

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Л.Л. ЗАЙЦЕВА

Завдання для самостійних робіт з
АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ЛІНІЙНОЇ
АЛГЕБРИ
Частина II

КИЇВ — 2012

Зайцева Л.Л.

Завдання для самостійних робіт з аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Частина II. – К.: 2012. – 43 с.

Рецензенти:

Наведено завдання для проведення самостійних робіт з курсу "Аналітична геометрія та лінійна алгебра"(фізичний факультет) та "Загальна алгебра"(радіофізичний факультет). Методична розробка включає 30 варіантів завдань, кожний варіант містить 12 задач, які охоплюють різні розділи даного курсу. Наприкінці наведено відповіді до всіх задач.

Для студентів, викладачів фізико-математичних спеціальностей.

Рекомендовано до друку вченою радою радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол від)

ВАРІАНТ 1.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = -6, \\ 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 12x_5 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -10 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 2B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -8 & -4 & 6 & 4 & -5 & -7 \\ 8 & 4 & -4 & -6 & 4 & 2 \\ -12 & -6 & 8 & 7 & -7 & -8 \\ 12 & 6 & -2 & -13 & 4 & -7 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (7, -9, 4, 3, 1)^T, & x_2 &= (7, -5, 12, -1, -7)^T, \\ x_3 &= (2, 1, 8, -3, -7)^T, & x_4 &= (3, -3, 4, 1, -1)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}.$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 2.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 19, \\ 2x_1 + 15x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -6, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 5, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = -2. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 5B$; б) BA^T , в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 21 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & 16 & 19 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & -5 & -2 & 4 & 3 \\ -3 & -6 & -6 & -15 & -2 & -10 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-5, -1, 5, 6, 4)^T, & x_2 &= (-1, 1, 3, 0, 8)^T, \\ x_3 &= (-7, -2, 6, 9, 2)^T, & x_4 &= (4, 2, -2, -6, 4)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 7x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
- б) знайти матрицю φ ;
- в) знайти базис ядра φ ;
- г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 3.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 12x_1 + 20x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -5, \\ 6x_1 + 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & -3 & 4 \\ -4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & -5 \\ 4 & -4 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $-2A - 3B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 11 & 8 & 13 & -1 \\ 3 & -9 & 13 & 7 & 17 & -5 \\ -1 & 4 & -5 & -2 & -7 & 3 \\ -3 & -3 & -5 & -11 & -1 & -11 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (2, -1, 4, 2, 2)^T, & x_2 &= (-2, 2, -1, 5, 3)^T, \\ x_3 &= (-3, 2, -6, 1, 0)^T, & x_4 &= (-1, 1, 1, 2, 1)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 \\ 7x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 6x_4 \\ -5x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}:$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 4.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 - 7x_5 = 7, \\ 8x_1 - x_2 - 2x_4 + 6x_5 = -18, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $5A - 2B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -9 & -10 & -9 & -7 \\ 2 & 2 & -15 & -14 & -14 & -14 \\ -1 & -2 & 9 & 8 & 8 & 9 \\ -3 & 4 & 12 & 14 & 14 & 7 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$x_1 = (-1, 0, -1, 3, -7)^T, \quad x_2 = (3, -5, -7, 1, 1)^T,$$
$$x_3 = (-3, 4, 5, 1, -5)^T, \quad x_4 = (2, -5, -8, 4, -6)^T;$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 10x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 7x_4 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 5x_4 \\ -2x_1 - x_2 + 19x_3 - 14x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 5.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 10x_5 = -1, \\ 10x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = -11, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -5, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 7x_5 = -3. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $4A - 3B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 8 & -8 & 9 & 14 & -11 & 1 \\ 4 & -4 & -6 & 14 & -16 & 18 \\ 2 & -2 & 12 & -3 & 7 & -16 \\ -6 & 6 & -3 & -13 & 12 & -7 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (2, -7, -12, 10, -8)^T, & x_2 &= (2, -2, -9, 9, -2)^T, \\ x_3 &= (1, 3, -1, 2, 3)^T, & x_4 &= (0, -3, -4, 4, -2)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 \\ -x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 2x_4 \\ -4x_1 - 6x_2 - x_3 + 5x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 6.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 6x_4 + 8x_5 = -11, \\ 6x_1 - x_2 - 7x_3 - 6x_4 - 3x_5 = -9, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 + 2x_5 = -7, \\ -9x_1 + 2x_2 + 12x_3 - 6x_4 + x_5 = 15. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 2B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & 3 & 10 & -2 \\ -2 & -6 & 10 & 1 & 7 & -5 \\ 3 & 9 & -10 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & -9 & 4 & -4 & -11 & 4 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-2, 4, 0, -2, 5)^T, & x_2 &= (-4, 0, -2, -4, -1)^T, \\ x_3 &= (-1, 6, 1, -1, 8)^T, & x_4 &= (-2, -4, -2, -2, -6)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x_1 + 15x_2 + 17x_3 + 8x_4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ -x_1 - 10x_2 - 2x_3 + 11x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 7.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 6x_3 - x_4 - 11x_5 = -6, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 4x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 6x_5 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 2x_4 - 15x_5 = -8. