

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**



**Індивідуальні завдання
для самостійних робіт
з математичного аналізу**

Частина 3

Київ – 2010

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

Н. В. Майко, В. А. Рябічев, Д. О. Іваненко

**Індивідуальні завдання
для самостійних робіт
з математичного аналізу**

Частина 3

для студентів фізичного і радіофізичного
факультетів

Київ – 2010

Рецензенти:

канд. фіз.-мат. наук, доцент С. А. Кривошея,
канд. фіз.-мат. наук, доцент О. М. Радченко

Затверджено до друку Вченою радою радіофізичного факультету
(протокол № 10 від 19 квітня 2010 року)

Майко Н. В., Рябічев В. Л., Іваненко Д. О.

Індивідуальні завдання для самостійних робіт з математичного аналізу. Навчально-методичний посібник / Майко Н. В., Рябічев В. Л., Іваненко Д. О. — К.: Видавничка лабораторія радіофізичного ф-ту КНУ імені Тараса Шевченка, 2010. — 57 с.

Призначено допомогти студентам у їхній самостійній роботі при вивченні нормативного курсу "Математичний аналіз". Посібник складається з трьох розділів (модулів), основними темами яких є: "Елементи математичної теорії поля", "Числові ряди", "Функціональні послідовності і ряди", "Інтеграли, залежні від параметра", "Ряди Фур'є", "Інтеграл Фур'є". Завдання кожної з тем подано у вигляді 24 варіантів.

Для студентів радіофізичного і фізичного факультетів та викладачів, які керують самостійною роботою студентів.

УДК 517

© Майко Н. В., Рябічев В. Л., Іваненко Д. О., 2010
© Видавничка лабораторія радіофізичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2010

7.1. Елементи математичної теорії поля і векторного аналізу

Завдання 1. Довести соленоїдність векторного поля \vec{F} та знайти його векторний потенціал \vec{W} ($\vec{F} = \text{rot } \vec{W}$).

1. $\vec{F} = ye^{x^2}\vec{i} + 2yz\vec{j} - (2xyze^{x^2} + z^2)\vec{k}$.
2. $\vec{F} = 6y^2\vec{i} + 6z\vec{j} + 6x^3\vec{k}$.
3. $\vec{F} = (1 + 2xy)\vec{i} - y^2z\vec{j} + (z^2y - 2zy + 1)\vec{k}$.
4. $\vec{F} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$.
5. $\vec{F} = 2y^3\vec{i} - z^2\vec{j} + 2x\vec{k}$.
6. $\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.
7. $\vec{F} = x(y - z)\vec{i} + y(x + z)\vec{j} - z(x + y)\vec{k}$.
8. $\vec{F} = -y^3\vec{i} + 5z\vec{j} + 11x^2\vec{k}$.
9. $\vec{F} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$.
10. $\vec{F} = (z - 3xy)\vec{i} + (2y^2 - z)\vec{j} - zy\vec{k}$.
11. $\vec{F} = (z^2 - y^2)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$.
12. $\vec{F} = (y + x^2y)\vec{i} - 3y^2x\vec{j} + 4xyz\vec{k}$.
13. $\vec{F} = (z - y)\vec{i} - (x^2 - z^2)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$.
14. $\vec{F} = (2y - 3z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (4x - 5y)\vec{k}$.
15. $\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y^2 - x^2)\vec{k}$.
16. $\vec{F} = 5x^2yz\vec{i} - 2xy^2z\vec{j} - 3xyz^2\vec{k}$.
17. $\vec{F} = y \sin xy\vec{i} + x \sin xy\vec{j} - z(x^2 + y^2) \cos xy\vec{k}$.
18. $\vec{F} = (2x - 3y)\vec{i} + (4z + 3y)\vec{j} + (y - 5z)\vec{k}$.
19. $\vec{F} = (2x - 2)e^x\vec{i} - yxe^x\vec{j} - zxe^x\vec{k}$.

20. $\vec{F} = yz^2\vec{i} - x^2z\vec{j} - xy^2\vec{k}$.
 21. $\vec{F} = (x+y)^2\vec{i} - (4xy+2y^2)\vec{j} + 2z(x+y)\vec{k}$.
 22. $\vec{F} = 2xe^{-y}\vec{i} + 3e^{-y}\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$.
 23. $\vec{F} = (3x-y+z)\vec{i} + (-x+y+z)\vec{j} + (x+y-4z)\vec{k}$.
 24. $\vec{F} = xze^z\vec{i} + yze^z\vec{j} + 2(1-z)e^z\vec{k}$.

Завдання 2. Довести потенціальність векторного поля \vec{F} та знайти його потенціал U ($\vec{F} = \text{grad}U$).

