

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Л.Л. ЗАЙЦЕВА

Завдання для самостійних робіт з
АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА
ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ
Частина I

КИЇВ — 2012

Зайцева Л.Л.

Завдання для самостійних робіт з аналітичної геометрії та лінійної алгебри.
Частина I. – К.: 2012. – 44 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. Вільчинський С.Й.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Єфіменко С.В.

Наведено завдання для проведення самостійних робіт з курсу "Аналітична геометрія та лінійна алгебра" (фізичний факультет) та "Загальна алгебра" (радіофізичний факультет). Методична розробка включає 30 варіантів завдань, кожний варіант містить 16 задач, які охоплюють різні розділи даного курсу. На початку наведено деякі теоретичні відомості, які стануть у нагоді при розв'язанні задач. Методична розробка містить також відповіді до всіх наведених задач.

Для студентів, викладачів фізико-математичних спеціальностей.

Рекомендовано до друку вченою радою радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол №3 від 12 листопада 2012 року)

Нехай $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — ортонормований базис, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ відносно заданого базису.

Лінійна комбінація векторів \vec{a} і \vec{b} має координати (для довільних дійсних α, β):

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3).$$

Скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} :

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Довжина вектора \vec{a} :

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Проекція вектора \vec{a} на вектор \vec{b} (за умови $\vec{b} \neq \vec{0}$):

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} (за умови $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$):

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Три вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} є базисом в просторі, якщо ці вектори є лінійно незалежними, тобто

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Іншими словами, система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 \end{cases}$$

має єдиний тривіальний розв'язок $x = y = z = 0$.

Твердження 1. Три вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} є базисом в просторі тоді і тільки тоді, коли ці вектори некопланарні.

Координатами вектора \vec{d} відносно базису \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} називається впорядкований набір дійсних чисел (x, y, z) , такий, що

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Знайти координати \vec{d} відносно базису \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} можна розв'язавши систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} :

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Вектори \vec{a} і \vec{b} є *колінеарними* тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

(якщо, наприклад, $b_1 = 0$, тоді і $a_1 = 0$).

Мішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} є *компланарними* тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює 0:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0.$$

Вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} є *правою трійкою* тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток додатний:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0.$$

Вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} є *лівою трійкою* тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток від'ємний:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0.$$

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} (некомпланарних) дорівнює

$$V_{\text{paral}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Об'єм тетраедра, побудованого на векторах \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} (некомпланарних) дорівнює

$$V_{\text{tetr}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно двом неколінеарним векторам $\vec{u}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ і $\vec{u}_2 = (l_2, m_2, n_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Проекція точки N на пряму γ : $N' = \text{Пр}_\gamma N$. Нехай α — це площина, яка проходить через N перпендикулярно γ . Тоді N' є перетином α і γ :

$$N' = \alpha \cap \gamma.$$

Проекція точки M на площину α : $M' = \text{Пр}_\alpha M$. Нехай γ — це пряма, яка проходить через M перпендикулярно α . Тоді M' є перетином γ і α :

$$M' = \gamma \cap \alpha.$$

Проекція прямої γ на площину α : $\gamma' = \text{Пр}_\alpha \gamma$. Нехай β — це площина, яка проходить через γ перпендикулярно α . Тоді γ' є перетином α і β :

$$\gamma' = \alpha \cap \beta.$$

Нехай $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ — задана площина, M_0 — довільна точка α , $\vec{n} = (A, B, C)$ — вектор нормалі до α .

Відстань від точки M до площини α : $\text{dist}(M, \alpha)$ дорівнює

$$\text{dist}(M, \alpha) = \left| \text{Пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M} \right|.$$

Точки M і N лежать в одному півпросторі відносно площини α , якщо

$$\text{Пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M} \cdot \text{Пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 N} > 0,$$

в різних півпросторах, якщо

$$\text{Пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M} \cdot \text{Пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 N} < 0.$$

Площини

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

є паралельними тоді і тільки тоді, коли їх вектори нормалі $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ є колінеарними:

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2.$$

Нехай M_1 — довільна точка площини α_1 , тоді *відстань між паралельними площинами* α_1 і α_2 дорівнює

$$\text{dist}(\alpha_1, \alpha_2) = \text{dist}(M_1, \alpha_2).$$

Площини, які ділять навпіл двогранний кут між двома площинами α_1 і α_3 (непаралельними), — це геометричне місце точок, рівновіддалених від заданих площин. Іншими словами, точка $M(x, y, z)$ належить одній з площин, яка ділить навпіл двогранний кут між α_1 і α_3 , тоді і тільки тоді, коли

$$\text{dist}(M, \alpha_1) = \text{dist}(M, \alpha_3).$$

ВАРІАНТ 1.

1] Задано $\vec{a} = (-1, -1, 4)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$, $\vec{c} = (2, -1, 1)$, $\vec{d} = (-3, 4, 1)$.
Знайти

а) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}, \vec{d}) + \vec{b}(2\vec{a} - \vec{d}, \vec{c}) + \vec{c}|\vec{b} + \vec{c}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{c} - 3\vec{b})$;

в) $\angle(\vec{a}, \vec{c})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (2, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (4, -1, -3)$. Знайти

а) $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ при $\lambda = -3$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, який побудовано на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -7$.

3] Задано $\gamma : \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+6}{1}$, $\alpha : 3x - y - z - 1 = 0$,
 $M(2, -3, -3)$, $N(1, -2, -1)$, $\vec{a} = (1, -2, 2)$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проєкцію точки N на пряму γ ;

в) проєкцію точки M на площину α ;

г) проєкцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 2x - y + 4z + 2 = 0$, $\alpha_2 : 4x - 2y + 8z + 1 = 0$,
 $\alpha_3 : -8x - 10y + 5z - 5 = 0$, $M(-5, -2, 1)$, $N(2, 3, 1)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 2.

1] Задано $\vec{a} = (-1, 1, -1)$, $\vec{b} = (-5, 4, -1)$, $\vec{c} = (-3, 2, 2)$, $\vec{d} = (1, -3, 2)$.
Знайти

а) $\vec{b}(\vec{a} + \vec{c}, \vec{d}) + \vec{c}(3\vec{c} - \vec{b}, \vec{d}) + \vec{a}|3\vec{a} + \vec{d}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{d} - 3\vec{a})$;

в) $\angle(\vec{b}, \vec{d})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (2, -2, \lambda)$, $\vec{b} = (3, -2, 3)$, $\vec{c} = (4, -5, 4)$. Знайти

а) $[\vec{a} - \vec{c}, 2\vec{a} - \vec{b}]$ при $\lambda = 1$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 3$.

3] Задано $\vec{a} = (1, 3, 2)$, $\alpha : x + 5y + z + 2 = 0$,
 $M(3, 3, 7)$, $N(0, 1, 1)$, $\gamma : \frac{x+6}{1} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z}{-2}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -x + 6y - z + 3 = 0$, $\alpha_2 : 3x - 18y + 3z + 3 = 0$,
 $\alpha_3 : -2x + 3y + 5z - 5 = 0$, $M(5, -5, 6)$, $N(1, -3, 1)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 3.

1] Задано $\vec{a} = (3, 2, -2)$, $\vec{b} = (2, 1, -2)$, $\vec{c} = (-1, 3, 1)$, $\vec{d} = (3, -1, -4)$.
Знайти

а) $\vec{a} \left(3\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} \right) + \vec{c} \left(\vec{d} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{a} \right) + \vec{b} \left| 2\vec{b} - \vec{d} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{c}} \left(2\vec{a} - \vec{b} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{b}, \vec{c} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (3, 1, \lambda)$, $\vec{b} = (0, -3, 4)$, $\vec{c} = (2, -2, 1)$. Знайти

а) $\left[\vec{b} + \vec{c}, 3\vec{c} - \vec{a} \right]$ при $\lambda = -2$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -4$.

3] Задано $\vec{a} = (3, 3, 1)$, $\alpha : 2x + 2y + 3z - 1 = 0$,
 $M(-6, -2, 0)$, $N(1, 1, -3)$, $\gamma : \frac{x+5}{-2} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-7}{4}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 2x + y - z - 4 = 0$, $\alpha_2 : 8x + 4y - 4z - 3 = 0$,
 $\alpha_3 : 7x - 2y - z - 2 = 0$, $M(1, 4, 5)$, $N(3, 2, -7)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 4.

- 1] Задано $\vec{a} = (-6, 1, -5)$, $\vec{b} = (1, -1, -1)$, $\vec{c} = (2, -1, -2)$, $\vec{d} = (1, 2, -1)$. Знайти
- $\vec{c} \left(2\vec{a} + \vec{d}, 3\vec{c} - \vec{d} \right) + \vec{a} \left(\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{c} - \vec{a} \right) + \vec{b} \left| 3\vec{b} - \vec{c} \right|^2$;
 - $\text{Pr}_{\vec{b}} \left(3\vec{c} - 2\vec{d} \right)$;
 - $\angle \left(\vec{b}, \vec{c} - \vec{d} \right)$;
 - чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2] Задано $\vec{a} = (1, 4, \lambda)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{c} = (5, 0, -2)$. Знайти
- $\left[\vec{b} - \vec{a}, 3\vec{b} - \vec{c} \right]$ при $\lambda = 1$;
 - при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -3$.
- 3] Задано $\vec{a} = (5, 3, -4)$, $\alpha : 2x - 3y + 4z + 3 = 0$, $M(4, 2, 6)$, $N(-4, 3, 5)$, $\gamma : \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+3}{2}$. Знайти
- рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - проекцію точки N на пряму γ ;
 - проекцію точки M на площину α ;
 - знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4] Задано $\alpha_1 : x + 2y + z - 2 = 0$, $\alpha_2 : -5x - 10y - 5z + 6 = 0$, $\alpha_3 : 4x + 2y - 2z + 3 = 0$, $M(-7, 7, 4)$, $N(1, 2, -5)$:
- знайти відстань від точки M до α_1 ;
 - визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;
 - довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 5.

