |G|\,.$$

Доведення. Нехай $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, де I_k - складові інтервали множини G. Ми показували, що I_k є вимірними і $|I_k| = \mu I_k$. Тому за теоремою 5.1 їх зліченне об'єднання, тобто множина G, є вимірною і

$$\mu G = \sum_{k=1}^{\infty} \mu I_k = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = |G|\,.$$

□

Наслідок 5.2. *Будь-яка замкнена множина F є вимірною, і її міра дорівнює її довжині:*
$$\mu F = |F|\,.$$

Доведення. Візьмемо будь-який інтервал I, такий що $F \subset I$, тоді за означенням довжини замкненої множини і, використовуючи лему 4.1, маємо

$$|F| = |I| - |I \backslash F| = \mu I - \mu(I \backslash F) = \mu I - (\mu I - \mu F) = \mu F.$$

□

Теорема 5.2 (про вимірність зліченного об'єднання)**.** *Нехай $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Якщо всі множини E_n є вимірними, то множина E також вимірна і має місце нерівність:*
$$\mu E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$

Доведення. Зведемо теорему 5.2 до теореми 5.1, представивши множину E у вигляді об'єднання множин, що попарно не перетинаються. Для цього позначимо $A_0 = \emptyset,\ A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, тоді

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n-1}).$$

Легко бачити, що множини $A_n \backslash A_{n-1}$ попарно не перетинаються і вони є вимірними за відповідними властивостями 4.2 та 4.4. Тому вимірність множини E стає наслідком теореми 5.1. За властивістю 4.4, оскільки $A_n \backslash A_{n-1} \subset E_n$, то

$$\mu(A_n \backslash A_{n-1}) \leq \mu E_n,$$

використовуючи теорему 5.1, маємо

$$\mu E = \mu \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \backslash A_{n-1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$

□

Теорема 5.3 (про вимірність зліченного перетину)**.** *Нехай* $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$*. Якщо всі множини* E_n *є вимірними, то множина* E *також вимірна.*

Доведення. Візьмемо інтервал I такий, що $E \subset I$. Тоді $E = I \backslash (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (I \backslash E_n))$, і, за властивістю 4.4 та теоремою 5.2, множина E є вимірною. □

1.0.6 Структура вимірних множин

Теорема 6.1 (про зростаючу послідовність множин)**.** *Якщо для всіх натуральних n множини E_n вимірні і $E_n \subset E_{n+1}$, то для множини $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ має місце рівність:*

$$\mu E = \lim_{n\to\infty} \mu E_n.$$

Доведення. Множину E представимо у вигляді об'єднання множин, які попарно не перетинаються, тобто у вигляді

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \backslash E_{n-1}),$$

де $E_0 = \emptyset$. Тоді за теоремою 5.1 виконується рівність

$$\mu E = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \backslash E_{n-1}),$$

використовуючи властивість 4.4 та означення суми ряду, маємо

$$\mu E = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu E_n - \mu E_{n-1}) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\mu E_n - \mu E_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} \mu E_N.$$

□

Теорема 6.2 (про спадну послідовність множин)**.** *Якщо для всіх натуральних n множини E_n вимірні і $E_{n+1} \subset E_n$, то для множини $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ має місце рівність*

$$\mu E = \lim_{n\to\infty} \mu E_n.$$

Доведення. Нехай I деякий інтервал, який містить всі E_n. Використовуючи рівності (1.1), маємо

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = I \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} (I \backslash E_n).$$

Очевидно, що

$$I \backslash E_n \subset I \backslash E_{n+1}.$$

Використовуючи теорему 7.1 і, враховуючи властивість 4.4 та властивості границь, маємо

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu I - \mu \bigcup_{n=1}^{\infty} (I \backslash E_n) = \mu I - \lim_{n\to\infty} \mu(I \backslash E_n) =$$

$$= \mu I - \lim_{n\to\infty} (\mu I - \mu E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu E_n.$$

Теорему доведено. □

Щоб сформулювати теорему про структуру вимірної множини, дамо два означення.

Означення 6.1 (множини типу G_δ)**.** Множину E назвемо множиною типу G_δ, якщо її можна представити у вигляді скінченного або зліченного перетину відкритих множин, тобто, якщо вона має вигляд

$$E = \bigcap_n G_n.$$

Означення 6.2 (множини типу F_σ)**.** Множину E назвемо множиною типу F_σ, якщо її можна представити у вигляді скінченного або зліченного об'єднання замкнених множин, тобто, якщо вона має вигляд

$$E = \bigcup_n F_n.$$

Зауваження 6.1. За теоремами 5.2 і 5.3 кожна множина E типу G_δ є вимірною і кожна множина E типу F_σ також є вимірною.