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 4B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 10 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -6 & -8 & -6 & 8 \\ -6 & 7 & 13 & 8 & 7 & -8 \\ 6 & -4 & -1 & -20 & -13 & 20 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-2, 3, -1, 0, 2)^T, & x_2 &= (-1, 4, 0, 1, -1)^T, \\ x_3 &= (-2, -1, 2, 3, -6)^T, & x_4 &= (3, 2, -1, -2, 3)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \\ 9x_1 - x_2 + 5x_3 \\ 6x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 8.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - 7x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 9. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 3B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 & -3 & -4 & 4 \\ -3 & 7 & -2 & 0 & -11 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 9 & -5 \\ 3 & 1 & 10 & 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$x_1 = (1, -9, -7, 9, 9)^T, \quad x_2 = (-8, 2, 1, -2, -7)^T,$$
$$x_3 = (7, -7, -5, 7, 11)^T, \quad x_4 = (-7, -7, -6, 7, 2)^T;$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$v \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 10x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ -2x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 4x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 9.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ -2x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 9, \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -3, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -1. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $5A - 2B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 8 & 2 & -7 & -1 & -3 & -1 \\ -8 & -2 & 6 & 4 & 4 & -2 \\ 12 & 3 & -10 & -3 & -5 & 0 \\ -12 & -3 & 7 & 12 & 8 & -9 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (5, 7, -2, -6, 6)^T, & x_2 &= (7, 9, -3, 0, 3)^T, \\ x_3 &= (3, 3, -2, 4, -1)^T, & x_4 &= (3, 5, 0, -2, 2)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 + x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 10.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - x_3 - x_4 - 10x_5 = -6, \\ -9x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 5x_5 = -14, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 - 6x_5 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_4 - 5x_5 = -6. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $4A - 3B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 & -3 & 15 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 7 & 15 & 10 \\ 3 & 2 & -4 & -7 & -3 & -10 \\ -9 & -6 & 5 & 7 & -7 & 13 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (3, -2, 4, 1, -1)^T, & x_2 &= (-1, -4, -2, 1, 1)^T, \\ x_3 &= (5, -1, 7, 1, -2)^T, & x_4 &= (-4, -2, -6, 0, 2)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 9x_1 + 16x_2 + 5x_3 - 3x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 11.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 9x_5 = -3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 - 2x_5 = -11, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 12x_5 = -7. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 5B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -6 & -6 & -1 & 9 & 8 & 14 \\ -6 & -9 & 1 & 6 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 0 & -6 \\ 6 & -3 & 7 & -18 & -20 & -8 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-1, -5, -2, -6, 0)^T, & x_2 &= (-3, -2, 6, -9, 2)^T, \\ x_3 &= (0, 4, 7, 2, 2)^T, & x_4 &= (-2, -1, 1, -5, 0)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 6x_4 \\ -x_2 + 3x_3 + 9x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 12.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 11x_3 - 4x_4 + 7x_5 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = -14, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 4x_4 + 5x_5 = -7, \\ x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 4B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & -6 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & 5 & -6 & -4 & -7 \\ 2 & -4 & -4 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 9 & 6 & -7 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-2, -3, -1, 4, 4)^T, & x_2 &= (-9, -1, 3, 3, 3)^T, \\ x_3 &= (6, -1, -3, 0, 0)^T, & x_4 &= (-11, -4, 2, 7, 7)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 12x_4 \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 9x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 6x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 13.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 9x_3 - 2x_4 + x_5 = 9, \\ -10x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 + 8x_5 = -4. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $5A - 2B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & -2 & -6 & 11 \\ 6 & 2 & 18 & 6 & -10 & 16 \\ 3 & 1 & -11 & -7 & 5 & -7 \\ -9 & -3 & -11 & -1 & 7 & -12 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$x_1 = (3, 7, -4, 5, -1)^T, \quad x_2 = (2, 6, -7, 3, 4)^T,$$
$$x_3 = (0, 1, -3, 0, 4)^T, \quad x_4 = (1, 3, -4, 1, 1)^T;$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 10x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 14.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -4x_1 + 12x_2 - 7x_3 - 4x_4 + 3x_5 = -12, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 7x_5 = -9, \\ -4x_1 + 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 - 4x_4 + 6x_5 = -4. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & -3 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -3 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $-3A - 4B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -1 & 10 & 9 & 11 \\ 6 & 2 & 5 & -2 & 2 & 3 \\ -9 & -3 & -5 & 8 & 4 & 4 \\ 9 & 3 & 2 & -14 & -14 & -11 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$x_1 = (2, 1, -3, -2, -1)^T, \quad x_2 = (8, 7, -1, 6, 9)^T,$$