1] Задано $\vec{a} = (2, 2, 1)$, $\vec{b} = (-2, 3, 1)$, $\vec{c} = (2, 3, 1)$, $\vec{d} = (5, 1, 3)$.

Знайти

а) $\vec{b}(\vec{c} - \vec{d}, \vec{a}) + \vec{a}(2\vec{c} - 3\vec{a}, \vec{b} + \vec{d}) + \vec{c}|2\vec{c} - \vec{a}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b}+\vec{c}}(\vec{c} - \vec{d})$;

в) $\angle(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} + \vec{d})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (2, 4, \lambda)$, $\vec{b} = (3, -2, 3)$, $\vec{c} = (1, -2, 1)$. Знайти

а) $[\vec{b} - 2\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}]$ при $\lambda = 1$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -1$.

3] Задано $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\alpha : 2x + y + 4z - 3 = 0$,
 $M(3, 2, 4)$, $N(4, -2, -4)$, $\gamma : \frac{x+4}{7} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{5}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -3x - 2y + 2z - 2 = 0$, $\alpha_2 : 6x + 4y - 4z + 7 = 0$,
 $\alpha_3 : 2x + 7y + 10z + 3 = 0$, $M(-5, -5, -3)$, $N(1, 1, 4)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 6.

1] Задано $\vec{a} = (3, -1, -1)$, $\vec{b} = (3, 3, 2)$, $\vec{c} = (-1, -2, -1)$, $\vec{d} = (-2, 2, 3)$.
Знайти

а) $\vec{c}(\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}) + \vec{d}(2\vec{c} - \vec{b}, \vec{a}) + \vec{b}|\vec{a} + \vec{d}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{c}}(\vec{a} - 2\vec{b})$;

в) $\angle(\vec{a} + \vec{d}, \vec{c})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (-1, 4, \lambda)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$, $\vec{c} = (1, 3, -2)$. Знайти

а) $[\vec{c} - \vec{a}, \vec{a} + 3\vec{b}]$ при $\lambda = -4$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -3$.

3] Задано $\vec{a} = (-4, -1, -3)$, $\alpha : 5x + y - 3z + 1 = 0$,
 $M(1, 8, -7)$, $N(1, 5, 7)$, $\gamma : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -3x + y + 7z - 4 = 0$, $\alpha_2 : -9x + 3y + 21z + 4 = 0$,
 $\alpha_3 : -3x - 5y - 5z + 5 = 0$, $M(4, 6, -7)$, $N(3, -3, 2)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 7.

1] Задано $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (5, -4, 5)$, $\vec{c} = (-2, 2, -1)$, $\vec{d} = (2, -5, 8)$.
Знайти

а) $\vec{d}(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) + \vec{a}(3\vec{a} - \vec{d}, \vec{b}) + \vec{c}|3\vec{c} + \vec{b}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + 3\vec{c})$;

в) $\angle(\vec{a}, \vec{b} + 2\vec{c})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (4, 3, \lambda)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (-4, -4, 1)$. Знайти

а) $[\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{c} + \vec{a}]$ при $\lambda = -1$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 0$.

3] Задано $\vec{a} = (1, -1, -2)$, $\alpha : 3x + y + 6z + 2 = 0$,
 $M(4, -3, 2)$, $N(1, 0, -7)$, $\gamma : \frac{x+3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+7}{-3}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : x - 3y - 2z - 3 = 0$, $\alpha_2 : -4x + 12y + 8z + 6 = 0$,
 $\alpha_3 : 10x - y + 5z + 2 = 0$, $M(3, -5, -3)$, $N(2, -1, 5)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 8.

1] Задано $\vec{a} = (-2, -1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, -5)$, $\vec{c} = (2, 3, -4)$, $\vec{d} = (1, 2, -2)$.
Знайти

а) $\vec{c} \left(3\vec{d} - \vec{c}, \vec{a} \right) + \vec{a} \left(\vec{b} - \vec{d}, \vec{a} - \vec{c} \right) + \vec{d} \left| 2\vec{d} - \vec{b} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}} \left(2\vec{c} - 3\vec{d} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{a}, \vec{b} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (2, 3, \lambda)$, $\vec{b} = (1, -3, -1)$, $\vec{c} = (3, -2, 2)$. Знайти

а) $\left[\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{a} + \vec{b} \right]$ при $\lambda = 4$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 7$.

3] Задано $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\alpha : 2x - y - 1 = 0$,
 $M(2, 5, -5)$, $N(2, -1, 4)$, $\gamma : \frac{x-6}{-5} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-2}{1}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 2x + 2y + z + 4 = 0$, $\alpha_2 : 10x + 10y + 5z + 8 = 0$,
 $\alpha_3 : -2x + 4y - 4z - 7 = 0$, $M(3, 4, 6)$, $N(2, -1, 5)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 9.

1] Задано $\vec{a} = (2, 2, -1)$, $\vec{b} = (-5, -3, 2)$, $\vec{c} = (5, -2, -1)$, $\vec{d} = (1, 1, -1)$.
Знайти

а) $\vec{a} \left(2\vec{c} + \vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b} \right) + \vec{c} \left(\vec{d} - \vec{a}, 2\vec{a} - \vec{c} \right) + \vec{d} \left| 3\vec{d} - \vec{a} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b} + \vec{d}} \left(3\vec{c} + 2\vec{b} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{a}, \vec{d} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (-3, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (-1, 2, -3)$, $\vec{c} = (-3, 3, -2)$. Знайти

а) $\left[2\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - 2\vec{b} \right]$ при $\lambda = -5$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 3$.

3] Задано $\vec{a} = (0, -1, 6)$, $\alpha : 2x + 3y - 2z + 1 = 0$,
 $M(-2, 6, -1)$, $N(1, -1, -1)$, $\gamma : \frac{x-7}{-4} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{4}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 2x + y - 2z - 4 = 0$, $\alpha_2 : 4x + 2y - 4z + 1 = 0$,
 $\alpha_3 : 4x + y - 8z + 3 = 0$, $M(5, 3, -6)$, $N(1, -3, 0)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 10.

1] Задано $\vec{a} = (-2, 2, -1)$, $\vec{b} = (4, 5, -7)$, $\vec{c} = (-3, 3, -3)$, $\vec{d} = (3, -2, 3)$.

Знайти

а) $\vec{d}(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}) + \vec{c}(2\vec{a} - 3\vec{c}, \vec{d} + \vec{b}) + \vec{a}|2\vec{a} - \vec{c}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}+\vec{d}}(3\vec{a} + \vec{b})$;

в) $\angle(\vec{c}, \vec{a} + \vec{d})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (1, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (-3, -2, -2)$, $\vec{c} = (-2, -1, 1)$. Знайти

а) $[3\vec{c} + \vec{a}, \vec{c} - \vec{b}]$ при $\lambda = -4$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 4$.

3] Задано $\vec{a} = (-5, -2, -1)$, $\alpha : x - 2y - 6z + 3 = 0$, $M(-4, 2, 6)$, $N(1, 5, 2)$, $\gamma : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+7}{2}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -2x - 5y - 2z + 3 = 0$, $\alpha_2 : 6x + 15y + 6z + 7 = 0$, $\alpha_3 : 4x + y + 4z - 4 = 0$, $M(4, -5, -1)$, $N(2, -1, 4)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 11.

1] Задано $\vec{a} = (6, 5, 5)$, $\vec{b} = (-2, 3, -2)$, $\vec{c} = (-2, 2, -2)$, $\vec{d} = (-4, -3, -4)$.
Знайти

а) $\vec{b} \left(\vec{a} + \vec{d}, \vec{c} \right) + \vec{a} \left(2\vec{b} - \vec{c}, \vec{d} \right) + \vec{d} \left| \vec{a} + \vec{d} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b}-\vec{d}} \left(\vec{a} + \vec{d} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{b} - 2\vec{c}, \vec{c} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (1, -2, \lambda)$, $\vec{b} = (-3, 3, 4)$, $\vec{c} = (-5, 4, 5)$. Знайти

а) $\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$ при $\lambda = -2$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -5$.

3] Задано $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\alpha : x + y + 4z - 3 = 0$,
 $M(1, 3, 2)$, $N(-3, 6, -3)$, $\gamma : \frac{x+1}{-7} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+0}{-7}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 2x - 3y + 3z + 1 = 0$, $\alpha_2 : 8x - 12y + 12z + 5 = 0$,
 $\alpha_3 : -10x - 7y + 7z - 4 = 0$, $M(-2, 5, 2)$, $N(1, 2, -1)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 12.

