Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Л.Л. ЗАЙЦЕВА

Завдання для самостійних робіт з

АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Частина III

КИЇВ — 2013

УДК 512.8

Р е ц е н з е н т и:
д-р фіз.-мат. наук, проф. Вільчинський С.Й.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Єфіменко С.В.

Зайцева Л.Л.

Завдання для самостійних робіт з аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Частина III. Навчально-методичний посібник / Зайцева Л.Л. — К.: 2013. — 43 с.

Наведено завдання для проведення самостійних робіт з курсу "Аналітична геометрія та лінійна алгебра"(фізичний факультет) та "Загальна алгебра"(радіофізичний факультет). Методична розробка включає 30 варіантів завдань, кожний варіант містить 10 задач, які охоплюють різні розділи даного курсу. Наприкінці наведено відповіді до всіх задач.

Для студентів, викладачів фізико-matematematичних спеціальностей.

Затверджено вченою радою радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 8 від 15 квітня 2013 року)

Варіант 1.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина верхньотрикутних матриць розміру 2×2 з дійсними елементами.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елементи матриці a_{11} і a_{22} міняє місцями. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (2, -3, -1)^T, \qquad e'_2 = (1, 1, 0)^T, \qquad e'_3 = (1, -2, -1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2, 1, -3)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-1, 5, 2)^T, \qquad f_2 = (3, -1, -2)^T, \qquad f_3 = (1, -2, -3)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\text{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина вектор-стовпчиків довжини 4 з комплексними елементами, у яких сума координат дорівнює 0.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент вектор-стовпчика x_1 замінює на $x_1 - x_2$, а елемент x_3 замінює на $x_2 + x_3$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1, 0, 1)^T, \qquad e_2' = (2, -2, -1)^T, \qquad e_3' = (-2, 1, -1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (-1, 2, 1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (4, -1, 4)^T, \qquad f_2 = (3, -2, 2)^T, \qquad f_3 = (1, -1, -2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Варіант 3.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина матриць розміру 3×2 з комплексними елементами.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке перший і другий стовпчики матриці міняє місцями. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (-1, -1, -3)^T, \qquad e_2' = (-2, -3, -4)^T, \qquad e_3' = (1, 1, 2)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, 2, 3)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (2, 3, 1)^T, \qquad f_2 = (1, -1, 3)^T, \qquad f_3 = (1, 3, -4)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 4.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина вектор-рядків довжини 5 з дійсними елементами, у яких перша координата співпадає з останньою.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент вектор-стовпчика x_2 замінює на $x_1 + x_2$, а елемент x_4 замінює на $x_4 + x_5$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (1, -1, 3)^T, \qquad e'_2 = (0, 1, -2)^T, \qquad e'_3 = (1, 3, -3)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, 2, -3)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (3, -3, 5)^T, \qquad f_2 = (1, 3, -1)^T, \qquad f_3 = (4, 0, 2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -8 \\ -4 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина кососиметричних матриць розміру 3×3 з дійсними елементами.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент матриці a_{13} міняє на $a_{12}+a_{13}+a_{23}$, а елемент a_{31} — на $a_{21}+a_{31}+a_{32}$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (-1, 1, 1)^T, \qquad e_2' = (2, 2, -3)^T, \qquad e_3' = (-3, 1, 4)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, -1, -2)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (1, -3, 1)^T, \qquad f_2 = (-1, 3, 1)^T, \qquad f_3 = (1, -5, 2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -10 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 6.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина вектор-стовпчиків довжини 6 з комплексними елементами, у яких сума координат з парними номерами дорівнює 0.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке циклічно міняє місцями елементи вектор-стовпчика з непарними номерами (x_1 замінює на x_3, x_3 на x_5, а x_5 на x_1). Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (2, 1, 2)^T, \qquad e_2' = (3, -1, 2)^T, \qquad e_3' = (0, 2, 1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, 1, 1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (1, 1, 2)^T, \qquad f_2 = (-2, 1, -2)^T, \qquad f_3 = (1, 2, 1)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -8 & -7 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 7.