1. $\vec{F} = (2xy + y^2 + yz^2)\vec{i} + (x^2 + 2xy + xz^2)\vec{j} + 2xyz\vec{k}$.
 2. $\vec{F} = x(y^2 + z^2)\vec{i} + y(x^2 + z^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$.
 3. $\vec{F} = yzx^{yz-1}\vec{i} + zx^{yz}\ln x\vec{j} + yx^{yz}\ln x\vec{k}$.
 4. $\vec{F} = (2xy + z^2 + yz)\vec{i} + (x^2 + 2yz + xz)\vec{j} + (y^2 + 2xz + xy)\vec{k}$.
 5. $\vec{F} = e^{x+z}\cos yz\vec{i} - e^{x+z}z\sin yz\vec{j} + e^{x+z}(\cos yz - y\sin yz)\vec{k}$.
 6. $\vec{F} = e^{xyz}\left(\frac{2x}{1+x^2} + yz\ln(1+x^2)\right)\vec{i} + e^{xyz}\ln(1+x^2)xz\vec{j} + e^{xyz}\ln(1+x^2)xy\vec{k}$.
 7. $\vec{F} = y\sqrt{1+z^2}\vec{i} + x\sqrt{1+z^2}\vec{j} + \frac{xyz}{\sqrt{1+z^2}}\vec{k}$.
 8. $\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\vec{i} - \frac{xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}\vec{j} - \frac{xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}\vec{k}$.
 9. $\vec{F} = (\sin yz - yz\sin xz)\vec{i} + (xz\cos yz + \cos xz)\vec{j} + (xy\cos yz - yx\sin xz)\vec{k}$.
 10. $\vec{F} = (xy)^z\frac{z}{x}\vec{i} + (xy)^z\frac{z}{y}\vec{j} + (xy)^z\ln(xy)\vec{k}$ ($x > 0, y > 0$).

11. $\vec{F} = \left(e^{z^2} - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\vec{i} + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\vec{j} + 2zxe^{z^2}\vec{k}$.
 12. $\vec{F} = \left(2xyz + \frac{1}{z}\right)\vec{i} + \left(x^2z - \frac{1}{z^2}\right)\vec{j} + \left(x^2y - \frac{x}{z^2} + \frac{2y}{z^3}\right)\vec{k}$.
 13. $\vec{F} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\vec{k}$.
 14. $\vec{F} = (\cos z + (y+z)\sin x + \cos y)\vec{i} + (\cos z - \cos x - (x+z))\vec{j} + (\cos y - \cos x - (x+y)\sin z)\vec{k}$.
 15. $\vec{F} = e^{x^2-y^2}(1+2xz+2x^2)\vec{i} - 2y(z+x)e^{x^2-y^2}\vec{j} + e^{x^2-y^2}\vec{k}$.
 16. $\vec{F} = 2xe^{-z}\vec{i} - 2ye^{-z}\vec{j} + e^{-z}(y^2 - x^2 - z + 1)\vec{k}$.
 17. $\vec{F} = (\cos y + z\sin x)\vec{i} + (\sin z - x\sin y)\vec{j} + (y\cos z - \cos x)\vec{k}$.
 18. $\vec{F} = (e^z + e^{-x}(1-x-y^2+z))\vec{i} + (e^z + e^{-x})\vec{j} + (e^z(x+y^2-z-1) - e^{-x})\vec{k}$.
 19. $\vec{F} = yz(\sin x + x\cos x + \cos y - \sin z)\vec{i} + xz(\sin x + \cos y - y\sin y - \sin z)\vec{j} + xy(\sin x + \cos y - \sin z - z\cos z)\vec{k}$.
 20. $\vec{F} = \left(-\frac{\sin x}{y} - \frac{\sin z}{x^2}\right)\vec{i} - \left(\frac{\cos x}{y^2} + \frac{2y}{z}\right)\vec{j} + \left(\frac{y^2}{z} + \frac{\cos z}{x}\right)\vec{k}$.
 21. $\vec{F} = (e^x(1+x+y) + e^z)\vec{i} + (e^y(1+y+z) + e^x)\vec{j} + (e^z(1+z+x) + e^y)\vec{k}$.
 22. $\vec{F} = (\cos z - (z+y)\sin x)\vec{i} + (\cos x - z\sin y)\vec{j} + (\cos x + \cos y - x\sin z)\vec{k}$.
 23. $\vec{F} = \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2(y+z)}{x^3}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2(x+z)}{y^3}\right)\vec{j} +$

$$24. \vec{F} = \left(yz + \sqrt{y^2 + 1} + \frac{xz}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \vec{i} + \left(xz + \sqrt{z^2 + 1} + \frac{xy}{\sqrt{y^2 + 1}} \right) \vec{j} + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2(x+y)}{z^3} \right) \vec{k} + \left(xy + \sqrt{x^2 + 1} + \frac{yz}{\sqrt{z^2 + 1}} \right) \vec{k}.$$

7.2. Числові ряди

Завдання 3. Записати частинну суму S_n ряду та знайти його суму S за означенням.

- | | |
|---|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$. | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-5)(9n+4)}$. |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(5n+4)}$. | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-2)(7n+5)}$. |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-1)(7n+6)}$. | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)(3n+7)}$. |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)(3n+8)}$. | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-3)(7n+4)}$. |
| 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(11n-5)(11n+6)}$. | 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$. |
| 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-4)(7n+3)}$. | 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$. |
| 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4)(9n+5)}$. | 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-3)(9n+6)}$. |
| 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+2)(5n+7)}$. | 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+4)(5n+9)}$. |

- | | |
|--|---|
| 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n+2)(7n+9)}$. | 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+7)(3n+10)}$. |
| 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+7)(4n+11)}$. | 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-5)(7n+2)}$. |
| 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)(5n+3)}$. | 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-1)(9n+8)}$. |
| 23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(11n-6)(11n+5)}$. | 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n+3)(7n+10)}$. |

Завдання 4. Користуючись кореневою ознакою Коші, дослідити на збіжність знакосталий ряд.