- 1] Задано $\vec{a} = (-1, -4, -5)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{c} = (-4, -1, 2)$, $\vec{d} = (-1, -2, -2)$. Знайти
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{d}, \vec{c}) + \vec{d}(3\vec{d} - \vec{a}, \vec{c}) + \vec{c}|3\vec{b} + \vec{c}|^2$;
 - $\text{Pr}_{\vec{d}}(\vec{d} + 3\vec{b})$;
 - $\angle(\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{d})$;
 - чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2] Задано $\vec{a} = (3, -1, \lambda)$, $\vec{b} = (-1, 3, 2)$, $\vec{c} = (-2, 2, 0)$. Знайти
- $[\vec{a} - \vec{c}, 2\vec{a} - \vec{b}]$ при $\lambda = 5$;
 - при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 3$.
- 3] Задано $\vec{a} = (1, -3, -1)$, $\alpha : 3x + 2y + 3z - 4 = 0$, $M(-1, 1, -2)$, $N(1, -1, 8)$, $\gamma : \frac{x-6}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+7}{4}$. Знайти
- рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - проекцію точки N на пряму γ ;
 - проекцію точки M на площину α ;
 - знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4] Задано $\alpha_1 : -2x + y - 3z - 3 = 0$, $\alpha_2 : 10x - 5y + 15z + 6 = 0$, $\alpha_3 : -6x + 2y + 4z + 5 = 0$, $M(3, -6, 2)$, $N(1, 7, 1)$:
- знайти відстань від точки M до α_1 ;
 - визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;
 - довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 13.

- 1** Задано $\vec{a} = (-2, 1, -2)$, $\vec{b} = (-4, 1, -5)$, $\vec{c} = (-3, 3, -6)$, $\vec{d} = (-2, -4, -7)$. Знайти
- а) $\vec{b} \left(3\vec{a} - \vec{b}, \vec{d} \right) + \vec{d} \left(\vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{b} \right) + \vec{c} |2\vec{a} - \vec{c}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{a}} \left(2\vec{b} - 3\vec{a} \right)$;
 - в) $\angle \left(\vec{a}, \vec{b} - \vec{c} \right)$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Задано $\vec{a} = (1, -4, \lambda)$, $\vec{b} = (4, 2, 5)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$. Знайти
- а) $\left[\vec{b} + \vec{c}, 3\vec{c} - \vec{a} \right]$ при $\lambda = 3$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 1$.
- 3** Задано $\vec{a} = (-1, -5, 2)$, $\alpha : 3x + y - 3z - 2 = 0$, $M(5, 4, -7)$, $N(4, 3, 4)$, $\gamma : \frac{x+2}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{2}$. Знайти
- а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано $\alpha_1 : x + 3y - z - 3 = 0$, $\alpha_2 : -2x - 6y + 2z + 5 = 0$, $\alpha_3 : 7x - y - 7z - 4 = 0$, $M(5, -1, -4)$, $N(4, -1, 3)$:
- а) знайти відстань від точки M до α_1 ;
 - б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;
 - в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 14.

1] Задано $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, 2, 3)$, $\vec{c} = (-8, -2, 5)$, $\vec{d} = (2, 3, 2)$.
Знайти

а) $\vec{d} \left(2\vec{b} + \vec{c}, 3\vec{d} - \vec{c} \right) + \vec{b} \left(\vec{a} - \vec{d}, 2\vec{d} - \vec{b} \right) + \vec{a} \left| 3\vec{a} - \vec{d} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}} \left(3\vec{b} + 2\vec{c} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{d} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (6, 3, \lambda)$, $\vec{b} = (2, 2, -3)$, $\vec{c} = (4, 5, -5)$. Знайти

а) $\left[\vec{b} - \vec{a}, 3\vec{b} - \vec{c} \right]$ при $\lambda = -1$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -7$.

3] Задано $\vec{a} = (2, 4, 1)$, $\alpha : 2x + 3y - z + 2 = 0$,
 $M(-2, 1, -5)$, $N(1, 1, -3)$, $\gamma : \frac{x-3}{-4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+4}{1}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 2x + y + 7z + 3 = 0$, $\alpha_2 : 6x + 3y + 21z - 1 = 0$,
 $\alpha_3 : 5x + 2y - 5z + 5 = 0$, $M(-4, 1, -5)$, $N(-5, -1, 1)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 15.

1] Задано $\vec{a} = (4, -3, 3)$, $\vec{b} = (3, -1, 2)$, $\vec{c} = (3, -1, 5)$, $\vec{d} = (-3, 4, -2)$.
Знайти

а) $\vec{b} \left(\vec{a} + \vec{d}, \vec{c} \right) + \vec{a} \left(2\vec{b} - \vec{c}, \vec{d} \right) + \vec{c} \left| \vec{a} + \vec{d} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}-\vec{b}} \left(\vec{d} + 2\vec{c} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{b}, \vec{c} + \vec{d} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (2, -4, \lambda)$, $\vec{b} = (1, 1, -5)$, $\vec{c} = (1, 2, -2)$. Знайти

а) $\left[\vec{b} - 2\vec{c}, \vec{a} + \vec{c} \right]$ при $\lambda = 3$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -10$.

3] Задано $\vec{a} = (1, 2, -2)$, $\alpha : 2x + y - 2z + 3 = 0$,
 $M(5, -4, 3)$, $N(1, -2, 1)$, $\gamma : \frac{x+5}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-4}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -x - 4y + z + 2 = 0$, $\alpha_2 : 4x + 16y - 4z + 1 = 0$,
 $\alpha_3 : 7x + 7y + 8z - 5 = 0$, $M(1, 3, -1)$, $N(4, -1, 2)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 16.

1] Задано $\vec{a} = (3, 1, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, -3)$, $\vec{c} = (0, -1, 2)$, $\vec{d} = (-1, 2, 1)$.
Знайти

а) $\vec{a} \left(\vec{c} + 2\vec{d}, 2\vec{a} - 3\vec{c} \right) + \vec{c} \left(2\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{a} - \vec{c} \right) + \vec{d} \left| \vec{d} - \vec{c} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{c}} \left(2\vec{b} - \vec{a} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{d}, \vec{b} + \vec{d} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (4, 1, \lambda)$, $\vec{b} = (-2, -2, 3)$, $\vec{c} = (2, -1, -2)$. Знайти

а) $\left[\vec{c} - \vec{a}, \vec{a} + 3\vec{b} \right]$ при $\lambda = -5$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -7$.

3] Задано $\vec{a} = (2, -4, 3)$, $\alpha : 3x + y - z - 1 = 0$,
 $M(-2, -3, 1)$, $N(-2, -1, 0)$, $\gamma : \frac{x+6}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+3}{-2}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -x + y + 2z - 6 = 0$, $\alpha_2 : -5x + 5y + 10z - 8 = 0$,
 $\alpha_3 : -2x - 4y - 2z + 7 = 0$, $M(-4, 3, -2)$, $N(1, -2, 5)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 17.

1] Задано $\vec{a} = (-2, 3, -2)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (2, 3, -3)$, $\vec{d} = (-3, 1, -3)$.
Знайти

а) $\vec{a} \left(\vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{d} \right) + \vec{c} \left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{d} - \vec{a} \right) + \vec{b} \left| \vec{b} + \vec{d} - \vec{c} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}+\vec{b}} \left(\vec{c} - 2\vec{b} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{b}, \vec{a} - \vec{d} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (1, -2, \lambda)$, $\vec{b} = (3, -3, 4)$, $\vec{c} = (-4, 2, -3)$. Знайти

а) $\left[\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{c} + \vec{a} \right]$ при $\lambda = 1$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 5$.

3] Задано $\vec{a} = (-3, 1, 1)$, $\alpha : 2x + y - z + 2 = 0$,
 $M(1, 4, -4)$, $N(1, -1, 2)$, $\gamma : \frac{x-3}{-5} = \frac{y}{-1} = \frac{z+5}{1}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проєкцію точки N на пряму γ ;

в) проєкцію точки M на площину α ;

г) знайти проєкцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : x - 2y - 4z - 3 = 0$, $\alpha_2 : 2x - 4y - 8z - 3 = 0$,
 $\alpha_3 : 10x - 5y + 8z + 4 = 0$, $M(4, 3, 1)$, $N(3, -1, 1)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 18.

1] Задано $\vec{a} = (0, 3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 0, -1)$, $\vec{c} = (2, 3, -1)$, $\vec{d} = (1, 1, 0)$.
Знайти

а) $\vec{c} \left(2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{d} - \vec{c} \right) + \vec{a} \left(2\vec{b} - 3\vec{c}, 2\vec{a} - \vec{c} \right) + \vec{d} \left| \vec{d} - \vec{a} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b}} \left(\vec{a} + 2\vec{d} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{c}, \vec{b} + \vec{c} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (2, 1, \lambda)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$, $\vec{c} = (4, -2, 5)$. Знайти

а) $\left[\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{a} + \vec{b} \right]$ при $\lambda = 1$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 3$.

3] Задано $\vec{a} = (3, 3, 1)$, $\alpha : -x + 2y + 4z + 1 = 0$,
 $M(5, 2, -6)$, $N(4, 4, 7)$, $\gamma : \frac{x+6}{5} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{1}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : x + 6y + 5z - 6 = 0$, $\alpha_2 : -3x - 18y - 15z + 8 = 0$,
 $\alpha_3 : -2x + 7y - 3z + 3 = 0$, $M(-5, -5, 2)$, $N(1, -4, 4)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 19.

1] Задано $\vec{a} = (-1, 1, -2)$, $\vec{b} = (-3, -2, 0)$, $\vec{c} = (-1, 1, 0)$, $\vec{d} = (-2, -3, 3)$.