Теорема 6.3 (про структуру вимірної множини)**.** *Якщо множина E є вимірною, то існує множина E_δ типу G_δ та множина E_σ типу F_σ такі, що $E_\sigma \subset E \subset E_\delta$ і $\mu E_\sigma = \mu E = \mu E_\delta$.*

Доведення. За означенням вимірної множини

$$\forall n \quad \exists F_n, G_n : \mu E - \frac{1}{n} < \mu F_n \le \mu E \le \mu G_n < \mu E + \frac{1}{n}.$$

Позначимо $E_\sigma = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m, \quad E_\delta = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G_m$. Очевидно, що множина E_σ є множиною типу F_σ, а множина E_δ є множиною типу G_δ. Тоді

$$\forall m \quad F_m \subset E \Longrightarrow E_\sigma \subset E \Longrightarrow \mu E_\sigma \le \mu E,$$

$$\forall n \quad E_\sigma \supset F_n \Longrightarrow \mu E_\sigma \geq \mu F_n > \mu E - \frac{1}{n}.$$

Отже,

1. $E_\sigma \subset E$;
2. $\forall n \quad \mu E - \frac{1}{n} < \mu E_\sigma \leq \mu E \Longrightarrow \mu E_\sigma = \mu E.$

   З іншого боку

   $$\forall m \quad G_m \supset E \Longrightarrow E_\delta \supset E \Longrightarrow \mu E_\delta \geq \mu E,$$

   $$\forall n \quad E_\delta \subset G_n \Longrightarrow \mu E_\delta \leq \mu G_n < \mu E + \frac{1}{n}.$$

   Отже,

3. $E_\delta \supset E$;
4. $\forall n \quad \mu E \leq \mu E_\delta < \mu E + \frac{1}{n} \Longrightarrow \mu E_\delta = \mu E.$

Справедливість теореми випливає з справедливості п.1-4. $\square$

1.0.7 Теорема Лебега про інтеграл Рімана

Щоб сформулювати терему Лебега, дамо означення.

Означення 7.1 (майже скрізь)**.** Вираз *майже скрізь на* E, або *м. с. на* E, вживають замість слів *скрізь на* E*, за виключенням множини* E_0 *міри нуль*, або, що те саме, замість виразу *на* $E \backslash E_0$*, де* $\mu E_0 = 0$.

Російською мовою п.в. - *почти везде* чи *почти всюду* , англійською а.е.- *almost everywhere.*

Теорема 7.1 (Лебега про інтеграл Рімана)**.** *Нехай функція* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *є обмеженою на відрізку* $[a, b]$*. Для того щоб вона була інтегровною за Ріманом на відрізку* $[a, b]$*, необхідно і достатньо, щоб вона була майже скрізь неперервною на відрізку* $[a, b]$*.*

Перед доведенням теореми Лебега нагадаємо критерій інтегровності за Ріманом та означення точки розриву функції.

Критерій 7.1 (інтегровності функції за Ріманом). Обмежена функція $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ є інтегровною за Ріманом на $[a, b]$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться розбиття $\lambda = \{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{l}$ відрізка $[a, b]$ на відрізки $[a_i, b_i]$,

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 \cdots < b_l = b,$$

таке, що

$$\sigma(f, \lambda) := \sum_{i=1}^{l} \omega(f, [a_i, b_i])(b_i - a_i) < \varepsilon,$$

де

$$\omega(f, [a_i, b_i]) := \sup_{x \in][a_i, b_i]} f(x) - \inf_{x \in][a_i, b_i]} f(x)$$

– коливання функції f на $[a_i, b_i]$.

Означення 7.2 (точки розриву)**.** Функція $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ називається розривною в точці $x \in [a, b]$, якщо вона не є неперервною в цій точці, тобто $\exists \varepsilon > 0$ таке, що $\forall \delta > 0$ існує точка $x' \in [a, b]$ така, що

$$|x - x'| < \delta \quad i \quad |f(x) - f(x')| > \varepsilon.$$

Доведення необхідності в теоремі 7.1. Позначимо через E множину точок розриву функції f. Для кожного $\varepsilon > 0$ позначимо через E_ε множину точок $x \in [a, b]$ таких, що $\forall x \in E_\varepsilon$ та $\forall \delta > 0$ існує точка $x' \in [a, b]$ така, що

$$|x - x'| < \delta \quad i \quad |f(x) - f(x')| > \varepsilon.$$

За означенням точки розриву,

$$E = \cup_{\varepsilon>0} E_\varepsilon.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покажемо, що $\mu E_\varepsilon = 0$. Для цього розглянемо довільне розбиття $\lambda = \{[a_i, b_i]\}_{i=1}^l$ відрізка $[a, b]$ і позначимо через K_ε множину всіх індексів i таких, що

$$(a_i, b_i) \cap E_\varepsilon \neq \emptyset.$$

Оскільки $\cup_{i\in K_\varepsilon}(a_i, b_i)$ є відкритою множиною, яка містить (можливо, за виключенням скінченого числа точок) множину E_ε, то за означенням зовнішньої міри Лебега,

$$\begin{aligned} \mu^* E_\varepsilon &\le \mu\left(\cup_{i\in K_\varepsilon}(a_i, b_i)\right) \\ &= \sum_{i\in K_\varepsilon}(b_i - a_i). \end{aligned}$$