$$x_3 = (-1, -2, -4, -6, -6)^T, \quad x_4 = (6, 6, 2, 8, 10)^T;$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\ -6x_2 + 12x_3 - 6x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 15.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 9x_3 + x_4 - 9x_5 = 4, \\ 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 + x_4 + 19x_5 = -2, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 - 4x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5 = 3. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $-3A + 7B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 & -10 & 7 & -5 \\ -6 & -2 & 4 & 6 & -4 & 6 \\ 9 & 8 & -2 & -13 & 9 & -8 \\ -9 & 7 & 14 & 1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-1, -6, -3, -2, -1)^T, & x_2 &= (1, -2, 3, -5, 4)^T, \\ x_3 &= (2, 6, 7, 1, 5)^T, & x_4 &= (0, -2, -1, -4, 0)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4x_1 + 5x_2 + x_3 + 9x_4 \\ -3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 12x_4 \\ -6x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 3x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 16.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = -7, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 - 11x_5 = -4, \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 + 10x_4 - 4x_5 = -7, \\ 8x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 8x_5 = -5. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $5A - 2B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 12 & 5 & -1 & -7 & -2 & -7 \\ 12 & 7 & 1 & -8 & -10 & -8 \\ -4 & -3 & -1 & 3 & 9 & 4 \\ -12 & 1 & 7 & 4 & -1 & 11 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (7, -10, 5, 8, 9)^T, & x_2 &= (-1, 0, 5, 1, -2)^T, \\ x_3 &= (5, -6, -1, 4, 7)^T, & x_4 &= (6, -10, 10, 9, 7)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 7x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ -4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 17.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 - x_4 - 11x_5 = -5, \\ -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 11x_5 = -3, \\ 6x_1 + 8x_2 - 4x_3 - x_4 - 17x_5 = -11. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 3 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 6B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & -8 & -3 & -6 \\ -4 & -2 & -2 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & -11 & -5 & -7 \\ -6 & -3 & 7 & 5 & 8 & -5 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-3, -7, 3, -7, -2)^T, & x_2 &= (0, -7, -4, -6, -5)^T, \\ x_3 &= (2, -2, -5, -1, -3)^T, & x_4 &= (-1, -3, -1, -3, -2)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_4 \\ 8x_1 + 9x_2 + 6x_3 - x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 18.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 7x_5 = 8, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 7. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 7B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 & 18 & 12 & 9 \\ 2 & -1 & -9 & 18 & 13 & 9 \\ 2 & -1 & 5 & -3 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -12 & -12 & -3 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-3, -3, 2, -5, -4)^T, & x_2 &= (-1, -5, 8, 1, 4)^T, \\ x_3 &= (-4, -2, -1, -8, -8)^T, & x_4 &= (2, -2, 6, 6, 8)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ 5x_1 - 12x_2 - 7x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 19.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 12x_1 - 12x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 = -21, \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 7x_5 = -3, \\ 6x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -7, \\ 6x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -15. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & -4 \\ -3 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $4A - 2B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 11 & 7 & 7 & 11 \\ 6 & 3 & 13 & 8 & 5 & 10 \\ -2 & 0 & -5 & -3 & -1 & -3 \\ -6 & -15 & -5 & -4 & -13 & -14 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-2, 2, -1, 4, -2)^T, & x_2 &= (2, 3, -3, 3, -1)^T, \\ x_3 &= (5, 1, -3, 0, 1)^T, & x_4 &= (-1, 0, 1, -1, 0)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ -11x_1 - x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 20.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_3 - 4x_4 - 7x_5 = -2, \\ -3x_1 - 10x_2 + 3x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 17, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 8x_4 - 6x_5 = -11, \\ 6x_1 - 10x_2 - 4x_4 + x_5 = 8. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -4 \\ -4 & -4 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $-5A - 2B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -8 & 5 & -8 & 7 & 2 & 3 \\ -8 & 7 & -8 & 13 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & -8 & -3 & 1 \\ 12 & -7 & 12 & -9 & 1 & -12 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-9, 0, 12, 4, -3)^T, & x_2 &= (-3, -5, 4, 3, 4)^T, \\ x_3 &= (-3, 4, 4, 0, -5)^T, & x_4 &= (-12, -5, 16, 7, 1)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 9x_2 + 9x_4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ -2x_1 - 6x_2 - 14x_3 - 13x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 21.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -4x_1 + 10x_2 - x_4 + 2x_5 = 13, \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -13, \\ -4x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 17, \\ -4x_1 + 10x_2 - 6x_3 - x_4 = 11. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $5A - 6B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -4 & -16 & 3 & -5 & 14 & 6 \\ -2 & -8 & -2 & 8 & 0 & 10 \\ -1 & -4 & 4 & -11 & 10 & -5 \\ 3 & 12 & -1 & 0 & -8 & -7 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-3, 2, -6, -9, 5)^T, & x_2 &= (2, 2, -7, -9, 1)^T, \\ x_3 &= (4, 1, -3, -2, -3)^T, & x_4 &= (-1, 0, -2, -5, 3)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 22.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -6x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 7, \\ 6x_1 - 10x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 4x_5 = -1, \\ -12x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 14, \\ -6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 = -1. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & -2 & -2 & -5 \\ -2 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -1 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A + 3B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 11 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & 1 & 8 & 8 & -13 \\ -3 & 12 & 6 & -7 & -9 & 11 \\ 3 & -12 & -15 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 1, 2, -1, 4)^T, & x_2 &= (-5, -7, 6, 9, 2)^T, \\ x_3 &= (4, 5, 0, -6, 5)^T, & x_4 &= (-6, -8, 4, 10, -2)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 9x_4 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \\ -10x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