- | | |
|--|---|
| 1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (2,71)^n \left(\frac{5n-1}{5n+4} \right)^{n^2-3n+\ln n}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^{-2n} \frac{2n+1}{4n+3}$. |
| 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (1,3)^{1-2n^2} \left(\frac{7n^2+5n-1}{7n^2-2n+3} \right)^{n^2+\sin n}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{3n} \frac{3n+1}{6n+5}$. |
| 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} 9^{n+\ln n + \frac{1}{n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2+4n}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg^{-n} \frac{3n^2}{3n^2+1}$. |
| 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} 9^n \left(\frac{6n^2-1}{6n^2+5} \right)^{2n^3+\sqrt[3]{n}}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{\pi n^2}{6n^2+5n+1}$. |
| 5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n+\cos n} \left(\frac{n^3+5}{n^3+4} \right)^{2n^4-1}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{7n} \frac{\pi(n+1)}{3n+4}$. |
| 6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \left(\frac{n^2-\ln n}{n^2+\ln n} \right)^{5n^2}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^{n^2} \frac{\sqrt{2n}}{2n+5}$. |

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n+\ln n} \left(\frac{n^4-2}{n^4+1} \right)^{(n^2+1)(n^3-5n)} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{-n} \frac{n}{\sqrt{2n+3}} .$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{7^{n+\ln n}} \left(\frac{3n^2-1}{3n^2+5} \right)^{(n^2+2)\cos n} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^{9n} \frac{2n}{n^2+5} .$$

$$9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} 3^{n+\sqrt[3]{n} \ln n} \left(\frac{4n-3}{4n+1} \right)^{n^2} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{2n} \frac{\pi(n-1)}{4n+3} .$$

$$10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} 2^{n-\sqrt{n} \ln n} \left(\frac{7n-5}{7n+2} \right)^{n^2} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{-3n} \frac{\pi n}{2n+1} .$$

$$11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n^{1000}} \left(\frac{9n-2}{9n+7} \right)^{n^3+\ln^2 n} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{2n} \frac{\sqrt{3n}}{2n+3} .$$

$$12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-3n+\ln^5 n}{2}} \left(\frac{3n-1}{3n+4} \right)^{\sqrt{n}-n^2} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{3n-2}{3n+1} .$$

$$13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{\operatorname{arctg} n-n} \left(\frac{2n^3+3n}{2n^3-1} \right)^{\frac{n^3}{2}-n^2+3n-5} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{5n} \frac{\pi n}{6n+1} .$$

$$14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 100^{\sin n-n} \left(\frac{4n^2-3}{4n^2+5} \right)^{\sqrt{n}-7n^4} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{-n} \frac{\pi n^2}{6n^2+n+1} .$$

$$15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\sqrt{n}}}{\ln^n(n+1)} \left(\frac{5n^2}{5n^2+1} \right)^{3n^3-7n+1} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^{3n} \frac{n}{\sqrt{3n+2}} .$$

$$16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{-3n}{5}} \left(\frac{2n^5+3}{2n^5-1} \right)^{\frac{n^2(n^2-1)(n^2+\ln n)}{5}} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^{3n} \frac{\sqrt{3n}}{2n+1} .$$

$$17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n n}{\sqrt{n}} \left(\frac{3n-2}{3n+7} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos^{3n} \frac{\pi n^2}{3n^2+2n+1} .$$

$$18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{6} \right)^{n+\sqrt{n}} \left(\frac{9n^2+\ln n}{9n^2+10\ln n} \right)^{4-n^2} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{-n} \frac{2n+1}{2n+9} .$$

$$19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n^2} \left(\frac{5n-2\sin n}{5n+4\cos n} \right)^{3n+7-\frac{1}{2n}} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{1-2n}{2n+3} .$$

$$20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n} \left(\frac{2\sqrt{n}+7}{2\sqrt{n}+3} \right)^{n^{3/2}-\sin n} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\sqrt{3n}}{2-n} .$$

$$21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-3(n+1)} \left(\frac{5n^3-2\sqrt[3]{n}}{5n^3+\sqrt[3]{n}} \right)^{\frac{1}{n}-5n^4} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^{3n} \frac{2n}{n^2+1} .$$

$$22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{6n^2-\sqrt[3]{2}}{6n^2-5\sqrt[3]{2}} \right)^{(7-n^2)(n+3)} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \frac{5n}{n^2+n+1} .$$

$$23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n} \left(\frac{2^n-n}{2^n+3n} \right)^{n10^n} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^{2n} \frac{1-n}{2n+3} .$$

$$24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^{\sqrt[3]{n} \ln n-2n} \left(\frac{4n+9}{4n-5} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{-n} \frac{2\pi n}{6n+5} .$$