1 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

2 Нехай V — це множина нижньотрикутних матриць розміру 2×2 з комплексними елементами.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент матриці a_{11} міняє на $a_{21} - a_{11}$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

3 Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1, -2, -1)^T, \qquad e_2' = (1, 0, -2)^T, \qquad e_3' = (-1, 3, 1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2, -1, -3)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (2, -3, -1)^T, \qquad f_2 = (2, -2, -3)^T, \qquad f_3 = (3, -1, -3)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

4 Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & 5 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Варiант 8.

$\boxed{1}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нехай V — це множина вектор-рядкiв довжини 5 з комплексними елементами, у яких координати з парними номерами дорiвнюють 0.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис i розмiрнiсть V (довести, що знайдений набiр векторiв є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це вiдображення, яке елемент вектор-стовпчика x_3 замiнює на $x_1 - x_3 + x_5$. Довести, що φ — лiнiйне вiдображення (лiнiйний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, вiдносно базису, побудованого в пунктi б.

$\boxed{3}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1, -1, 0)^T, \qquad e_2' = (1, -3, 2)^T, \qquad e_3' = (-4, 1, 2)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом i знайти координати вектора

$$x = (-1, -1, 2)^T.$$

в базисi (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-2, -1, 2)^T, \qquad f_2 = (-4, 5, -2)^T, \qquad f_3 = (1, -2, 2)^T$$

є базисом i знайти матрицю переходу вiд базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лiнiйний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

в базисi (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисi (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{4}$ Нехай матриця лiнiйного оператора φ в одиничному базисi задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до дiагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S i вiдповiдну дiагональну матрицю A' (обчисливши власнi числа i власнi вектори матрицi лiнiйного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -2 \\ -7 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Варіант 9.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина множина матриць розміру 3×2 з дійсними елементами.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке перший і третій рядки матриці міняє місцями. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (-3, 1, -3)^T, \qquad e_2' = (-1, -2, 2)^T, \qquad e_3' = (1, 1, -1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2, 1, -1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-5, -2, 0)^T, \qquad f_2 = (0, 2, -2)^T, \qquad f_3 = (4, 2, 2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -8 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Варіант 10.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина вектор-стовпчиків довжини 4 з дійсними елементами, у яких сума координат з парними номерами дорівнює сумі координат з непарними номерами.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке міняє місцями елементи вектор-стовпчика x_1 і x_2, а також x_3 і x_4. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (1, 1, -1)^T, \qquad e'_2 = (-4, 4, 3)^T, \qquad e'_3 = (-2, -1, 2)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (-1, 1, 1)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-1, 1, 1)^T, \qquad f_2 = (-2, -4, 3)^T, \qquad f_3 = (-3, 1, 2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 11.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина симетричних матриць розміру 3×3 з комплексними елементами.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке міняє місцями елементи матриці a_{12} і a_{23}, а також елементи a_{21} і a_{32}. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (2, -1, 1)^T, \qquad e'_2 = (1, 3, -2)^T, \qquad e'_3 = (2, -4, 3)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (3, -5, 4)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (3, -2, 1)^T, \qquad f_2 = (-5, 1, -2)^T, \qquad f_3 = (-1, -4, 2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Варіант 12.

1 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

2 Нехай V — це множина вектор-рядків довжини 6 з дійсними елементами, у яких координати з парними номерами дорівнюють 0.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент вектор-стовпчика x_5 замінює на $x_3 - x_5$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

3 Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (2, -2, -1)^T, \qquad e'_2 = (1, -5, 2)^T, \qquad e'_3 = (0, -2, 1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, 1, -1)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (1, 3, -2)^T, \qquad f_2 = (-1, 3, -3)^T, \qquad f_3 = (-4, 2, 2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

4 Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 13.