- б) знайти матрицю φ ;
- в) знайти базис ядра φ ;
- г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 23.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 12x_3 + 6x_4 - 24x_5 = 18, \\ -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 3, \\ 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 10x_5 = 7, \\ 2x_1 - 8x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 7x_5 = -6. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 5B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -6 & -9 & -8 & 5 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 6 & -2 & -6 & -6 \\ -9 & -13 & -11 & 6 & 10 & 11 \\ 9 & 10 & 5 & 3 & -7 & -5 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (3, 1, 6, 2, 0)^T, & x_2 &= (5, 4, 2, 3, -2)^T, \\ x_3 &= (-2, -1, -7, -2, 0)^T, & x_4 &= (4, 4, 3, 3, -2)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 + 12x_4 \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
- б) знайти матрицю φ ;
- в) знайти базис ядра φ ;
- г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 24.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 9x_5 = -2, \\ -3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 10, \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 5x_5 = -6, \\ 6x_1 - 10x_2 - 10x_3 - 3x_4 + 5x_5 = -10. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $-4A - 3B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 9 & 8 & -7 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 10 & -5 & 5 & 13 & 6 \\ -3 & -4 & 1 & -2 & -9 & -1 \\ -9 & -2 & 13 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$x_1 = (-9, 7, 2, -4, -5)^T, \quad x_2 = (2, 4, -6, 7, 0)^T,$$
$$x_3 = (-7, 1, 6, -8, -3)^T, \quad x_4 = (-7, 11, -4, 3, -5)^T;$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \\ -5x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 12x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 25.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 10x_4 + 5x_5 = -5, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 - 5x_4 + 11x_5 = -2, \\ -4x_1 - 6x_2 + x_3 + 10x_4 - 7x_5 = -1, \\ -4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 14x_5 = 3. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -5 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $5A - 2B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 5 & 8 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & -8 & -2 & -16 & 4 \\ -6 & -6 & 10 & 7 & 14 & -6 \\ 6 & 6 & -7 & -13 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-3, -5, -7, -3, -1)^T, & x_2 &= (-1, -2, -5, -4, -8)^T, \\ x_3 &= (1, 1, 0, -2, -6)^T, & x_4 &= (-1, -1, -3, -1, -3)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 12x_4 \end{pmatrix}:$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 26.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 8x_2 - 8x_3 + 10x_4 + 6x_5 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 6, \\ -4x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 10x_4 - 5x_5 = -8, \\ -4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 5x_4 - 12x_5 = -4. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 3B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 3 & 18 \\ 2 & 3 & 11 & 7 & -4 & 19 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 5 & -4 \\ -6 & -9 & -5 & -7 & -7 & -10 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 3, -3, -3, -3)^T, & x_2 &= (-7, -1, 5, 1, 7)^T, \\ x_3 &= (5, 5, -7, -5, -8)^T, & x_4 &= (-8, -4, 8, 4, 10)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - 12x_2 + 9x_3 - 7x_4 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 8x_1 + x_2 - 6x_3 - 7x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 27.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 10x_4 - 17x_5 = 16, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 8, \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 10x_4 - 12x_5 = 13, \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 5. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -4 \\ -5 & -4 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -4 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $4A - 2B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 & -4 & 3 \\ 9 & 9 & 0 & -3 & -5 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -9 & 3 & -12 & -9 & 1 & -12 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (3, -1, 1, 4, -8)^T, & x_2 &= (-3, -2, 1, 3, -5)^T, \\ x_3 &= (-5, 2, -2, -2, 7)^T, & x_4 &= (-1, -3, 2, 1, -4)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 4x_1 + 10x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 28.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 9x_3 + 2x_4 + x_5 = 16, \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 1. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 4B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & -2 & -8 & -8 \\ 6 & -1 & 1 & -2 & -13 & -15 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 8 & 9 \\ -9 & -9 & -5 & 3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-8, -6, -8, -3, -3)^T, & x_2 &= (9, -2, 4, 9, 4)^T, \\ x_3 &= (-12, -2, -8, -9, -5)^T, & x_4 &= (1, -8, -4, 6, 1)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \\ 6x_1 - 4x_2 + 13x_3 + 3x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
- б) знайти матрицю φ ;
- в) знайти базис ядра φ ;
- г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 29.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 36x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 7x_5 = 6, \\ x_1 + 6x_2 - 12x_3 + 4x_4 + 12x_5 = -7, \\ 2x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 4x_4 - 9x_5 = 6, \\ 2x_1 + 12x_2 - 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $5A + 3B$; б) AB^T ; в) C^{-1} ; г) $C^{-1}D$.