Завдання 5. Користуючись ознаками Раабе або Гаусса, дослідити на збіжність знакосталий ряд.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!}{((2n)!(2n-1)!)^2 16^n} .$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \dots \cdot (7n-6)}{7^n n!} \right)^3 .$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (5n-3)}{(n+1)! 5^n} \right)^2 .$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^3 \cdot 4^3 \cdot 7^3 \cdot \dots \cdot (3n-2)^3}{(n+1)! 3^{3n}} .$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 .$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+4) n!^2 9^n}{(3n+1)!} .$$

$$\begin{array}{ll}
7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!(2n+1)!(2n+2)!2^{4n}}{(4n-2)!} & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^3 27^n}{(3n+2)!} \\
9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-2)!}{4^{2n} (2n)!!(2n-1)!^3} & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-1)}{5^n (n+2)!} \right)^3 \\
11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!4^n}{27^n (n+2)!(2n+1)!} & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!^3 27^n}{(3n+1)!} \\
13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{2^n (2n+1)!!} \right)^2 & 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)!}{(2n)!!^2 (2n+3)!!^2 2^{4n}} \\
15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)! 27^n}{(3n-1)! 2^{8n} (n+2)!} & 16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4n)^2 (n+3)^2}{(2n-1)!^4} \\
17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!}{3^{3n} (n+3)!^3} & 18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3))^3 3^{3n}}{(3n-2)! 4^{3n}} \\
19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6n-1)!}{2^n 6^{3n} (3n-2)!(2n-1)!^2} & 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!^2 16^n}{5^2 \cdot 9^2 \cdot \dots \cdot (4n+1)^2} \\
21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n} \cdot 3^3 \cdot 8^3 \cdot \dots \cdot (5n-2)^3}{5^{3n} (2n+1)!^3} & 22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \right)^3 \\
23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n (3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n)^4}{81^n (4n)!} & 24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(15 \cdot 30 \cdot 45 \cdot \dots \cdot 15n)^3}{(3n)! 5^{3n}}
\end{array}$$

Завдання 6. Дослідити ряд на абсолютну і умовну збіжність.

$$\begin{array}{lll}
1. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+24}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(24n)}{\sqrt[3]{n^2+1}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^3 n}{\sqrt{n}} \\
2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{\sqrt[3]{n^4+23}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(23n)}{\sqrt[4]{n^3+2}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^5 n}{\sqrt{n}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n)}{\sqrt[4]{n^5+22}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(22n)}{\sqrt[5]{n^4+3}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt[3]{n}} \\
4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n)}{\sqrt[5]{n^6+21}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(21n)}{\sqrt[6]{n^5+4}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^4 n}{\sqrt[3]{n}} \\
5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(5n)}{\sqrt[6]{n^7+20}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(20n)}{\sqrt[7]{n^6+5}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^5 n}{\sqrt[3]{n}} \\
6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(6n)}{\sqrt[7]{n^8+19}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(19n)}{\sqrt[8]{n^7+6}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^8 n}{\sqrt[3]{n}} \\
7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(7n)}{\sqrt{n^5+18}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(18n)}{\sqrt[5]{n^2+7}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^3 n}{\sqrt[4]{n}} \\
8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(8n)}{\sqrt{n^7+17}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(17n)}{\sqrt[7]{n^2+8}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^5 n}{\sqrt[4]{n}} \\
9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(9n)}{\sqrt{n^9+16}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(16n)}{\sqrt[9]{n^2+9}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^7 n}{\sqrt[4]{n}} \\
10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(10n)}{\sqrt[3]{n^5+15}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(15n)}{\sqrt[5]{n^3+10}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt[5]{n}} \\
11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(11n)}{\sqrt[3]{n^7+14}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(14n)}{\sqrt[7]{n^3+11}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^3 n}{\sqrt[5]{n}} \\
12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(12n)}{\sqrt[3]{n^8+13}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(13n)}{\sqrt[8]{n^3+12}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^4 n}{\sqrt[5]{n}} \\
13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(13n)}{\sqrt[3]{n^{10}+12}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(12n)}{\sqrt[10]{n^3+13}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^6 n}{\sqrt[5]{n}} \\
14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(14n)}{\sqrt[4]{n^7+11}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(11n)}{\sqrt[7]{n^4+14}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^8 n}{\sqrt[5]{n}} \\
15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(15n)}{\sqrt[4]{n^9+10}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(10n)}{\sqrt[9]{n^4+15}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^5 n}{\sqrt[6]{n}}
\end{array}$$