$\boxed{1}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нехай V — це множина діагональних матриць розміру 3×3 з дійсними елементами.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент матриці a_{11} міняє на $a_{11} + a_{33}$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{3}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (1, -4, 6)^T, \qquad e'_2 = (-1, 1, 1)^T, \qquad e'_3 = (2, -3, 1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (-3, 3, 1)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-1, 1, 3)^T, \qquad f_2 = (1, -3, 1)^T, \qquad f_3 = (-3, 1, 3)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

$\boxed{4}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)} \quad A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ -8 & -16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 14.

$\boxed{1}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нехай V — це множина вектор-стовпчиків довжини 5 з комплексними елементами, у яких сума координат з непарними номерами дорівнює 0.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке міняє місцями елементи вектор-стовпчика x_1 і x_5, а також x_2 і x_4. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{3}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (-2, 3, 2)^T, \qquad e_2' = (-1, 3, -1)^T, \qquad e_3' = (0, 1, -1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, -3, 2)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-1, 4, -4)^T, \qquad f_2 = (-1, 4, -3)^T, \qquad f_3 = (-1, 2, 1)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{4}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -10 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 15.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина матриць розміру 2×3 з комплексними елементами.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке перший і другий рядки матриці міняє місцями. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1, -3, 3)^T, \qquad e_2' = (4, 1, 2)^T, \qquad e_3' = (1, 1, 0)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2, 1, 1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-3, -3, 1)^T, \qquad f_2 = (3, -1, 3)^T, \qquad f_3 = (2, 1, 1)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\text{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Варіант 16.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина вектор-рядків довжини 6 з дійсними елементами, у яких сума координат з парними номерами дорівнює 0.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент вектор-стовпчика x_2 замінює на $x_2 - x_1$, а елемент x_6 замінює на $x_1 + x_6$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1, 1, -3)^T, \qquad e_2' = (1, 3, 1)^T, \qquad e_3' = (-2, -4, 3)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, 1, -2)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-1, 1, 3)^T, \qquad f_2 = (1, 5, -1)^T, \qquad f_3 = (1, 3, 2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Варіант 17.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина нижньотрикутних матриць розміру 2×2 з дійсними елементами.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент матриці a_{11} міняє на $a_{11} + a_{21} + a_{22}$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1, -2, -1)^T, \qquad e_2' = (-3, 3, 2)^T, \qquad e_3' = (1, 2, 1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (6, -1, -1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-2, 3, 1)^T, \qquad f_2 = (2, 2, 2)^T, \qquad f_3 = (-3, 4, 3)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Варіант 18.

1 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

2 Нехай V — це множина вектор-стовпчиків довжини 5 з дійсними елементами, у яких координати з парними номерами дорівнюють 0.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент вектор-стовпчика x_1 замінює на середнє арифметичне елементів x_1, x_3 і x_5. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

3 Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (2, -1, 2)^T, \qquad e_2' = (1, -2, 2)^T, \qquad e_3' = (1, 2, -1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, -1, 1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (1, 4, -3)^T, \qquad f_2 = (2, -2, 3)^T, \qquad f_3 = (1, -4, 4)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

4 Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & -3 & -6 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & -1 & 4 \\ -10 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Варіант 19.

$\boxed{1}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нехай V — це множина матриць розміру 3×3 з комплексними елементами, у яких елементи головної діагоналі дорівнюють 0.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке збільшує в 2 рази значення всіх елементів, у яких номер стовпчика більший за номер рядка. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{3}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (3,4,5)^T, \qquad e'_2 = (0,1,3)^T, \qquad e'_3 = (2,3,4)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2,1,-1)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (2,3,3)^T, \qquad f_2 = (4,2,-3)^T, \qquad f_3 = (4,4,1)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