Знайти

а) $\vec{a} \left(\vec{b} - \vec{d}, 3\vec{a} + 2\vec{d} \right) + \vec{d} \left(\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{c} - \vec{a} \right) + \vec{c} |\vec{a} - 3\vec{c}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}} \left(3\vec{d} + \vec{c} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{a}, \vec{d} - \vec{b} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (2, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (3, 2, 2)$, $\vec{c} = (4, 5, 3)$. Знайти

а) $\left[2\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - 2\vec{b} \right]$ при $\lambda = 3$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 1$.

3] Задано $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\alpha : x + y - z - 3 = 0$,
 $M(5, 1, 6)$, $N(0, -3, 4)$, $\gamma : \frac{x+5}{-4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+5}{1}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 3x + 2y - z - 1 = 0$, $\alpha_2 : 12x + 8y - 4z - 7 = 0$,
 $\alpha_3 : x + 5y - 10z - 6 = 0$, $M(-3, 6, -5)$, $N(-2, 5, 4)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 20.

1] Задано $\vec{a} = (1, 3, -1)$, $\vec{b} = (3, 5, -5)$, $\vec{c} = (-1, 3, 3)$, $\vec{d} = (1, 2, 2)$.
Знайти

а) $\vec{b}(\vec{b} + \vec{c}, \vec{c} - \vec{d}) + \vec{c}(2\vec{d} - \vec{b}, \vec{a}) + \vec{a}|\vec{b} - 2\vec{a}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{d}}(\vec{a} - \vec{b})$;

в) $\angle(\vec{d}, \vec{a} + \vec{c})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (5, -4, \lambda)$, $\vec{b} = (-2, 4, -1)$, $\vec{c} = (-1, 1, 2)$. Знайти

а) $[3\vec{c} + \vec{a}, \vec{c} - \vec{b}]$ при $\lambda = -2$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -8$.

3] Задано $\vec{a} = (3, 1, -1)$, $\alpha : 3x - y + 2z - 2 = 0$,
 $M(-5, 5, 5)$, $N(1, 1, -2)$, $\gamma : \frac{x+6}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+3}{-2}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : x + 2y + 2z - 3 = 0$, $\alpha_2 : -5x - 10y - 10z + 6 = 0$,
 $\alpha_3 : 4x - 4y - 2z + 7 = 0$, $M(1, 5, 2)$, $N(7, 1, -1)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 21.

1] Задано $\vec{a} = (4, -1, -3)$, $\vec{b} = (1, 1, 7)$, $\vec{c} = (1, 1, 2)$, $\vec{d} = (4, -1, 1)$.
Знайти

а) $\vec{a} \left(2\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{c} - \vec{a} \right) + \vec{c} \left(\vec{b} - \vec{d}, \vec{a} - 2\vec{d} \right) + \vec{d} \left| 3\vec{c} - \vec{b} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{d}} \left(\vec{a} - \vec{b} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{c}, \vec{c} - \vec{d} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (1, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (3, -1, -2)$, $\vec{c} = (4, -4, -3)$. Знайти

а) $\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$ при $\lambda = 4$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -1$.

3] Задано $\vec{a} = (3, -1, 3)$, $\alpha : 2x - 4y - 4z - 1 = 0$,
 $M(1, 6, 1)$, $N(3, -1, 4)$, $\gamma : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z+6}{1}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : x - 2y + z + 3 = 0$, $\alpha_2 : -2x + 4y - 2z + 3 = 0$,
 $\alpha_3 : -7x - y + 2z + 4 = 0$, $M(2, 5, -1)$, $N(-2, -4, 1)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 22.

1] Задано $\vec{a} = (0, 4, -3)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$, $\vec{c} = (-3, 7, -5)$, $\vec{d} = (1, 3, -2)$.
Знайти

а) $\vec{b} \left(\vec{c} - \vec{d}, \vec{a} - \vec{b} \right) + \vec{a} \left(2\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} \right) + \vec{d} \left| 2\vec{d} - \vec{a} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b}} \left(\vec{c} - 2\vec{d} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{a} - \vec{d}, \vec{b} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (3, -1, \lambda)$, $\vec{b} = (4, -1, 5)$, $\vec{c} = (0, 4, 3)$. Знайти

а) $\left[\vec{a} - \vec{c}, 2\vec{a} - \vec{b} \right]$ при $\lambda = 1$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 4$.

3] Задано $\vec{a} = (5, -1, 3)$, $\alpha : x + y + 3z + 4 = 0$,
 $M(2, 4, 4)$, $N(-1, -3, 7)$, $\gamma : \frac{x-5}{3} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-2}{1}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -7x + y - z + 2 = 0$, $\alpha_2 : -21x + 3y - 3z - 4 = 0$,
 $\alpha_3 : -x + 5y + 5z + 7 = 0$, $M(3, -2, -4)$, $N(-1, -5, -1)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 23.

1] Задано $\vec{a} = (-1, -2, -1)$, $\vec{b} = (-3, -1, -2)$, $\vec{c} = (-3, 3, 1)$, $\vec{d} = (-2, 1, -1)$. Знайти

а) $\vec{b}(\vec{a} - 3\vec{c}, \vec{b}) + \vec{d}(\vec{b} - 2\vec{a}, \vec{c} - \vec{d}) + \vec{c}|\vec{b} - 2\vec{d}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{d})$;

в) $\angle(\vec{a}, \vec{b} - \vec{c})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (4, -2, \lambda)$, $\vec{b} = (4, -3, -2)$, $\vec{c} = (2, -1, 1)$. Знайти

а) $[\vec{b} + \vec{c}, 3\vec{c} - \vec{a}]$ при $\lambda = 1$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -1$.

3] Задано $\vec{a} = (2, 1, 4)$, $\alpha : x - 3y - 2z + 1 = 0$, $M(5, -4, -7)$, $N(1, 7, -1)$, $\gamma : \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+2}{3}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 2x + 2y - 3z - 4 = 0$, $\alpha_2 : -8x - 8y + 12z + 7 = 0$, $\alpha_3 : 7x - 2y - 10z - 2 = 0$, $M(-6, 1, -3)$, $N(-2, 1, 1)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 24.

1] Задано $\vec{a} = (-3, 4, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, -2)$, $\vec{d} = (2, 1, -3)$.
Знайти

а) $\vec{a} \left(2\vec{b} - \vec{d}, \vec{a} + 2\vec{c} \right) + \vec{d} \left(\vec{c}, \vec{b} - 2\vec{a} \right) + \vec{c} \left| \vec{c} - \vec{d} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b}-\vec{c}} \left(\vec{c} - \vec{d} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{b}, \vec{c} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (1, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (-2, -3, 3)$, $\vec{c} = (-1, -2, 1)$. Знайти

а) $\left[\vec{b} - \vec{a}, 3\vec{b} - \vec{c} \right]$ при $\lambda = -2$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -5$.

3] Задано $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\alpha : 2x + 3y + 5z - 2 = 0$,
 $M(0, -7, -3)$, $N(-2, 2, 1)$, $\gamma : \frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+5}{2}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 3x + y + 2z - 5 = 0$, $\alpha_2 : 15x + 5y + 10z - 7 = 0$,
 $\alpha_3 : 4x + 6y - 2z + 3 = 0$, $M(4, 1, 3)$, $N(1, 0, 2)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 25.

1] Задано $\vec{a} = (-2, -3, 2)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, -2, 5)$, $\vec{d} = (1, -2, -1)$.
Знайти

а) $\vec{a} (\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} (3\vec{d} - \vec{b}, \vec{b}) + \vec{c} |\vec{b} + \vec{d}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b}} (\vec{c} - 2\vec{a})$;

в) $\angle (\vec{a} + \vec{d}, \vec{b})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (-3, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (1, -4, 3)$, $\vec{c} = (2, -3, 1)$. Знайти

а) $[\vec{b} - 2\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}]$ при $\lambda = 2$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 4$.

3] Задано $\vec{a} = (1, 7, 3)$, $\alpha : 2x + y - 2z + 2 = 0$,
 $M(5, -5, -4)$, $N(1, 3, 0)$, $\gamma : \frac{x+6}{-1} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-3}{-2}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -3x - y + z - 3 = 0$, $\alpha_2 : -6x - 2y + 2z + 3 = 0$,
 $\alpha_3 : 7x + 7y + z + 4 = 0$, $M(-3, 4, -6)$, $N(1, -3, 4)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 26.

1] Задано $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (4, -2, 2)$, $\vec{c} = (3, -2, 3)$, $\vec{d} = (-2, 0, -2)$.
Знайти

а) $\vec{b}(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{b}) + \vec{a}(2\vec{a} - 3\vec{c}, \vec{d}) + \vec{c}|2\vec{d} + \vec{a}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b}+\vec{d}}(\vec{c})$;

в) $\angle(\vec{b}, \vec{d})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (-4, 3, \lambda)$, $\vec{b} = (2, -2, -3)$, $\vec{c} = (-3, 1, 1)$. Знайти

а) $[\vec{c} - \vec{a}, \vec{a} + 3\vec{b}]$ при $\lambda = 2$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 5$.

3] Задано $\vec{a} = (-3, -1, -6)$, $\alpha : x + 4y + z - 3 = 0$,
 $M(-3, 2, 4)$, $N(3, 8, -2)$, $\gamma : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-5}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -x + 5y + z - 2 = 0$, $\alpha_2 : 3x - 15y - 3z + 1 = 0$,
 $\alpha_3 : -3x - 3y - 3z + 1 = 0$, $M(5, 7, -4)$, $N(2, 1, 3)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 27.