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(16n)}{\sqrt[4]{n^{11}} + 9}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(9n)}{\sqrt[1]{n^4} + 16}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^7 n}{\sqrt[6]{n}}$.
17. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(17n)}{\sqrt[5]{n^7} + 8}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(8n)}{\sqrt[7]{n^5} + 17}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt[7]{n}}$.
18. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(18n)}{\sqrt[5]{n^8} + 7}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(7n)}{\sqrt[8]{n^5} + 18}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^3 n}{\sqrt[7]{n}}$.
19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(19n)}{\sqrt[5]{n^9} + 6}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(6n)}{\sqrt[9]{n^5} + 19}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^4 n}{\sqrt[7]{n}}$.
20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(20n)}{\sqrt[5]{n^{11}} + 5}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(5n)}{\sqrt[11]{n^5} + 20}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^5 n}{\sqrt[7]{n}}$.
21. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(21n)}{\sqrt[9]{n^9} + 4}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n)}{\sqrt[9]{n^7} + 21}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^6 n}{\sqrt[7]{n}}$.
22. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(22n)}{\sqrt[7]{n^{10}} + 3}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{\sqrt[10]{n^7} + 22}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^8 n}{\sqrt[7]{n}}$.
23. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(23n)}{\sqrt[7]{n^{11}} + 2}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{\sqrt[11]{n^7} + 23}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^3 n}{\sqrt[8]{n}}$.
24. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(24n)}{\sqrt[7]{n^{12}} + 1}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt[12]{n^7} + 24}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^5 n}{\sqrt[8]{n}}$.

7.3. Функціональні послідовності і ряди

Завдання 7. Довести рівномірну збіжність послідовності $\{f_n(x)\}$ на множині X .

1. $f_n(x) = e^{-n\sqrt{x}}$, $X = [1; +\infty[$.

2. $f_n(x) = \frac{\sin(nx^2)}{\ln(n+1)}$, $X = \mathbf{R}$.

3. $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n\sqrt{n}}$, $X = [-l; l]$ ($l > 0$).

4. $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{x+n^2}} \operatorname{arctg}(nx^2)$, $X = [0; +\infty[$.

5. $f_n(x) = \ln \left(1 + \frac{\cos^2(nx)}{\sqrt{n+\sqrt{x}}} \right)$, $X = [0; +\infty[$.

6. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$, $X = \mathbf{R}$.

7. $f_n(x) = \frac{nx^2}{\sqrt{x+5n+2}}$, $X = [0; a]$ ($a > 0$).

8. $f_n(x) = x^2 \cos \frac{1}{x\sqrt{n}}$, $X =]0; +\infty[$.

9. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^{5/2}x^2}$, $X = \mathbf{R}$.

10. $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^4} \sin \frac{x^2}{\sqrt{n}}$, $X = \mathbf{R}$.

11. $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}$, $X = [-a; a]$ ($0 < a < 1$).

12. $f_n(x) = \sin(ne^{-nx})$, $X = [\delta; +\infty[$ ($\delta > 0$).

13. $f_n(x) = \frac{\ln nx}{nx^2}$, $X = [1; +\infty[$.

14. $f_n(x) = \frac{3n\sqrt{nx}}{1+2n^2x}$, $X = [\delta; +\infty[$ ($\delta > 0$).

15. $f_n(x) = x^2 e^{-nx} \ln n$, $X = [0; +\infty[$.

16. $f_n(x) = x^{3/2} \left(1 - \cos \frac{1}{n\sqrt[4]{x}} \right)$, $X = [\delta; +\infty[$ ($\delta > 0$).

17. $f_n(x) = \frac{x + xn^3 + x^3n^6}{1+x^2n^6}$, $X = [a; +\infty[$ ($a > 0$).

$$18. f_n(x) = n^{3/4} x e^{-\sqrt{nx}}, \quad X = [0; +\infty[.$$

$$19. f_n(x) = n \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right), \quad X = [\delta; +\infty[\quad (\delta > 0).$$

$$20. f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^n}, \quad X =]0; 1[.$$

$$21. f_n(x) = \frac{n}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right), \quad X =]0; 10[.$$

$$22. f_n(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{(n-1)x}{n} \right), \quad X =]0; \pi/3[.$$

$$23. f_n(x) = \sqrt[4]{n} x e^{-nx^2}, \quad X = [0; +\infty[.$$

$$24. f_n(x) = n^{1/3} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right), \quad X =]0; +\infty[.$$

Завдання 8. Дослідити послідовність $\{f_n(x)\}$ на рівномірну збіжність на множинах X_1 і X_2 .

$$1. f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad X_1 = [0; 1], \quad X_2 = [0; \infty[.$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{x}{n}}, \quad X_1 = [1; +\infty[, \quad X_2 =]0; 1[.$$

$$3. f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}, \quad X_1 = [0; +\infty[, \quad X_2 = [\delta; +\infty[\quad (\delta > 0).$$

$$4. f_n(x) = \sin \left(e^{-nx} + \frac{1}{n} \right), \quad X_1 =]0; +\infty[, \quad X_2 = [\delta; +\infty[\quad (\delta > 0).$$

$$5. f_n(x) = \frac{\sqrt{n} + \operatorname{arctg}(nx)}{x\sqrt{n}}, \quad X_1 =]0; 1[, \quad X_2 =]1; +\infty[.$$

$$6. f_n(x) = \frac{x^6 + x^5 n^2 + x^2 n^4}{x^4 + n^4}, \quad X_1 =]0; +\infty[, \quad X_2 = [0; a] \quad (a > 0).$$

$$7. f_n(x) = \frac{1 + x^2 n^6 + \sqrt{x^3 n^6}}{x + x^3 n^6}, \quad X_1 =]0; +\infty[, \quad X_2 =]\delta; +\infty[\quad (\delta > 0).$$