$\boxed{4}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

а) $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 8 \\ 6 & -1 & -8 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Варіант 20.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина вектор-рядків довжини 4 з комплексними елементами, у яких сума координат з парними номерами дорівнює сумі координат з непарними номерами.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент вектор-стовпчика x_1 замінює на $x_1 + x_2$,елемент x_3 замінює на $x_3 + x_4$, а елементи з парними номерами збільшує в 2 рази. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1, 5, 1)^T, \qquad e_2' = (1, 3, -1)^T, \qquad e_3' = (-2, -3, 4)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2, 2, -4)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (2, 3, -2)^T, \qquad f_2 = (1, 2, 1)^T, \qquad f_3 = (1, 3, -3)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

а) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Варіант 21.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина матриць розміру 2×3 з дійсними елементами.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке перший стовпчик матриці міняє на поелементну суму першого і третього стовпчиків. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (1, 1, -1)^T, \qquad e'_2 = (2, 2, -1)^T, \qquad e'_3 = (1, 3, 5)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2, 2, 1)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (4, 4, -1)^T, \qquad f_2 = (3, 1, -5)^T, \qquad f_3 = (-1, -1, 4)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Варіант 22.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина вектор-стовпчиків довжини 6 з дійсними елементами, у яких координати з парними номерами однакові.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке до кожного елемента з парним номером додає значення елемента x_1. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (-4, 0, 1)^T, \qquad e_2' = (1, -1, -1)^T, \qquad e_3' = (-2, 1, 1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (-3, 1, 1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (2, -1, -2)^T, \qquad f_2 = (2, 3, 3)^T, \qquad f_3 = (-3, 1, 3)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \\ 11 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 23.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина верхньотрикутних матриць розміру 2×2 з комплексними елементами.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент матриці a_{22} міняє на $a_{22} - a_{11}$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (-2, -1, -1)^T, \qquad e'_2 = (-1, 1, -3)^T, \qquad e'_3 = (3, 1, 2)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, -1, 2)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (2, 3, -4)^T, \qquad f_2 = (5, 1, 4)^T, \qquad f_3 = (4, 1, 1)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 24.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина вектор-рядків довжини 5 з комплексними елементами, у яких сума координат з непарними номерами дорівнює 0.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент вектор-стовпчика x_1 замінює на $x_1 + x_2$,елемент x_3 замінює на $x_2 + x_3$, а елемент x_5 замінює на $x_5 - 2x_2$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (2, -1, -3)^T, \qquad e_2' = (1, -1, -2)^T, \qquad e_3' = (-5, 1, 4)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2, 2, 2)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (1, -1, -4)^T, \qquad f_2 = (2, 3, 1)^T, \qquad f_3 = (4, -1, -3)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Варіант 25.

1 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

2 Нехай V — це множина матриць розміру 3×3 з дійсними елементами, у яких елементи головної діагоналі дорівнюють 0.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке змінює знак на протилежний у всіх елементів, у яких номер рядка більший за номер стовпчика. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

3 Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1, -4, -5)^T, \qquad e_2' = (-2, 1, 1)^T, \qquad e_3' = (1, 2, 3)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2, 1, 1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (1, -2, -3)^T, \qquad f_2 = (-5, 1, 2)^T, \qquad f_3 = (-1, 1, 2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

4 Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 26.

1 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

2 Нехай V — це множина вектор-стовпчиків довжини 6 з комплексними елементами, у яких координати з парними номерами дорівнюють 0.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент вектор-стовпчика x_1 замінює на $x_3 - x_1$,елемент x_3 замінює на $x_5 - x_3$, а елемент x_5 замінює на $x_1 - x_5$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

3 Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (2, -5, 4)^T, \qquad e_2' = (-5, 0, 1)^T, \qquad e_3' = (1, 2, -2)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, 1, -1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (-3, 2, -1)^T, \qquad f_2 = (-2, -1, 1)^T, \qquad f_3 = (1, -1, 1)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

4 Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 11 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -6 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Варіант 27.