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} 20 & 4 & -2 & 1 & -10 & 13 \\ 10 & 2 & 6 & -10 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & -7 & 10 & -9 & 13 \\ -15 & -3 & -1 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (3, -7, 13, 2, 5)^T, & x_2 &= (1, -5, 12, 7, 8)^T, \\ x_3 &= (-1, 0, 2, 5, 4)^T, & x_4 &= (1, -3, 7, 2, 3)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 + 5x_3 - 9x_4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 12x_4 \\ -9x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} :$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВАРІАНТ 30.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -3x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 6x_5 = -5, \\ 6x_1 - 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 + 9x_5 = -11, \\ -6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 11x_5 = 7, \\ 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$$

2 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $-2A + 4B$; б) BA^T ; в) C^{-1} ; г) DC^{-1} .

3 Знайти

а) ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -10 & -8 & -5 & 8 & 1 \\ -3 & 15 & 7 & 5 & -8 & 3 \\ 3 & -15 & -1 & -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $L = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (4, 2, -1, 5, -2)^T, & x_2 &= (2, 8, 9, 1, -4)^T, \\ x_3 &= (5, -1, -6, 7, -1)^T, & x_4 &= (-2, 6, 10, -4, -2)^T; \end{aligned}$$

в) ті з векторів, x_1, x_2, x_3, x_4 , які не є базисними, виразити через базисні.

4 Задано відображення

$$\varphi: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8x_1 - 5x_2 + 13x_3 + 6x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ -3x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 10x_4 \end{pmatrix}:$$

- а) довести, що φ є лінійним;
б) знайти матрицю φ ;
в) знайти базис ядра φ ;
г) знайти базис образу φ .

ВІДПОВІДІ.

$$1. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 7 & -19 & -2 & -7 \\ -6 & -4 & 12 & -6 \\ -7 & -18 & 2 & 7 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 8 & 18 & -8 \\ -3 & -2 & -8 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 13 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} -9 & -9 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ -8 & -14 & -8 \end{pmatrix}; 3a: 2; 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис};$$

$$3в: x_4 = -x_1 + 2x_2 - 2x_3; 4б: \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/8 \\ -5/8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4/5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2/5 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 10 & 35 & -6 & 7 \\ 11 & -7 & 23 & -20 \\ 4 & 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 3 & -16 & -7 \\ 5 & 1 & 14 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -3/2 & 2 \\ 5/2 & -13/2 & 10 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -4 & 11 & -17 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}; 3a: 3; 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; 3в: x_3 = 3/2x_1 - x_2,$$

$$x_4 = -x_1 + x_2; 4б: \begin{pmatrix} 7 & 8 & -5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} 1/11 \\ 6/11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/11 \\ -7/11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$3. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 13 & 7 & 3 & 19 \\ -16 & 20 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 & -11 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ -15 & -1 & 3 \\ 7 & -14 & 2 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -9/2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ -1 & -6 & -11 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; 3a: 2; 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; 3в: x_4 = -x_1 + x_2 - x_3;$$

$$46: \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 & -3 \\ 7 & -7 & 6 & -6 \\ -5 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad 4B: \begin{pmatrix} 5/14 \\ 17/14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9/14 \\ -3/14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 4Г: \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 \\ 5 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1/4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 26 & 16 \\ 6 & -13 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 12 \\ 3 & 18 & 8 \end{pmatrix}; \quad 2B: \begin{pmatrix} -9/2 & 3 & 1/2 \\ 5 & -3 & -1 \\ -7/2 & 2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$2Г: \begin{pmatrix} -8 & 6 & -1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad 3a: 3; \quad 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; \quad 3B: x_3 = 3/5x_1 - x_2,$$

$$x_4 = x_1 + x_2; \quad 4б: \begin{pmatrix} 10 & -9 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & -6 & 5 \\ -2 & -1 & 19 & -14 \end{pmatrix}; \quad 4B: \begin{pmatrix} 25/4 \\ 13/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19/4 \\ -9/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4Г: \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \\ 1 \\ -5/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3/5 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 19 & -26 & -2 & 0 \\ 6 & 9 & 6 & -19 \\ -5 & 1 & -16 & -18 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} 1 & 10 & 12 \\ -5 & 8 & 1 \\ 11 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2B: \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & 1/2 \\ 19/4 & 1/4 & -3/2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2Г: \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 8 & 13 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad 3a: 2; \quad 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; \quad 3B: x_4 = -x_1 + 2x_2 - 2x_3;$$

$$4б: \begin{pmatrix} -2 & 2 & 9 & 3 \\ -1 & 6 & 14 & 2 \\ -4 & -6 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad 4B: \begin{pmatrix} 13/5 \\ -19/10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 4Г: \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1/6 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2/3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 5 & -13 & -5 & 20 \\ -4 & 10 & 3 & -5 \\ 7 & -5 & -7 & -14 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 \\ -1 & 14 & -13 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}; \quad 2B: \begin{pmatrix} 13/2 & 3/2 & -1 \\ -15/2 & -3/2 & 1 \\ -8 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2Г: \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 26 & 6 & -3 \\ -9 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3a: 3; \quad 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; \quad 3B: x_3 = 3/2x_1 - x_2,$$

$$x_4 = -x_1 + x_2; \quad 4б: \begin{pmatrix} 5 & 15 & 17 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ -1 & -10 & -2 & 11 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} -4 \\ 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 9/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5/4 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2а: \begin{pmatrix} -16 & 18 & -19 & -1 \\ 24 & -1 & -10 & -1 \\ -14 & 12 & 9 & -2 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} -13 & 8 & -9 \\ 6 & 3 & -7 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2в: \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -7 & -1 & -8 \\ -10 & -4/3 & -35/3 \end{pmatrix}; \quad 2г: \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ -32 & 7 & -21 \\ -47 & 11 & -29 \end{pmatrix}; \quad 3а: 2; \quad 3б: \dim L = 3,$$

$$x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; \quad 3в: x_4 = -x_1 + x_2 - x_3; \quad 4б: \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 5 & 0 \\ 6 & -4 & -7 & -3 \end{pmatrix};$$