1] Задано $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, -1, 0)$, $\vec{c} = (3, -1, 1)$, $\vec{d} = (2, -1, -1)$.

Знайти

а) $\vec{d}(\vec{c} - \vec{d}, \vec{b} - 2\vec{d}) + \vec{a}(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} - 3\vec{b}) + \vec{c}|2\vec{a} + \vec{c}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}+\vec{d}}(2\vec{b} - \vec{c})$;

в) $\angle(\vec{d}, \vec{a} + \vec{b})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (5, -1, \lambda)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$, $\vec{c} = (-2, 2, 3)$. Знайти

а) $[\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{c} + \vec{a}]$ при $\lambda = -2$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 10$.

3] Задано $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\alpha : 5x - y + 2z + 1 = 0$,
 $M(2, 4, -1)$, $N(1, 0, 3)$, $\gamma : \frac{x-7}{-1} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-5}{1}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : 3x - 3y - 2z - 1 = 0$, $\alpha_2 : 12x - 12y - 8z - 5 = 0$,
 $\alpha_3 : 7x - 7y + 10z + 2 = 0$, $M(-2, 4, -4)$, $N(3, -1, 4)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 28.

- 1] Задано $\vec{a} = (-4, 1, 4)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$, $\vec{c} = (-4, 2, 2)$, $\vec{d} = (1, 3, 4)$.
Знайти
- а) $\vec{b}(\vec{b} + \vec{d}, \vec{c} - \vec{d}) + \vec{a}(2\vec{b} - \vec{a}, \vec{a}) + \vec{d}|3\vec{b} - \vec{c}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{a}-2\vec{b}}(\vec{c} - \vec{d})$;
 - в) $\angle(\vec{c}, \vec{a} - \vec{c})$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2] Задано $\vec{a} = (2, -3, \lambda)$, $\vec{b} = (-5, 4, 4)$, $\vec{c} = (-3, 1, 3)$. Знайти
- а) $[\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{a} + \vec{b}]$ при $\lambda = -1$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 2$.
- 3] Задано $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\alpha : x + 4y + 2z - 4 = 0$,
 $M(1, -1, -7)$, $N(-2, 1, 1)$, $\gamma : \frac{x+1}{-3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{-1}$. Знайти
- а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4] Задано $\alpha_1 : x + y + 3z - 3 = 0$, $\alpha_2 : -5x - 5y - 15z + 7 = 0$,
 $\alpha_3 : -5x + 5y - 7z - 5 = 0$, $M(-9, -4, -2)$, $N(1, -6, 3)$:
- а) знайти відстань від точки M до α_1 ;
 - б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;
 - в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 29.

1] Задано $\vec{a} = (-1, 0, -1)$, $\vec{b} = (3, -1, 3)$, $\vec{c} = (2, -2, 3)$, $\vec{d} = (-5, 3, -5)$.

Знайти

а) $\vec{b} \left(3\vec{a} - \vec{d}, \vec{a} \right) + \vec{d} \left(\vec{b} - \vec{c}, \vec{d} + \vec{c} \right) + \vec{c} \left| 2\vec{b} + \vec{d} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}+\vec{b}} \left(2\vec{c} + \vec{d} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{a}, \vec{c} + \vec{d} \right)$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (-1, 3, \lambda)$, $\vec{b} = (1, 1, 3)$, $\vec{c} = (3, 4, 4)$. Знайти

а) $\left[2\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - 2\vec{b} \right]$ при $\lambda = 2$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = -5$.

3] Задано $\vec{a} = (1, 4, -3)$, $\alpha : x - 3y + z + 2 = 0$,
 $M(1, 5, 1)$, $N(-4, 1, 0)$, $\gamma : \frac{x-5}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+2}{-1}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : x + 2y - 2z - 2 = 0$, $\alpha_2 : -2x - 4y + 4z + 1 = 0$,
 $\alpha_3 : 4x + 4y - 7z + 3 = 0$, $M(1, 5, 3)$, $N(1, -2, -3)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 30.

1] Задано $\vec{a} = (-2, 1, -4)$, $\vec{b} = (-3, 3, -1)$, $\vec{c} = (-3, 4, 1)$, $\vec{d} = (-1, 3, 1)$.
Знайти

а) $\vec{a}(\vec{c} + 2\vec{a}, \vec{b} - \vec{a}) + \vec{c}(2\vec{b} - \vec{d}, \vec{c} - \vec{b}) + \vec{d}|2\vec{d} - \vec{c}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{d}}(2\vec{a} - \vec{c})$;

в) $\angle(\vec{b} - \vec{c}, \vec{d} - \vec{b})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2] Задано $\vec{a} = (-2, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (3, -2, -4)$, $\vec{c} = (1, -3, -2)$. Знайти

а) $[3\vec{c} + \vec{a}, \vec{c} - \vec{b}]$ при $\lambda = 3$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} при $\lambda = 5$.

3] Задано $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\alpha : 2x - 5y + 7z + 1 = 0$,
 $M(2, 4, -9)$, $N(-2, 5, 6)$, $\gamma : \frac{x+1}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{2}$. Знайти

а) рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) проекцію точки N на пряму γ ;

в) проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4] Задано $\alpha_1 : -2x - 2y - 7z + 1 = 0$, $\alpha_2 : -6x - 6y - 21z - 4 = 0$,
 $\alpha_3 : 5x + 4y + 4z - 5 = 0$, $M(2, -6, 4)$, $N(1, -6, 2)$:

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

г) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВІДПОВІДІ.

1. 1а: $(40, 25, -25)$; 1б: $\frac{8}{\sqrt{2}}$; 1в: $\arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$; 1г: $\left(\frac{10}{9}, \frac{5}{3}, \frac{-16}{9}\right)$;
 2а: $(3, -11, -1)$; 2б: $\alpha = \frac{-5}{2}, \lambda = \frac{-22}{3}$; 2в: $\lambda = \frac{-22}{3}$ – компланарні, $\lambda > \frac{-22}{3}$ – права трійка, $\lambda < \frac{-22}{3}$ – ліва трійка;
 2г: $V_{\text{paral}} = 1, V_{\text{tetr}} = \frac{1}{6}$; 3а: $8x + 5y + z + 3 = 0$; 3б: $\left(\frac{29}{5}, 0, \frac{-27}{5}\right)$;
 3в: $(-1, -2, -2)$; 3г: $\begin{cases} x + y + 2z + 5 = 0, \\ 3x - y - z - 1 = 0; \end{cases}$ 4а: $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 4б: в різних;
 4в: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$; 4г: $2x + 13y - 17z - 1 = 0, 14x + 7y + 7z + 11 = 0$.
2. 1а: $(38, -31, 14)$; 1б: $\frac{32}{\sqrt{14}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{19}{14\sqrt{3}}$; 1г: $(-25, 9, -7)$;
 2а: $(-9, -5, 1)$; 2б: $\alpha = 1, \lambda = 2$; 2в: $\lambda = 2$ – компланарні, $\lambda < 2$ – права трійка, $\lambda > 2$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 7, V_{\text{tetr}} = \frac{7}{6}$;
 3а: $2x + 4y - 7z + 3 = 0$; 3б: $\left(\frac{-22}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{8}{3}\right)$;
 3в: $(2, -2, 6)$; 3г: $\begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0, \\ x + 5y + z + 2 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{38}$; 4б: в одному;
 4в: $2\sqrt{\frac{2}{19}}$; 4г: $3x - 9y - 4z + 2 = 0, x + 3y - 6z + 8 = 0$.
3. 1а: $(20, -34, -24)$; 1б: $\frac{3}{\sqrt{11}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{1}{3\sqrt{11}}$;
 1г: $\left(-1, \frac{19}{7}, \frac{-4}{7}\right)$; 2а: $(10, 5, 1)$; 2б: $\alpha = \frac{-8}{9}, \lambda = \frac{-23}{6}$;
 2в: $\lambda = \frac{-23}{6}$ – компланарні, $\lambda > \frac{-23}{6}$ – права трійка, $\lambda < \frac{-23}{6}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 1, V_{\text{tetr}} = \frac{1}{6}$;
 3а: $x - 2y + 3z + 10 = 0$; 3б: $\left(\frac{-9}{5}, -3, \frac{3}{5}\right)$; 3в: $(-4, 0, 3)$; 3г: $\begin{cases} x + 2y - 2z + 9 = 0, \\ 2x + 2y + 3z - 1 = 0; \end{cases}$
 4а: $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{13}{4\sqrt{6}}$; 4г: $13x + y - 4z - 14 = 0, x - 5y + 2z + 10 = 0$.
4. 1а: $(20, 5, 79)$; 1б: $\frac{15}{\sqrt{3}}$; 1в: $\arccos \frac{5}{\sqrt{33}}$; 1г: $(0, -5, 3)$;
 2а: $(9, -1, 6)$; 2б: $\alpha = \frac{-20}{7}, \lambda = \frac{-6}{5}$; 2в: $\lambda = \frac{-6}{5}$ – компланарні,