1 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2 Нехай V — це множина діагональних матриць розміру 3×3 з комплексними елементами.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент матриці a_{22} міняє на $a_{11} + a_{33} - a_{22}$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

3 Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1,1,1)^T, \qquad e_2' = (1,2,-4)^T, \qquad e_3' = (4,4,3)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (2,3,-4)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (1,1,2)^T, \qquad f_2 = (1,2,-3)^T, \qquad f_3 = (1,2,-2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

4 Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 2 \\ 10 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 11 & -11 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Варіант 28.

1 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2 Нехай V — це множина вектор-рядків довжини 4 з дійсними елементами, у яких сума координат дорівнює 0.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке циклічно міняє місцями елементи вектор-стовпчика x_1 замінює на x_2, x_2 на x_3, x_3 на x_4, а x_4 на x_1). Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

3 Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (-2, 2, -1)^T, \qquad e'_2 = (-3, 1, -3)^T, \qquad e'_3 = (2, 0, 3)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, -1, -1)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (2, 2, 5)^T, \qquad f_2 = (1, 1, 4)^T, \qquad f_3 = (4, 2, 5)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

4 Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Варіант 29.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина симетричних матриць розміру 3×3 з дійсними елементами.

а) Довести, що вектори V є дійсним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент матриці a_{13} міняє на середнє арифметичне елементів a_{12} і a_{23}, а елемент a_{31} — на середнє арифметичне елементів a_{21} і a_{32}. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e_1' = (1, 1, -1)^T, \qquad e_2' = (-1, 0, -2)^T, \qquad e_3' = (1, 1, -3)^T.$$

а) Довести, що вектори (e_1', e_2', e_3') є базисом і знайти координати вектора

$$x = (3, 1, -1)^T.$$

в базисі (e_1', e_2', e_3').

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (4, -1, 3)^T, \qquad f_2 = (1, 3, 1)^T, \qquad f_3 = (4, 4, -2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e_1', e_2', e_3') до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e_1', e_2', e_3').

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

$$\textbf{а)}\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -9 \\ -1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Варіант 30.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нехай V — це множина вектор-стовпчиків довжини 5 з комплексними елементами, у яких перша координата співпадає з останньою.

а) Довести, що вектори V є комплексним векторним простором.

б) Вказати базис і розмірність V (довести, що знайдений набір векторів є базисом V).

в) Нехай $\varphi : V \to V$ — це відображення, яке елемент вектор-стовпчика x_1 замінює на $x_1 - x_3$, а елемент x_5 замінює на $x_5 - x_3$. Довести, що φ — лінійне відображення (лінійний оператор, заданий на V).

г) Знайти матрицю φ, відносно базису, побудованого в пункті б.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нехай (e_1, e_2, e_3) — одиничний базис,

$$e'_1 = (5, -2, -1)^T, \qquad e'_2 = (-2, -1, 3)^T, \qquad e'_3 = (3, -1, -1)^T.$$

а) Довести, що вектори (e'_1, e'_2, e'_3) є базисом і знайти координати вектора

$$x = (1, 1, -3)^T.$$

в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

б) Довести, що вектори

$$f_1 = (5, -1, -2)^T, \qquad f_2 = (-2, 1, 1)^T, \qquad f_3 = (-3, 1, 2)^T$$

є базисом і знайти матрицю переходу від базису (e'_1, e'_2, e'_3) до базису (f_1, f_2, f_3).

в) Нехай лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисі (e_1, e_2, e_3). Знайти матрицю оператора φ в базисі (e'_1, e'_2, e'_3).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нехай матриця лінійного оператора φ в одиничному базисі задається матрицею A. Чи можна матрицю φ звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти матрицю переходу до нового базису S і відповідну діагональну матрицю A' (обчисливши власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора), якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -8 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 12 & -5 \end{pmatrix}$.

ВІДПОВІДІ.