$$8. f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - x^n}{1 + x^n}, \quad X_1 =]0; 1/2[, \quad X_2 =]1/2; 1[.$$

$$9. f_n(x) = \frac{1}{x^3} \cos \frac{x}{n}, \quad X_1 =]0; 1[, \quad X_2 =]1; +\infty[.$$

$$10. f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + 2n + x}, \quad X_1 = [0; 1], \quad X_2 = [1; +\infty[.$$

$$11. f_n(x) = \operatorname{ch} e^{-nx}, \quad X_1 =]0; 1[, \quad X_2 =]1; +\infty[.$$

$$12. f_n(x) = \sqrt{(nx)^3 + nx^2 + 1} - \sqrt{(nx)^3 + 1}, \quad X_1 =]0; 1[, \quad X_2 =]1; +\infty[.$$

$$13. f_n(x) = \ln \left(1 + \sin \frac{x\sqrt{n}}{x^2 + n} \right), \quad X_1 =]0; 1[, \quad X_2 =]1; +\infty[.$$

$$14. f_n(x) = \sin \left(\sqrt{1 + (nx)^2} - nx \right), \quad X_1 =]0; 1[, \quad X_2 =]1; +\infty[.$$

$$15. f_n(x) = 2 \ln(e^x + n) - \ln(e^{2x} + n^2), \quad X_1 = [0; +\infty[, \quad X_2 = [0; a] \quad (a > 0).$$

$$16. f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{nx - 1}{nx + 1}, \quad X_1 =]0; 1[, \quad X_2 =]1; +\infty[.$$

$$17. f_n(x) = \frac{n^2 x^2 + 3nx + 1}{n^2 x^2 + 2}, \quad X_1 =]0; 1[, \quad X_2 =]1; +\infty[.$$

$$18. f_n(x) = \ln \left(\frac{6e^{2x} + 3n^2 + ne^x}{n^2 + 2e^{2x}} \right), \quad X_1 = [0; +\infty[, \quad X_2 = [0; a] \quad (a > 0).$$

$$19. f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{nx}{n^2 x^2 + 1}, \quad X_1 =]0; +\infty[, \quad X_2 =]\delta; +\infty[\quad (\delta > 0).$$

$$20. f_n(x) = \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad X_1 = [\pi; +\infty[, \quad X_2 = [0; \pi].$$

$$21. f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2 x^4}, \quad X_1 = [0; 1], \quad X_2 = [0; +\infty[.$$

$$22. f_n(x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} e^{x/n} \right), \quad X_1 =]0; +\infty[, \quad X_2 =]0; a[\quad (a > 0).$$

23. $f_n(x) = nx^2 e^{-(n+1)x^2}$, $X_1 = [0; 1]$, $X_2 = [\delta; 1]$ ($0 < \delta < 1$).

24. $f_n(x) = \arctg\left(\frac{x}{n} - n^2\right)$, $X_1 =]0; 1[$, $X_2 =]1; +\infty[$.

Завдання 9. Знайти множину X_1 збіжності і множину X_2 абсолютної збіжності функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \ln^n(x^2 + 2)$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 4} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^n$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n(x/3)}{n(n+1)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}} e^{-n \sin x}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{5}\right)^n \ln^n\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3}\right)^n (e^{x/n} - 1)^n$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} \left(\frac{2-x}{1+2x}\right)^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n} + \frac{x}{2}\right)^n$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n+1}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-x^2)^n}{n+1}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln^n(x+2)}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n n^{-x}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi x}{2n}\right)^{n^3}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[5]{n}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n \ln(n+1)}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \frac{\sin nx}{n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + \sqrt{n} \ln^{10} n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{\sqrt{n}} \cos^{3n}\left(\pi x + \frac{\pi}{8}\right)$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^{n \cos 3x}}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\sqrt{3})^{-n}}{n} \operatorname{tg}^{3n}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^3 + n + 1}} e^{-\frac{n}{\sin^3 \pi x}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} x^{3n} \operatorname{arctg} \frac{n-1}{n+1}$.

Завдання 10. Використовуючи мажорантну ознаку Вейерштрасса, довести рівномірну збіжність функціонального ряду на множині X .

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^3 + x^4}}$, $X = [-3; -1]$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin \frac{1}{nx}}{4 + \ln^2 nx}$, $X = [3; +\infty[$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $X = [0; +\infty[$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^{5/4} x^2}$, $X = \mathbf{R}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^3 (2x)^{2n}}{x^2 + 3n + 4}$, $X = [-1/3; 1/3]$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n \sqrt[3]{n}}$, $X = \mathbf{R}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2 x}$, $X = [\delta; +\infty[$ ($\delta > 0$).

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4 + n^3 x^2}$, $X = \mathbf{R}$.