$$4в: \begin{pmatrix} -9/10 \\ -31/10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/10 \\ -9/10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 4г: \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2/3 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2а: \begin{pmatrix} 9 & -10 & 8 & -1 \\ -3 & 19 & -13 & 7 \\ 8 & -1 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 8 & -3 & -10 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} 4 & 11 & -1 \\ 10 & 28 & -3 \\ -7 & -20 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} -7 & -20 & 3 \\ -21 & -61 & 6 \\ 9 & 28 & -3 \end{pmatrix}; \quad 3а: 3; \quad 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; \quad 3в: x_3 = 3/5x_1 - x_2,$$

$$x_4 = x_1 + x_2; \quad 4б: \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -10 & -4 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} 5/6 \\ -7/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 2 & 22 & -21 & 14 \\ -18 & 7 & 9 & 14 \\ 12 & -16 & -21 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} -9 & 1 & 12 \\ -8 & 12 & -9 \\ -7 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 9 & -2 & 7 \\ 20 & -4 & 15 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 2 \\ 14 & -8 & 5 \end{pmatrix}; \quad 3a: 2; \quad 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; \quad 3в: x_4 = -x_1 + 2x_2 - 2x_3;$$

$$4б: \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} 5/9 \\ -7/9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/9 \\ 1/9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 4г: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$10. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 10 & 24 & 3 & 1 \\ 1 & -11 & -5 & -6 \\ -12 & 11 & 4 & 26 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -7 & 6 & 17 \\ 13 & -6 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} 1/2 & 13/2 & 2 \\ -1/2 & -7/2 & -1 \\ 3/2 & 19/2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} -1 & -11 & -4 \\ -6 & -32 & -10 \\ -1 & -18 & -6 \end{pmatrix}; \quad 3a: 3; \quad 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; \quad 3в: x_3 = 3/2x_1 - x_2,$$

$$x_4 = -x_1 + x_2; \quad 4б: \begin{pmatrix} 9 & 16 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$11. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5/3 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} -6 & -21 & -13 & 9 \\ 9 & -8 & 3 & -11 \\ -2 & -6 & -23 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} 15 & -1 & 9 \\ -1 & 9 & -4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} 16 & -12 & 11 \\ 12 & -9 & 8 \\ 25 & -19 & 17 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} -9 & 7 & -10 \\ -6 & 6 & -8 \\ -14 & 11 & -15 \end{pmatrix}; \quad 3a: 2; \quad 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; \quad 3в: x_4 = -x_1 + x_2 - x_3;$$

$$4б: \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -22 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 4г: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$12. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1/3 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} -13 & -9 & 2 & -9 \\ -6 & -22 & 7 & 3 \\ 10 & -17 & 7 & -9 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} 7 & 9 & -6 \\ 0 & 12 & -4 \\ 10 & 8 & -6 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} 7/3 & -2 & -34/3 \\ 4/3 & -1 & -19/3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ -2 & 2 & 13 \\ 5 & -4 & -26 \end{pmatrix}; \quad 3a: 3; \quad 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; \quad 3в: x_3 = 3/5x_1 - x_2,$$

$$x_4 = x_1 + x_2; \quad 4б: \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 12 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 9 & 10 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} -4/7 \\ -2/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18/7 \\ 12/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$13. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \\ 1/3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/5 \\ 0 \\ -2/3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 8 & 2 & -25 & 18 \\ 14 & 4 & -18 & 24 \\ -13 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} -1 & -8 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 13 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} -13 & 3 & -20 \\ -4 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 5 & -10 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3a: 2; \quad 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; \quad 3в: x_4 = -x_1 + 2x_2 - 2x_3;$$

$$4б: \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -10 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} -11/10 \\ 7/10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/5 \\ -9/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 4г: \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$14. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -5/4 \\ 0 \\ -5/4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3/4 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} -21 & 10 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & -27 & -10 \\ -4 & -23 & -8 & -17 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} -12 & 9 & 6 \\ -8 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -9 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 10/3 \\ -1 & 2 & 7/3 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 6 & -10 & -12 \\ 7 & -10 & -12 \\ -6 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad 3a: 3; \quad 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; \quad 3в: x_3 = 3/2x_1 - x_2,$$

$$x_4 = -x_1 + x_2; \quad 4б: \begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

$$15. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1/3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 12 & 44 & 31 & -9 \\ -24 & 23 & 12 & 2 \\ 38 & 9 & 26 & 5 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} 2 & -14 & -4 \\ 9 & 3 & -4 \\ -8 & -4 & 5 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} 9/2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} -2 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}; 3a: 2; 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; 3в: x_4 = -x_1 + x_2 - x_3;$$

$$4б: \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 & 9 \\ -3 & 9 & -3 & 12 \\ -6 & -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} 8/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 4г: \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$16. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1/4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5/4 \\ 2 \\ 0 \\ 6/5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} -16 & 4 & -29 & -19 \\ 7 & -12 & 19 & 12 \\ -28 & 1 & -11 & 6 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} -2 & -2 & 9 \\ -1 & 2 & -11 \\ -8 & 6 & -4 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} -8 & -14 & -9 \\ -11 & -19 & -12 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -8 & -16 & -10 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; 3a: 3; 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; 3в: x_3 = 3/5x_1 - x_2,$$