1. 1: 4; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 3$;

   2г: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3а: $(-4, 3, 7)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} -7 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$;

   4а: $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

   4б: $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

2. 1: 1; 2б: базис: $e_1 = (1, 0, 0, -1)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, -1)^T$, $e_3 = (0, 0, 1, -1)^T$, $\dim V = 3$;

   2г: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(3, 0, 2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} -4 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$;

   4а: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

   4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 1: 4; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   $e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 6$; 2г: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   3а: $(-1, -1, -2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 11 & 14 & -8 \\ -6 & -5 & 3 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

   4а: $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

   4б: $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. 1: 9; 2б: базис: $e_1 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$,

   $\dim V = 4$; 2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(1, 3, 0)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 8 & -4 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 3 & -6 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. 1: 10; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\dim V = 3$; 2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(3, -1, -2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -8 & 0 & -11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 13 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

6. 1: 5; 2б: базис: $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, -1)^T$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$,

$e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, -1)^T$, $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$, $\dim V = 5$; 2г: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3а: $(2, -1, -1)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & -3 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 0 & -11 & 10 \\ -1 & 6 & -7 \\ -1 & 11 & -11 \end{pmatrix}$;

4а: $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. 1: 13; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 3$;

2г: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(2, 1, 1)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} -1 & -7 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4а: $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

8. 1: 2; 2б: базис: $e_1=(1,0,0,0,0)$, $e_2=(0,0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,0,0,1)$, $\dim V=3$;
2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(-2,1,0)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} -6 & -12 & 11 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$;
4а: $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
4б: $S=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. 1: -10; 2б: базис: $e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$e_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_6=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V=6$; 2г: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3а: $(0,1,3)^T$;
3б: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -10 & 6 \\ 0 & -13 & 8 \end{pmatrix}$; 4а: $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; 4б: $S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

10. 1: -6; 2б: базис: $e_1=(1,0,0,1)^T$, $e_2=(0,1,0,-1)^T$, $e_3=(0,0,1,1)^T$, $\dim V=3$;
2г: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(3,0,2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$;
4а: $S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;
4б: $S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. 1: 5; 2б: базис: $e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_6=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V=6$;

2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(2, -1, 0)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -7 & -8 & -7 \\ 5 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} 9 & 10 & 4 \\ -7 & -8 & -3 \\ -7 & -8 & -3 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. 1: 8; 2б: базис: $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $\dim V = 3$; 2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 3а: $(0, 1, -3)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -6 & -3 \\ 0 & 13 & 6 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

13. 1: -1; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 3$; 2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(1, -2, -3)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & -7 & -8 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 1 & -9 & 18 \\ 3 & -6 & 13 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

14. 1: 7; 2б: базис: $e_1 = (1, 0, 0, 0, -1)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, -1)^T$, $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0)^T$, $\dim V = 4$; 2г: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3а: $(1, -3, 3)^T$;

3б: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -1 & 9 & 4 \\ 9 & -14 & -8 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; 4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15. 1: -10; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 6$;

2г: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3а: $(1, -1, 5)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 15 & 15 & 2 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ -6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

16. 1: -4; 2б: базис: $e_1 = (1,0,0,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0,0,-1)$, $e_3 = (0,0,1,0,0,0)$, $e_4 = (0,0,0,1,0,-1)$, $e_5 = (0,0,0,0,1,0)$, $\dim V = 5$; 2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3а: $(2, 1, 1)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 8 & -12 & 1 \\ 6 & -6 & -2 \\ 8 & -10 & -1 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4б: $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

17. 1: -1; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 3$;

2г: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(1, -1, 2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 17 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$;

4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

18. 1: 6; 2б: базис: $e_1 = (1,0,0,0,0)^T$, $e_2 = (0,0,1,0,0)^T$, $e_3 = (0,0,0,0,1)^T$, $\dim V = 3$;

2г: $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(-1, 2, 1)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 \\ -14 & -5 & -7 \\ -7 & -1 & -6 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. 1: -6; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\dim V = 6$;