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^3 \frac{\sqrt{x}}{x+n}, \quad X = [0; +\infty[.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{1+n^{5/2}x}, \quad X = [0; +\infty[.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2 \sin x}{(n+1)(1+n^5 x^4)}, \quad X = \mathbf{R}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^4} \operatorname{arctg} \frac{2x}{n}, \quad X = \mathbf{R}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{nx} \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right), \quad X =]0; +\infty[.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-x} \ln^2 n, \quad X = [1+\alpha; +\infty[\quad (\alpha > 0).$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10} \ln(1+nx)}{x^n}, \quad X = [1+\alpha; +\infty[\quad (\alpha > 0).$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{arctg}(5n^2 x)}{\sqrt[3]{n^7 + n + x}}, \quad X = [0; +\infty[.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(10x)^n}{n \sqrt[3]{n + \sqrt{x}}}, \quad X = [0; 1/10].$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3x^2 + n^{5/2}}, \quad X = \mathbf{R}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^3}, \quad X = [0; +\infty[.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} nx^2 e^{-nx} \sin \frac{1}{n}, \quad X = [0; +\infty[.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{(1+n^2 x^5)^2}, \quad X = [0; +\infty[.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x\sqrt{n}) \ln \left(1 + \frac{3x^2}{n} \right)}{\sqrt{1+nx^4}}, \quad X = \mathbf{R}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{x}{n} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2\sqrt{n}} \right)}{nx + x^{10}}, \quad X =]0; +\infty[.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{4+n^4 x^3}, \quad X = [0; +\infty[.$$

7.4. Степеневий ряд. Ряд Тейлора

Завдання 11. Для даного степеневому ряду знайти радіус R збіжності та проміжки X і X_1 збіжності і абсолютної збіжності ($X_1 \subset X$).

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (x+1)^n.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!} (x-1)^n.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3^n}{\sqrt{n}} (x-e)^n.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!^2} (x+e)^n.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} (x+2)^n.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}} (3x-2)^n.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} (x-3)^n.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)!}{5^n (2n+3)!!} (x+3)^n.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{(2n+1)!!} (x+\pi)^n.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-1)^n}{n} (x-\pi)^n.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln n} (x-4)^{5n}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n(2^n + 3^n)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{n \ln^2 n} (x+5)^n .$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2+1} (x-6)^n .$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n^2+\ln n} (x-7)^n .$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^{n+1}+100^n} (x+8)^n .$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n-1} (x-9)^n .$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+(-1)^n \sqrt{n}} (x-10)^n .$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-5^n}{\sqrt{n}3^n} (x-5)^n .$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n(1+2^n)} (x+6)^n .$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n^2} (x+7)^n .$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2^n-1)}{\sqrt{n}(2^n+1)} (x-8)^n .$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{n}+(-1)^n}{n\sqrt{n}+1} (x+9)^n .$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{n+1} (x+10)^n .$$

Завдання 12. Розкласти функцію $f(x)$ у ряд Тейлора по степенях $x-x_0$ і вказати його радіус збіжності.

$$1. \text{ a) } f(x) = \frac{x-1}{2x+5}, \quad x_0=0, \quad x_0=-5, \quad x_0=-1;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{2x-1}{-6x^2+25x-19}, \quad x_0=3;$$

$$\text{в) } f(x) = \ln(-9+11x-2x^2), \quad x_0=4;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x+5}{\sqrt[3]{3x+10}}, \quad x_0=-6.$$

$$2. \text{ a) } f(x) = \frac{1-2x}{3x+4}, \quad x_0=0, \quad x_0=-2, \quad x_0=1;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{3x+2}{-6x^2-37x-50}, \quad x_0=-4;$$

$$\text{в) } f(x) = \ln(-22-15x-2x^2), \quad x_0=-5;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt[3]{28-5x}}, \quad x_0=4.$$

$$3. \text{ a) } f(x) = \frac{x+3}{2x-1}, \quad x_0=0, \quad x_0=-2, \quad x_0=3;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{4x-3}{-6x^2+7x+13}, \quad x_0=2;$$

$$\text{в) } f(x) = \ln(7+5x-2x^2), \quad x_0=3;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{7x+13}}, \quad x_0=-3.$$

$$4. \text{ a) } f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}, \quad x_0=0, \quad x_0=1, \quad x_0=4;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{5x-2}{-6x^2+5x+14}, \quad x_0=-1;$$

$$\text{в) } f(x) = \ln(26-17x-2x^2), \quad x_0=-6;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{26-9x}}, \quad x_0=2.$$

$$5. \text{ a) } f(x) = \frac{5-x}{2x+1}, \quad x_0=0, \quad x_0=-3, \quad x_0=1;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{2x+3}{-7x^2-13x+24}, \quad x_0=1;$$

$$\text{в) } f(x) = \ln(-63-25x-2x^2), \quad x_0=-4;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{7-5x}}, \quad x_0=-4.$$

$$6. \text{ a) } f(x) = \frac{1-2x}{3x+5}, \quad x_0=0, \quad x_0=-3, \quad x_0=-1;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{5x-2}{-7x^2-x+30}, \quad x_0=-2;$$