$$x_4 = x_1 + x_2; 4б: \begin{pmatrix} 6 & -4 & -7 & -7 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & -7 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} 9/2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9/2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$17. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ -3/2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} -14 & 26 & 10 & 34 \\ -4 & -26 & 30 & -18 \\ -4 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -3 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} -14 & -4 & 15 \\ -13 & -4 & 14 \\ 10 & 3 & -11 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 1 & -2 & -8 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}; 3a: 2; 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис};$$

$$3в: x_4 = -x_1 + 2x_2 - 2x_3; 4б: \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 6 & -1 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} -3/2 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5/2 \\ 7/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4\Gamma: \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$18. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/2 \\ 0 \\ 3/7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} -5 & -34 & -3 & -10 \\ -8 & -24 & 4 & -3 \\ 37 & 1 & -13 & -16 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} -5 & -11 & -9 \\ -2 & -2 & -5 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} -7 & 15/2 & 2 \\ -4 & 9/2 & 1 \\ -3 & 7/2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2\Gamma: \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 11 & -11 & -3 \end{pmatrix}; 3a: 3; 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; 3в: x_3 = 3/2x_1 - x_2,$$

$$x_4 = -x_1 + x_2; 4б: \begin{pmatrix} -4 & -3 & 7 & 8 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & -12 & -7 & -3 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4\Gamma: \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

$$19. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 8 & 26 & 6 & -18 \\ -18 & -16 & 12 & 6 \\ 10 & 12 & 12 & -10 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} 6 & -10 & 0 \\ 4 & 1 & 11 \\ 7 & -7 & 11 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2\Gamma: \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}; 3a: 2; 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; 3в: x_4 = -x_1 + x_2 - x_3;$$

$$4б: \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 7 & 2 & -3 & 0 \\ -11 & -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} -1/5 \\ 11/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/5 \\ 14/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 4\Gamma: \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$20. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4/5 \\ 0 \\ 5/4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 1 & -13 & -16 & 18 \\ 23 & -7 & -26 & 10 \\ -1 & 21 & 15 & -26 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -6 & -8 & 13 \\ 7 & 5 & -6 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} 17/2 & -5/2 & -9/2 \\ -5/2 & 1/2 & 3/2 \\ -13/2 & 3/2 & 7/2 \end{pmatrix};$$

$$2\Gamma: \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}; 3a: 3; 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; 3в: x_3 = 3/5x_1 - x_2,$$

$$x_4 = x_1 + x_2; \quad 4б: \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -6 & -14 & -13 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

$$21. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 0 \\ 1/3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2а: \begin{pmatrix} -4 & -8 & -7 & -16 \\ -4 & 27 & -9 & 3 \\ 28 & -32 & 3 & 14 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} 8 & -7 & 10 \\ 8 & 5 & 9 \\ -4 & 11 & -4 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -2 \\ 3/2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ -3 & -20 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad 3а: 2; \quad 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис};$$

$$3в: x_4 = -x_1 + 2x_2 - 2x_3; \quad 4б: \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & -5 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} 1/9 \\ -11/9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13/9 \\ 1/9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$22. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -4/5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1/6 \\ -3/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/3 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2а: \begin{pmatrix} 22 & -2 & -3 & -4 \\ -11 & -13 & -1 & -1 \\ -10 & -5 & -5 & -2 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ -2 & -7 & -8 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -5/4 \\ -1 & 1/4 & -21/4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -18 \\ 3 & 0 & 11 \end{pmatrix}; \quad 3а: 3; \quad 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; \quad 3в: x_3 = 3/2x_1 - x_2,$$

$$x_4 = -x_1 + x_2; \quad 4б: \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & -9 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} -3/5 \\ -1/10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

$$23. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 22 & -12 & 9 & -2 \\ 18 & 20 & -1 & -2 \\ 11 & -7 & -29 & 10 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} -4 & -9 & -4 \\ 9 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5/3 & -1/3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \\ -9 & 7 & -5 \end{pmatrix}; \quad 3a: 2; \quad 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; \quad 3в: x_4 = -x_1 + x_2 - x_3;$$

$$4б: \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & -7 & 12 \\ 5 & -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} 12/5 \\ 11/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19/5 \\ -22/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 4г: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$24. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/5 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 & -2 \\ -13 & -11 & 13 & 3 \\ -10 & -5 & -1 & 11 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} -12 & 1 & 1 \\ -1 & -8 & -2 \\ -1 & 14 & -5 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} 3 & -3/2 & -5/2 \\ 4 & -5/2 & -7/2 \\ -6 & 7/2 & 11/2 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 7 & -5 & -7 \\ -7 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 3a: 3; \quad 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; \quad 3в: x_3 = 3/5x_1 - x_2,$$

$$x_4 = x_1 + x_2; \quad 4б: \begin{pmatrix} 4 & 10 & 15 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -5 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} 15/2 \\ -9/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -21/2 \\ 9/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$25. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1 \\ -1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -3 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 19 & -3 & -12 & -7 \\ 0 & 6 & 23 & -23 \\ 1 & 18 & 14 & -18 \end{pmatrix}; \quad 2б: \begin{pmatrix} -5 & 11 & 7 \\ 6 & 7 & -11 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}; \quad 2в: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 17/2 & -8 & 3/2 \\ 9/2 & -4 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -12 & 4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}; \quad 3a: 2; \quad 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; \quad 3в: x_4 = -x_1 + 2x_2 - 2x_3;$$