2г: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(2, -1, -2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} -2 & 12 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \\ 9 & -16 & 3 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

20. 1: -5; 2б: базис: $e_1 = (1, 0, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, -1)$, $e_3 = (0, 0, 1, 1)$, $\dim V = 3$;

2г: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 3а: $(1, -3, -2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -7 & -9 & 8 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} -5 & -5 & 8 \\ -3 & 3 & -10 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

21. 1: 4; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 6$;

2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(-4, 3, 0)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} 12 & 17 & -18 \\ -6 & -8 & 14 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;
4б: $S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

22. 1: 2; 2б: базис: $e_1 = (1,0,0,0,0,0)^T$, $e_2 = (0,0,1,0,0,0)^T$, $e_3 = (0,0,0,0,1,0)^T$, $e_4 = (0,1,0,1,0,1)^T$, $\dim V = 4$; 2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(0,1,2)^T$;
3б: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -8 & -7 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,
$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

23. 1: 6; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 3$;
2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(4,0,3)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 7 & 8 & -12 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$;
4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;
4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

24. 1: -2; 2б: базис: $e_1 = (1,0,0,0,-1)$, $e_2 = (0,1,0,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0,-1)$, $e_4 = (0,0,0,1,0)$, $\dim V = 4$; 2г: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(0,-3,-1)^T$;
3б: $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -2 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -10 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

25. 1: 2; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\dim V = 6$;

2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3а: $(-2,-3,-2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;
3в: $\begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ -7 & -4 & 9 \\ -7 & -6 & 11 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;
4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

26. 1: 10; 2б: базис: $e_1 = (1,0,0,0,0,0)^T$, $e_2 = (0,0,1,0,0,0)^T$, $e_3 = (0,0,0,0,1,0)^T$, $\dim V = 3$; 2г: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3а: $(-1,-1,-2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$;
3в: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;
4б: $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

27. 1: 8; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 3$;
2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(-3,1,1)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;
4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

28. 1: -8; 2б: базис: $e_1 = (1,0,0,-1)$, $e_2 = (0,1,0,-1)$, $e_3 = (0,0,1,-1)$, $\dim V = 3$;
2г: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 3а: $(1,-3,-3)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;
3в: $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ -8 & -10 & 6 \\ -6 & -9 & 6 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;
4б: $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

29. 1: 1; 2б: базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim V = 6$;

2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(-1, -2, 2)^T$; 3б: $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 5 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

3в: $\begin{pmatrix} -10 & 8 & -6 \\ -7 & 0 & -9 \\ 8 & -5 & 6 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

4б: $S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

30. 1: -7; 2б: базис: $e_1 = (1, 0, 0, 0, 1)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$,

$e_4 = (0, 0, 0, 1, 0)^T$, $\dim V = 4$; 2г: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3а: $(-4, 0, 7)^T$;

3б: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}$; 3в: $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; 4а: $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 4б: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Література

1 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука., 1987. 320 с.

2 Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука., 1987. 496 с.

3 Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М.: Физматлит., 2002. 248 с.

4 Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука., 1971. 272 с.

5 Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука., 1970. 528 с.

6 Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука., 1975. 320 с.

7 Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит., 2001. 272 с.

8 Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит., 2001. 272 с.

9 Кострикин А.И. Введение в алгебру. Линейная алгебра. М.: Физматлит., 2001. 368 с.

10 Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. М.: Физматлит., 2001. 464 с.

11 Курош А.Г. Курс высшей алгебры М.: Наука., 1968. 432 с.

12 Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука., 1970. 400 с.

13 Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука., 1974. 384 с.

14 Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Издательство "Лань"., 2004. 288 с.

15 Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ.. М.: Мир., 1989. 655 с.

Навчальне видання

Зайцева Людмила Леонтіївна

Завдання для самостійних робіт з аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Частина III.

Навчально-методичний посібник