- $\lambda < \frac{-6}{5}$ – права трійка, $\lambda > \frac{-6}{5}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 9$, $V_{\text{tetr}} = \frac{3}{2}$; 3а: $x + y + 2z - 9 = 0$; 3б: $\left(\frac{-11}{5}, 0, \frac{-17}{5}\right)$; 3в: $(2, 5, 2)$; 3г: $\begin{cases} 2x - z + 1 = 0, \\ 2x - 3y + 4z + 3 = 0; \end{cases}$ 4а: $3\sqrt{\frac{3}{2}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4г: $6x + 6y - 1 = 0, 2x - 2y - 4z + 7 = 0$.
5. 1а: $(30, 31, 7)$; 1б: $\frac{4}{\sqrt{10}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{8}{3\sqrt{17}}$; 1г: $\left(8, \frac{1}{4}, \frac{-21}{4}\right)$; 2а: $(2, 1, -4)$; 2б: $\alpha = \frac{-1}{2}, \lambda = 2$; 2в: $\lambda = 2$ – компланарні, $\lambda < 2$ – права трійка, $\lambda > 2$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 12, V_{\text{tetr}} = 2$; 3а: $x - 8y - 3z - 32 = 0$; 3б: $\left(\frac{-13}{5}, \frac{-16}{5}, 5\right)$; 3в: $(1, 1, 0)$; 3г: $\begin{cases} x + 2y - z + 14 = 0, \\ 2x + y + 4z - 3 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{17}$; 4б: в одному; 4в: $\frac{3}{2\sqrt{17}}$; 4г: $7x - y - 16z + 3 = 0, 11x + 13y + 4z + 9 = 0$.
6. 1а: $(15, -12, -11)$; 1б: $\frac{22}{\sqrt{6}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{5}{6}$; 1г: $\left(\frac{-9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{16}{5}\right)$; 2а: $(5, 6, -2)$; 2б: $\alpha = \frac{-7}{2}, \lambda = \frac{-11}{5}$; 2в: $\lambda = \frac{-11}{5}$ – компланарні, $\lambda > \frac{-11}{5}$ – права трійка, $\lambda < \frac{-11}{5}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 4, V_{\text{tetr}} = \frac{2}{3}$; 3а: $3x + 9y - 7z + 1 = 0$; 3б: $\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{17}{2}\right)$; 3в: $(-4, 7, -4)$; 3г: $\begin{cases} -x + 2y - z + 7 = 0, \\ 5x + y - 3z + 1 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{59}$; 4б: в одному; 4в: $\frac{16}{3\sqrt{59}}$; 4г: $6x + 4y - 2z - 1 = 0, 2y + 4z - 3 = 0$.
7. 1а: $(6, -35, 73)$; 1б: $\frac{1}{\sqrt{14}}$; 1в: $\arccos \frac{5}{\sqrt{35}}$; 1г: $\left(\frac{29}{10}, \frac{-1}{10}, \frac{1}{5}\right)$; 2а: $(-6, 5, 1)$; 2б: $\alpha = \frac{-4}{7}, \lambda = \frac{-3}{8}$; 2в: $\lambda = \frac{-3}{8}$ – компланарні, $\lambda < \frac{-3}{8}$ – права трійка, $\lambda > \frac{-3}{8}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 3, V_{\text{tetr}} = \frac{1}{2}$; 3а: $7x + y + 3z + 14 = 0$; 3б: $(-2, -3, -10)$; 3в: $\left(\frac{5}{2}, \frac{-7}{2}, -1\right)$; 3г: $\begin{cases} 3x - 3y - z - 13 = 0, \\ 3x + y + 6z + 2 = 0; \end{cases}$ 4а: $3\sqrt{\frac{7}{2}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{3}{2\sqrt{14}}$; 4г: $13x - 10y - z - 7 = 0, 7x + 8y + 11z + 11 = 0$.

8. 1а: $(16, 11, -12)$; 1б: -2 ; 1в: $\pi - \arccos \frac{10}{3\sqrt{30}}$; 1г: $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{7}, \frac{13}{14}\right)$;
 2а: $(2, -1, -1)$; 2б: $\alpha = \frac{-13}{9}, \lambda = \frac{31}{7}$; 2в: $\lambda = \frac{31}{7}$ – компланарні,
 $\lambda > \frac{31}{7}$ – права трійка, $\lambda < \frac{31}{7}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} =$
 $18, V_{\text{tetr}} = 3$; 3а: $x + 3y + 11z - 43 = 0$; 3б: $\left(\frac{13}{3}, \frac{-23}{3}, \frac{7}{3}\right)$;
 3в: $\left(\frac{14}{5}, \frac{23}{5}, \frac{-25}{5}\right)$; 3г: $\begin{cases} x + 2y + 9z - 10 = 0, \\ 2x - y - 0z - 1 = 0; \end{cases}$ 4а: 8; 4б: в
 одному; 4в: $\frac{4}{5}$; 4г: $2x + 8y - 2z + 1 = 0, 2x + 2z + 5 = 0$.
9. 1а: $(-35, 0, 7)$; 1б: $\frac{5}{\sqrt{21}}$; 1в: $\arccos \frac{5}{3\sqrt{3}}$; 1г: $(13, 7, 2)$;
 2а: $(7, -3, 1)$; 2б: $\alpha = \frac{-3}{4}, \lambda = \frac{1}{3}$; 2в: $\lambda = \frac{1}{3}$ – компланарні,
 $\lambda > \frac{1}{3}$ – права трійка, $\lambda < \frac{1}{3}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 8, V_{\text{tetr}} =$
 $\frac{4}{3}$; 3а: $x - 12y - 2z - 15 = 0$; 3б: $(3, 3, 2)$; 3в: $(-4, 3, 1)$;
 3г: $\begin{cases} x + z - 5 = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 1 = 0; \end{cases}$ 4а: 7; 4б: в різних; 4в: $\frac{3}{2}$; 4г: $10x +$
 $4y - 14z - 9 = 0, 2x + 2y + 2z - 15 = 0$.
10. 1а: $(-9, 0, -6)$; 1б: $\frac{-22}{\sqrt{5}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{3}{\sqrt{15}}$; 1г: $\left(\frac{11}{9}, \frac{1}{9}, \frac{-5}{3}\right)$;
 2а: $(-2, 14, -4)$; 2б: $\alpha = \frac{-3}{4}, \lambda = 10$; 2в: $\lambda = 10$ – компланарні,
 $\lambda < 10$ – права трійка, $\lambda > 10$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 6, V_{\text{tetr}} =$
 1 ; 3а: $2x + 11y - 32z + 7 = 0$; 3б: $(-1, 7, -5)$; 3в: $(-3, 0, 0)$;
 3г: $\begin{cases} 8x + y + z + 6 = 0, \\ x - 2y - 6z + 3 = 0; \end{cases}$ 4а: $2\sqrt{\frac{11}{3}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{16}{3\sqrt{33}}$;
 4г: $2x - 4y + 2z - 1 = 0, 6x + 6y + 6z - 7 = 0$.
11. 1а: $(-8, -13, -12)$; 1б: $\frac{9}{\sqrt{11}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{5}{3\sqrt{3}}$; 1г: $(0, -7, 9)$;
 2а: $(-1, 4, -3)$; 2б: $\alpha = -2, \lambda = -3$; 2в: $\lambda = -3$ – компланарні,
 $\lambda > -3$ – права трійка, $\lambda < -3$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} =$
 $6, V_{\text{tetr}} = 1$; 3а: $5x - 7y - 4z + 45 = 0$; 3б: $\left(\frac{-10}{3}, \frac{11}{3}, \frac{-7}{3}\right)$;
 3в: $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$; 3г: $\begin{cases} x + 7y - 2z - 27 = 0, \\ x + y + 4z - 3 = 0; \end{cases}$ 4а: $6\sqrt{\frac{2}{11}}$; 4б: в
 одному; 4в: $\frac{1}{4\sqrt{22}}$; 4г: $4x + 16y - 16z + 1 = 0, 16x - 2y + 2z + 7 = 0$.