Із означень множин E_ε та K_ε випливає оцінка $\omega(f, [a_i, b_i]) > \varepsilon$ для кожного $i \in K_\varepsilon$. Тому

$$\begin{aligned} \sigma(f, \lambda) &= \sum_{i=1}^{l} \omega(f, [a_i, b_i])(b_i - a_i) \\ &\ge \sum_{i\in K_\varepsilon} \omega(f, [a_i, b_i])(b_i - a_i) > \varepsilon \sum_{i\in K_\varepsilon}(b_i - a_i) \\ &\ge \varepsilon \mu^* E_\varepsilon. \end{aligned}$$

Ця нерівність справедлива для кожного розбиття λ, отже за критерієм 7.1, $\mu^* E_\varepsilon = 0$, звідки $\mu E_\varepsilon = 0$. Нарешті, із рівностей

$$E = \cup_{\varepsilon>0} E_\varepsilon = \cup_{n=1}^\infty E_{1/n}$$

випливає, що

$$\mu E \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_{1/n} = 0.$$

Необхідність доведена. □

Доведення достатності в теоремі 7.1. Як і раніше, нехай E – множина точок розриву функції f. Позначимо

$$M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки множина $(a,b) \setminus E$ є вимірною і $\mu((a,b) \setminus E) = b-a$, то за означенням внутрішньої міри Лебега, існує замкнена множина F така, що

$$F \subset (a,b) \setminus E$$

та

$$\mu F > b - a - \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Функція f неперервна на F, отже для кожної точки $x \in F$ існують число δ_x та окіл $O_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a,b)$ такий, що

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall x' \in O_x. \tag{7.1}$$

Позначимо

$$O_x^* := \left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2} \right), \quad x \in F.$$

За лемою Гейне-Бореля, із покриття замкненої множини F відкритими множинами O_x^* виділимо скінчене покриття. Нехай, скажімо,

$$F \subset \cup_{j=1}^{l} O_{x_j}^*, \quad x_j \in F.$$

Позначимо $[a_j, b_j] := \left[x_j - \frac{\delta_{x_j}}{2}, x + \frac{\delta_{x_j}}{2} \right]$,

$$F^* := \cup_{j=1}^{l} [a_j, b_j]$$

та зауважимо, що оскільки $[a_j, b_j] \subset O_{x_j}$, то, враховуючи (7.1),

$$\begin{aligned} \omega(f, [a_j, b_j]) &= \sup_{x \in [a_j, b_j]} (f(x) - f(x_j)) - \inf_{x \in [a_j, b_j]} (f(x) - f(x_j)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Множина F^* є замкненою, і отже вимірною, крім того $F \subset F^*$, тому

$$\mu([a,b] \setminus F^*) = b - a - \mu F^* \leq b - a - \mu F < \frac{\epsilon}{4M}. \tag{7.3}$$

Представимо її у вигляді

$$F^* := \cup_{i=1}^{m} [a_i^*, b_i^*],$$

де внутрішності відрізків $[a_i^*, b_i^*]$ не перетинаються, і для кожного $i = 1, \ldots, m$ існує $j = 1, \ldots, l$ таке, що $[a_i^*, b_i^*] \subset [a_j, b_j]$. За побудовою та нерівністю (7.2), для кожного $i = 1, \ldots, m$ маємо

$$\omega(f, [a_i^*, b_i^*]) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Нарешті, представимо множину $(a, b) \setminus F^*$ у вигляді

$$(a, b) \setminus F^* = \cup_{s=1}^{k} (a'_s, b'_s).$$

Тоді набір

$$\lambda = \{[a_i^*, b_i^*]\}_{i=1}^{m} \cup \{[a'_s, b'_s]\}_{s=1}^{k}$$

є розбиттям множини $[a, b]$ і при цьому

$$\begin{aligned}
\sigma(f, \lambda) &= \sum_{i=1}^{m} \omega(f, [a_i^*, b_i^*])(b_i^* - a_i^*) + \sum_{s=1}^{k} \omega(f, [a'_s, b'_s])(b'_s - a'_s) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{m} (b_i^* - a_i^*) + 2M \sum_{s=1}^{k} (b'_s - a'_s) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b - a) + 2M\mu([a, b] \setminus F^*) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

де в останній нерівності врахована оцінка (7.3). Тепер інтегровність функції f випливає із критерію 7.1 інтегровності функції за Ріманом. Теорему доведено. $\square$

1.0.8 Література

1. Натансон І.П. Основи теорії функцій дійсної змінної.- К.: Радянська школа, 1950.
2. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. - К.: Вища школа, 1974.
3. Теляковский С.А. Сборник задач по теории функций действительного переменного.- М.: Наука, 1980.
4. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу.- М.: Просвещение, 1981.
5. Толстов Г.П. Теория меры.- М.: Наука, 1979.
6. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П. Действительный анализ в задачах. - М.: Физматлит, 2005.