$$4б: \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & -2 \\ 7 & -2 & 2 & -9 \\ -2 & -5 & 5 & 12 \end{pmatrix}; \quad 4в: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23/13 \\ 22/13 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 4г: \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$26. \quad 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1 \\ 0 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 10 & 7 & -12 & 5 \\ -2 & 3 & 12 & -10 \\ -11 & 13 & 3 & 7 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 1 & 5 & 2 \\ -7 & -1 & -8 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} 21 & 20 & -6 \\ -17 & -16 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}; 3a: 3; 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; 3в: x_3 = 3/2x_1 - x_2,$$

$$x_4 = -x_1 + x_2; 4б: \begin{pmatrix} 2 & -12 & 9 & -7 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} 9/14 \\ 6/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13/14 \\ -3/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$27. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \\ -1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 0 & 18 & -2 & -4 \\ -2 & 24 & 4 & -6 \\ -6 & 6 & 20 & -6 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} 8 & -8 & 3 \\ -3 & 8 & 0 \\ 9 & 3 & -9 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} 3 & -1 & -9 \\ 7/3 & -2/3 & -22/3 \\ 5/3 & -1/3 & -14/3 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -7 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}; 3a: 2; 3б: \dim L = 3, x_1, x_2, x_3 - \text{базис}; 3в: x_4 = -x_1 + x_2 - x_3;$$

$$4б: \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} 17/2 \\ -7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 4г: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$28. 1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2a: \begin{pmatrix} 1 & 21 & 13 & 0 \\ -2 & -19 & 0 & 6 \\ -17 & 13 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 2б: \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -2 & 11 & -1 \\ -9 & 1 & 7 \end{pmatrix}; 2в: \begin{pmatrix} 3/2 & 7/2 & 3 \\ -3/2 & -5/2 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2г: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \\ 6 & 11 & 8 \end{pmatrix}; 3a: 3; 3б: \dim L = 2, x_1, x_2 - \text{базис}; 3в: x_3 = 3/5x_1 - x_2,$$

$$x_4 = x_1 + x_2; 4б: \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 6 & -4 & 13 & 3 \end{pmatrix}; 4в: \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4г: \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

29. 1:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3/4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

2a:
$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 14 & -27 \\ 4 & -12 & 1 & -26 \\ -7 & 10 & 4 & -27 \end{pmatrix};$$
 2б:
$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & -1 \\ 7 & -1 & -10 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
 2в:
$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 9 \\ 5 & 9 & -16 \\ -4 & -7 & 13 \end{pmatrix};$$

2г:
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -5 \\ -8 & -8 & 8 \\ 7 & 8 & -7 \end{pmatrix};$$
 3а: 2; 3б: $\dim L = 3, x_1, x_2, x_3$ – базис; 3в: $x_4 = -x_1 + 2x_2 -$

2x₃; 4б:
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 & -9 \\ 3 & -4 & 9 & -12 \\ -9 & 5 & -3 & -3 \end{pmatrix};$$
 4в:
$$\begin{pmatrix} 11/7 \\ 24/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -24/7 \\ -39/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

4г:
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

30. 1:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/4 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

2а:
$$\begin{pmatrix} 24 & -18 & 14 & 6 \\ 4 & -12 & 8 & 4 \\ -2 & 2 & -14 & 4 \end{pmatrix};$$
 2б:
$$\begin{pmatrix} -7 & -8 & -4 \\ -6 & 2 & -2 \\ 7 & 10 & 5 \end{pmatrix};$$
 2в:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7/3 & 5/3 & 1 \\ -4/3 & -2/3 & -1 \end{pmatrix};$$

2г:
$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$
 3а: 3; 3б: $\dim L = 2, x_1, x_2$ – базис; 3в: $x_3 = 3/2x_1 - x_2,$

$x_4 = -x_1 + x_2;$ 4б:
$$\begin{pmatrix} 8 & -5 & 13 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -6 & -4 & 10 \end{pmatrix};$$
 4в:
$$\begin{pmatrix} -14/9 \\ 1/9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/9 \\ 14/9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

4г:
$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Література

- 1 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука., 1987. 320 с.
- 2 Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука., 1987. 496 с.
- 3 Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М.: Физматлит., 2002. 248 с.
- 4 Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука., 1971. 272 с.
- 5 Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука., 1970. 528 с.
- 6 Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука., 1975. 320 с.
- 7 Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит., 2001. 272 с.
- 8 Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит., 2001. 272 с.
- 9 Кострикин А.И. Введение в алгебру. Линейная алгебра. М.: Физматлит., 2001. 368 с.
- 10 Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. М.: Физматлит., 2001. 464 с.
- 11 Курош А.Г. Курс высшей алгебры М.: Наука., 1968. 432 с.
- 12 Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука., 1970. 400 с.
- 13 Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука., 1974. 384 с.
- 14 Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Издательство "Лань", 2004. 288 с.
- 15 Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ.. М.: Мир., 1989. 655 с.