12. 1а: $(-35, 11, 47)$; 1б: 1; 1в: $\arccos \frac{3}{2\sqrt{3}}$; 1г: $\left(\frac{5}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{1}{11}\right)$;
 2а: $(1, -5, -4)$; 2б: $\alpha = \frac{-1}{2}, \lambda = 2$; 2в: $\lambda = 2$ – компланарні,
 $\lambda > 2$ – права трійка, $\lambda < 2$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 4, V_{\text{tetr}} = \frac{2}{3}$;
 3а: $2x + y - z + 7 = 0$; 3б: $(5, 7, -3)$; 3в: $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{-1}{2}\right)$;
 3г: $\begin{cases} 2x + 3y - 4z - 43 = 0, \\ 3x + 2y + 3z - 4 = 0; \end{cases}$ 4а: $3\sqrt{\frac{7}{2}}$; 4б: в одному; 4в: $\frac{9}{5\sqrt{14}}$;
 4г: $10x - 4y + 2z + 1 = 0, 2x - 10z - 11 = 0$.
13. 1а: $(-22, 37, -23)$; 1б: $\frac{11}{3}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{2}{3\sqrt{6}}$; 1г: $(-9, 5, 0)$;
 2а: $(-4, -1, 3)$; 2б: $\alpha = \frac{-1}{6}, \lambda = \frac{7}{2}$; 2в: $\lambda = \frac{7}{2}$ – компланарні,
 $\lambda < \frac{7}{2}$ – права трійка, $\lambda > \frac{7}{2}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 15, V_{\text{tetr}} = \frac{5}{2}$;
 3а: $6x - 4y - 7z + 16 = 0$; 3б: $\left(\frac{4}{3}, \frac{23}{3}, \frac{4}{3}\right)$; 3в: $(-1, 2, -1)$;
 3г: $\begin{cases} 2x - 3y + z + 19 = 0, \\ 3x + y - 3z - 2 = 0; \end{cases}$ 4а: $\frac{3}{\sqrt{11}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{1}{2\sqrt{11}}$;
 4г: $10x + 8y - 10z - 13 = 0, 4x - 10y - 4z + 5 = 0$.
14. 1а: $(3, 25, 3)$; 1б: $\frac{16}{\sqrt{6}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{6}}$; 1г: $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$;
 2а: $(6, -20, -2)$; 2б: $\alpha = -3, \lambda = -12$; 2в: $\lambda = -12$ – компланарні,
 $\lambda > -12$ – права трійка, $\lambda < -12$ – ліва трійка;
 2г: $V_{\text{paral}} = 10, V_{\text{tetr}} = \frac{5}{3}$; 3а: $3x - 2y + 2z + 5 = 0$; 3б: $\left(5, \frac{-5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$;
 3в: $\left(\frac{-20}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{-32}{7}\right)$; 3г: $\begin{cases} x - y - z - 12 = 0, \\ 2x + 3y - z + 2 = 0; \end{cases}$ 4а: $\frac{13}{\sqrt{6}}$; 4б: в
 одному; 4в: $\frac{5}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4г: $7x + 3y + 2z + 8 = 0, 3x + y - 12z + 2 = 0$.
15. 1а: $(-14, 23, -4)$; 1б: $\frac{7}{\sqrt{6}}$; 1в: $\arccos \frac{1}{2\sqrt{7}}$; 1г: $\left(\frac{-9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right)$;
 2а: $(-5, -2, 11)$; 2б: $\alpha = \frac{-4}{3}, \lambda = -28$; 2в: $\lambda = -28$ – компланарні,
 $\lambda > -28$ – права трійка, $\lambda < -28$ – ліва трійка;
 2г: $V_{\text{paral}} = 18, V_{\text{tetr}} = 3$; 3а: $2x + 6y + 7z + 3 = 0$; 3б: $\left(-2, \frac{19}{5}, \frac{8}{5}\right)$;
 3в: $\left(\frac{13}{3}, \frac{-13}{3}, \frac{11}{3}\right)$; 3г: $\begin{cases} 2x - 2y + z + 10 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0; \end{cases}$ 4а: $2\sqrt{2}$; 4б: в

- різних; 4в: $\frac{3}{4\sqrt{2}}$; 4г: $4x - 5y + 11z + 1 = 0$, $10x + 19y + 5z - 11 = 0$.
16. 1а: $(-2, 36, -2)$; 1б: $\frac{-15}{\sqrt{5}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{1}{6}$; 1г: $\left(\frac{1}{5}, \frac{-4}{5}, -1\right)$;
 2а: $(7, 2, 6)$; 2б: $\alpha = -1, \lambda = -5$; 2в: $\lambda = -5$ – компланарні, $\lambda > -5$ – права трійка, $\lambda < -5$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 12, V_{\text{tetr}} = 2$; 3а: $x - y - 2z + 1 = 0$; 3б: $(-4, -1, 1)$; 3в: $(1, -2, 0)$;
 3г: $\begin{cases} x + 7y + 10z + 1 = 0, \\ 3x + y - z - 1 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{11}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$;
 4г: $4x + 2y - 2z + 5 = 0, 6y + 6z - 19 = 0$.
17. 1а: $(-14, 42, 6)$; 1б: $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 1в: $\arccos \frac{4}{3\sqrt{2}}$; 1г: $\left(\frac{4}{5}, \frac{-7}{5}, 0\right)$;
 2а: $(1, 11, 3)$; 2б: $\alpha = 2, \lambda = \frac{5}{2}$; 2в: $\lambda = \frac{5}{2}$ – компланарні, $\lambda < \frac{5}{2}$ – права трійка, $\lambda > \frac{5}{2}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 15, V_{\text{tetr}} = \frac{5}{2}$; 3а: $x - y + 4z - 10 = 0$; 3б: $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-13}{3}\right)$; 3в: $(-3, 2, -2)$;
 3г: $\begin{cases} y + z + 5 = 0, \\ 2x + y - z + 2 = 0; \end{cases}$ 4а: $3\sqrt{\frac{3}{7}}$; 4б: в одному; 4в: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$;
 4г: $13x - 11y - 4z - 5 = 0, 7x + y + 20z + 13 = 0$.
18. 1а: $(0, -27, -5)$; 1б: $\frac{-3}{\sqrt{2}}$; 1в: $\arccos \frac{13}{14}$; 1г: $\left(0, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$;
 2а: $(-7, -3, 8)$; 2б: $\alpha = \frac{-8}{7}, \lambda = \frac{19}{10}$; 2в: $\lambda = \frac{19}{10}$ – компланарні, $\lambda > \frac{19}{10}$ – права трійка, $\lambda < \frac{19}{10}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 11, V_{\text{tetr}} = \frac{11}{6}$; 3а: $x - 2y + 3z - 17 = 0$; 3б: $(-1, 11, 4)$;
 3в: $\left(\frac{27}{7}, \frac{30}{7}, \frac{-10}{7}\right)$; 3г: $\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 27 = 0, \\ -x + 2y + 4z + 1 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{\frac{31}{2}}$;
 4б: в одному; 4в: $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{31}}$; 4г: $x - 13y - 2z + 3 = 0, 3x - y + 8z - 9 = 0$.
19. 1а: $(-14, 19, -11)$; 1б: $\frac{-19}{\sqrt{6}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{8}{1\sqrt{66}}$; 1г: $\left(\frac{-3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$;
 2а: $(-3, 2, 8)$; 2б: $\alpha = 1, \lambda = \frac{10}{7}$; 2в: $\lambda = \frac{10}{7}$ – компланарні, $\lambda > \frac{10}{7}$ – права трійка, $\lambda < \frac{10}{7}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 3, V_{\text{tetr}} = \frac{1}{2}$; 3а: $x + 3y + 7z - 19 = 0$; 3б: $\left(\frac{-11}{3}, \frac{7}{3}, \frac{-16}{3}\right)$;

- 3В: $(6, 2, 5)$; 3Г: $\begin{cases} y + z + 3 = 0, \\ x + y - z - 3 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{\frac{7}{2}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{3}{4\sqrt{14}}$;
4Г: $10x + 11y - 13z - 9 = 0, 8x + y + 7z + 3 = 0$.
20. 1а: $(30, 4, -60)$; 1б: $\frac{2}{3}$; 1в: $\arccos \frac{8}{3\sqrt{10}}$; 1г: $\left(\frac{25}{2}, -5, \frac{-7}{2}\right)$;
2а: $(9, -2, -5)$; 2б: $\alpha = \frac{-1}{12}, \lambda = \frac{-25}{2}$; 2в: $\lambda = \frac{-25}{2}$ – компланарні, $\lambda > \frac{-25}{2}$ – права трійка, $\lambda < \frac{-25}{2}$ – ліва трійка;
2г: $V_{\text{paral}} = 9, V_{\text{tetr}} = \frac{3}{2}$; 3а: $x - y + 2z + 4 = 0$; 3б: $(-5, 1, -5)$;
3в: $\left(\frac{-17}{7}, \frac{29}{7}, \frac{47}{7}\right)$; 3г: $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 2 = 0; \end{cases}$ 4а: 4; 4б: в одному; 4в: $\frac{3}{5}$; 4г: $6x + 2z + 1 = 0, 2x - 8y - 6z + 13 = 0$.
21. 1а: $(4, -21, -11)$; 1б: $\frac{4}{3\sqrt{2}}$; 1в: $\arccos \frac{1}{2\sqrt{21}}$; 1г: $\left(1, \frac{4}{5}, \frac{-4}{5}\right)$;
2а: $(-5, 8, 6)$; 2б: $\alpha = \frac{-12}{7}, \lambda = \frac{-3}{8}$; 2в: $\lambda = \frac{-3}{8}$ – компланарні, $\lambda < \frac{-3}{8}$ – права трійка, $\lambda > \frac{-3}{8}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 5, V_{\text{tetr}} = \frac{5}{6}$;
3а: $5x - 6y - 7z + 7 = 0$; 3б: $\left(\frac{5}{3}, \frac{-17}{3}, \frac{-20}{3}\right)$;
3в: $\left(\frac{5}{2}, 3, -2\right)$; 3г: $\begin{cases} 6x - y + 4z + 11 = 0, \\ 2x - 4y - 4z - 1 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{6}$; 4б: в різних;
4в: $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$; 4г: $4x + 7y - 5z - 13 = 0, 10x - 5y + z + 5 = 0$.
22. 1а: $(-11, 35, 11)$; 1б: $\frac{5}{\sqrt{3}}$; 1в: $\arccos \frac{1}{3}$; 1г: $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-2}{5}\right)$;
2а: $(13, 5, 7)$; 2б: $\alpha = -12, \lambda = \frac{57}{16}$; 2в: $\lambda = \frac{57}{16}$ – компланарні, $\lambda > \frac{57}{16}$ – права трійка, $\lambda < \frac{57}{16}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{paral}} = 7, V_{\text{tetr}} = \frac{7}{6}$;
3а: $x - y - 2z + 12 = 0$; 3б: $(-1, 4, 0)$; 3в: $(0, 2, -2)$;
3г: $\begin{cases} x - 4y + z + 17 = 0, \\ x + y + 3z + 4 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{\frac{17}{3}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{10}{3\sqrt{51}}$;
4г: $8x - 6y - 4z - 9 = 0, 6x + 4y + 6z + 5 = 0$.
23. 1а: $(-29, 42, 13)$; 1б: $\frac{8}{\sqrt{6}}$; 1в: $\arccos \frac{11}{5\sqrt{6}}$; 1г: $(-1, 1, 0)$;

- 2а: $(-9, -14, 2)$; 2б: $\alpha = 0, \lambda = 2$; 2в: $\lambda = 2$ – компланарні,
 $\lambda > 2$ – права трійка, $\lambda < 2$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{para}} = 6, V_{\text{tetr}} = 1$;
- 3а: $-9x + 2y + 4z - 1 = 0$; 3б: $\left(7, \frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$; 3в: $\left(\frac{19}{7}, \frac{20}{7}, \frac{-17}{7}\right)$;
- 3г: $\begin{cases} 3x + 7y - 9z + 5 = 0, \\ x - 3y - 2z + 1 = 0; \end{cases}$ 4а: $\frac{5}{\sqrt{17}}$; 4б: в одному; 4в: $\frac{9}{4\sqrt{17}}$;
- 4г: $13x + 4y - 19z - 14 = 0, x - 8y - z + 10 = 0$.
24. 1а: $(21, -51, 21)$; 1б: $\frac{2}{\sqrt{10}}$; 1в: $\arccos \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 1г: $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{4}{3}\right)$;
- 2а: $(-5, -1, -4)$; 2б: $\alpha = 0, \lambda = -1$; 2в: $\lambda = -1$ – компланарні,
 $\lambda > -1$ – права трійка, $\lambda < -1$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{para}} = 4, V_{\text{tetr}} = \frac{2}{3}$;
- 3а: $x - 5y + 3z + 9 = 0$; 3б: $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$; 3в: $(2, -4, 2)$;
- 3г: $\begin{cases} x - 9y + 5z + 3 = 0, \\ 2x + 3y + 5z - 2 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{14}$; 4б: в одному; 4в: $\frac{9}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}$;
- 4г: $10x + 8y + 2z - 7 = 0, 2x - 4y + 6z - 13 = 0$.
25. 1а: $(23, 18, 22)$; 1б: $\frac{7}{\sqrt{3}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{7}{9}$; 1г: $(3, 7, 0)$;
- 2а: $(7, 8, 5)$; 2б: $\alpha = \frac{-1}{2}, \lambda = 1$; 2в: $\lambda = 1$ – компланарні,
 $\lambda > 1$ – права трійка, $\lambda < 1$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{para}} = 15, V_{\text{tetr}} = \frac{5}{2}$;
- 3а: $x - y + 2z + 2 = 0$; 3б: $\left(\frac{-24}{5}, 2, \frac{27}{5}\right)$; 3в: $\left(\frac{5}{3}, \frac{-20}{3}, \frac{-2}{3}\right)$;
- 3г: $\begin{cases} 4x - 2y + 3z + 7 = 0, \\ 2x + y - 2z + 2 = 0; \end{cases}$ 4а: $\frac{4}{\sqrt{11}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{9}{2\sqrt{11}}$;
- 4г: $2x - 4y - 4z + 5 = 0, 16x + 10y - 2z + 13 = 0$.
26. 1а: $(62, -34, 72)$; 1б: $\frac{5}{\sqrt{2}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{3}{2\sqrt{3}}$; 1г: $(-2, -1, 2)$;
- 2а: $(11, 5, 1)$; 2б: $\alpha = \frac{-5}{2}, \lambda = \frac{17}{4}$; 2в: $\lambda = \frac{17}{4}$ – компланарні,
 $\lambda < \frac{17}{4}$ – права трійка, $\lambda > \frac{17}{4}$ – ліва трійка; 2г: $V_{\text{para}} = 3, V_{\text{tetr}} = \frac{1}{2}$;
- 3а: $7x + 3y - 4z - 53 = 0$; 3б: $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$; 3в: $\left(\frac{-10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$;
- 3г: $\begin{cases} 6x - y - 2z - 4 = 0, \\ x + 4y + z - 3 = 0; \end{cases}$ 4а: $\frac{8}{\sqrt{3}}$; 4б: в одному; 4в: $\frac{5}{9\sqrt{3}}$;
- 4г: $4x - 2y + 2z + 1 = 0, 2x + 8y + 4z - 3 = 0$.
27. 1а: $(39, -17, 11)$; 1б: $\frac{2}{\sqrt{6}}$; 1в: $\arccos \frac{2}{3\sqrt{2}}$; 1г: $\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{-3}{4}\right)$;
- 2а: $(13, -11, 5)$; 2б: $\alpha = \frac{8}{7}, \lambda = \frac{29}{2}$; 2в: $\lambda = \frac{29}{2}$ – компланарні,

- $\lambda > \frac{29}{2}$ – права трійка, $\lambda < \frac{29}{2}$ – ліва трійка; 2Г: $V_{\text{paral}} = 9, V_{\text{tetr}} = \frac{3}{2}$; 3а: $2x + y - z + 1 = 0$; 3б: $(5, 0, 7)$; 3в: $\left(\frac{7}{6}, \frac{25}{6}, \frac{-4}{3}\right)$;
- 3Г: $\begin{cases} x + y - 2z + 9 = 0, \\ 5x - y + 2z + 1 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{\frac{11}{2}}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{1}{4\sqrt{22}}$;
- 4Г: $16x - 16y + 4z - 1 = 0, 2x - 2y - 16z - 5 = 0$.
28. 1а: $(83, 5, -24)$; 1б: $\frac{-7}{\sqrt{17}}$; 1в: $\arccos \frac{1}{\sqrt{30}}$; 1Г: $\left(\frac{-7}{2}, \frac{-23}{2}, 9\right)$;
- 2а: $(8, 3, 7)$; 2б: $\alpha = -1, \lambda = -1$; 2в: $\lambda = -1$ – компланарні, $\lambda > -1$ – права трійка, $\lambda < -1$ – ліва трійка; 2Г: $V_{\text{paral}} = 21, V_{\text{tetr}} = \frac{7}{2}$; 3а: $x - y - z + 4 = 0$; 3б: $\left(\frac{1}{2}, -4, \frac{7}{2}\right)$; 3в: $(2, 3, -5)$;
- 3Г: $\begin{cases} y - 2z + 11 = 0, \\ x + 4y + 2z - 4 = 0; \end{cases}$ 4а: $2\sqrt{11}$; 4б: в різних; 4в: $\frac{8}{5\sqrt{11}}$;
- 4Г: $x - 4y - z + 7 = 0, 4x - y + 8z - 2 = 0$.
29. 1а: $(4, -8, 7)$; 1б: $\frac{1}{3}$; 1в: $\arccos \frac{5}{2\sqrt{7}}$; 1Г: $(-4, -3, 0)$;
- 2а: $(-6, 10, 7)$; 2б: $\alpha = -3, 25, \lambda = -23$; 2в: $\lambda = -23$ – компланарні, $\lambda > -23$ – права трійка, $\lambda < -23$ – ліва трійка;
- 2Г: $V_{\text{paral}} = 18, V_{\text{tetr}} = 3$; 3а: $x - y - z + 5 = 0$; 3б: $\left(\frac{11}{2}, \frac{-10}{2}, \frac{-5}{2}\right)$;
- 3в: $(2, 2, 2)$; 3Г: $\begin{cases} x + 2y + 5z + 17 = 0, \\ x - 3y + z + 2 = 0; \end{cases}$ 4а: 1; 4б: в одному;
- 4в: $\frac{1}{2}$; 4Г: $7x + 10y - 13z - 3 = 0, x - 2y - z + 9 = 0$.
30. 1а: $(7, 4, 11)$; 1б: $\frac{-14}{\sqrt{11}}$; 1в: $\pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{10}}$; 1Г: $(2, -5, 4)$;
- 2а: $(-17, 4, -15)$; 2б: $\alpha = 2, \lambda = \frac{20}{7}$; 2в: $\lambda = \frac{20}{7}$ – компланарні, $\lambda < \frac{20}{7}$ – права трійка, $\lambda > \frac{20}{7}$ – ліва трійка; 2Г: $V_{\text{paral}} = 15, V_{\text{tetr}} = \frac{5}{2}$; 3а: $x - y - z + 13 = 0$; 3б: $(2, -3, 4)$; 3в: $(4, -1, -2)$;
- 3Г: $\begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ 2x - 5y + 7z + 1 = 0; \end{cases}$ 4а: $\sqrt{\frac{19}{3}}$; 4б: в одному; 4в: $\frac{7}{3\sqrt{57}}$;
- 4Г: $3x + 2y - 3z - 4 = 0, 7x + 6y + 11z - 6 = 0$.

Література

- 1 Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. — М.: Наука., 1968. 912 с.
- 2 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука., 1987. 320 с.
- 3 Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука., 1987. 496 с.
- 4 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Наука., 1975. 272 с.
- 5 Зайцева Л.Л., Нетреба А.В. Аналітична геометрія в прикладах і задачах. — К.: Видавнична лабораторія радіофізичного факультету, 2008. 224 с.
- 6 Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука., 1971. 232 с.
- 7 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука., 1972. 240 с.
- 8 Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука., 1976. 384 с.
- 9 Постников М.М. Аналитическая геометрия. — М.: Наука., 1979. 336 с.
- 10 Придатченко Ю.В., Львов В.А. Алгебра для фізиків: вектори і координати: Навч. посібник. — Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"., 2002. 87 с.
- 11 Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Наука., 1970. 336 с.