$$\text{в) } f(x) = \ln(-6+13x-2x^2), \quad x_0=1;$$

- г) $f(x) = \frac{5-x}{\sqrt[3]{34-7x}}$, $x_0 = 1$.
- 7.** а) $f(x) = \frac{2-5x}{3x-4}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$;
 б) $f(x) = \frac{2x-5}{-7x^2+22x+29}$, $x_0 = 4$;
 в) $f(x) = \ln(-20-17x-3x^2)$, $x_0 = -2$;
 г) $f(x) = \frac{x-6}{\sqrt[3]{19-4x}}$, $x_0 = -2$.
- 8.** а) $f(x) = \frac{x-2}{3x-5}$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 4$;
 б) $f(x) = \frac{3x+1}{-7x^2-8x+44}$, $x_0 = -3$;
 в) $f(x) = \ln(-10-13x-3x^2)$, $x_0 = -3$;
 г) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt[3]{8x+13}}$, $x_0 = -5$.
- 9.** а) $f(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -4$, $x_0 = 1$;
 б) $f(x) = \frac{5x-8}{-8x^2+31x-21}$, $x_0 = 1$;
 в) $f(x) = \ln(7+4x-3x^2)$, $x_0 = 2$;
 г) $f(x) = \frac{x-6}{\sqrt[3]{79-5x}}$, $x_0 = 3$.
- 10.** а) $f(x) = \frac{3-2x}{4x+7}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -5$, $x_0 = -1$;
 б) $f(x) = \frac{6x-17}{-8x^2+33x-25}$, $x_0 = 3$;
 в) $f(x) = \ln(-57-28x-3x^2)$, $x_0 = -6$;
 г) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt[3]{22-7x}}$, $x_0 = -6$.

- 11.** а) $f(x) = \frac{5x+4}{2x-3}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -3$, $x_0 = 4$;
 б) $f(x) = \frac{2x+3}{8x^2+9x-17}$, $x_0 = -2$;
 в) $f(x) = \ln(-16+19x-3x^2)$, $x_0 = 5$;
 г) $f(x) = \frac{x+5}{\sqrt[3]{70-3x}}$, $x_0 = 2$.
- 12.** а) $f(x) = \frac{3x+1}{4x-7}$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 3$;
 б) $f(x) = \frac{2x-1}{-8x^2-39x-28}$, $x_0 = -1$;
 в) $f(x) = \ln(12+5x-3x^2)$, $x_0 = -1$;
 г) $f(x) = \frac{x-7}{\sqrt[3]{55-9x}}$, $x_0 = -1$.
- 13.** а) $f(x) = \frac{x-5}{3x+7}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -4$, $x_0 = -1$;
 б) $f(x) = \frac{5x-21}{-6x^2+43x-70}$, $x_0 = 4$;
 в) $f(x) = \ln(-100+41x-4x^2)$, $x_0 = 6$;
 г) $f(x) = \frac{x-8}{\sqrt[4]{31-3x}}$, $x_0 = 5$.
- 14.** а) $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -2$, $x_0 = 1$;
 б) $f(x) = \frac{x-7}{-6x^2+29x-28}$, $x_0 = 2$;
 в) $f(x) = \ln(-63-33x-4x^2)$, $x_0 = -5$;
 г) $f(x) = \frac{-x-7}{\sqrt[4]{-24-5x}}$, $x_0 = -8$.
- 15.** а) $f(x) = \frac{4x+5}{3x-7}$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 6$;

- б) $f(x) = \frac{3x-1}{-8x^2-34x-15}$, $x_0 = -3$;
 в) $f(x) = \ln(-17+21x-4x^2)$, $x_0 = 4$;
 г) $f(x) = \frac{3-x}{\sqrt[4]{44-7x}}$, $x_0 = 4$.
- 16.** а) $f(x) = \frac{5x-2}{3x-1}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -4$, $x_0 = 2$;
 б) $f(x) = \frac{6x+31}{-8x^2+66x-115}$, $x_0 = 5$;
 в) $f(x) = \ln(9-5x-4x^2)$, $x_0 = -2$;
 г) $f(x) = \frac{x+5}{\sqrt[4]{-2-9x}}$, $x_0 = -2$.
- 17.** а) $f(x) = \frac{x-4}{5x+8}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -2$, $x_0 = -1$;
 б) $f(x) = \frac{5x-1}{-9x^2+37x-28}$, $x_0 = 3$;
 в) $f(x) = \ln(-77+39x-4x^2)$, $x_0 = 3$;
 г) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt[4]{85-4x}}$, $x_0 = 1$.
- 18.** а) $f(x) = \frac{7x-2}{4x+5}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -3$, $x_0 = 1$;
 б) $f(x) = \frac{x-1}{-9x^2-55x-74}$, $x_0 = -4$;
 в) $f(x) = \ln(-15-23x-4x^2)$, $x_0 = -1$;
 г) $f(x) = \frac{x+7}{\sqrt[4]{66-5x}}$, $x_0 = -3$.
- 19.** а) $f(x) = \frac{x+3}{5x-8}$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$;
 б) $f(x) = \frac{4x-10}{-10x^2+19x-6}$, $x_0 = 1$;

- в) $f(x) = \ln(-124+51x-5x^2)$, $x_0 = 6$;
 г) $f(x) = \frac{6-x}{\sqrt[4]{95-7x}}$, $x_0 = 2$.
- 20.** а) $f(x) = \frac{3x-2}{4x-5}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -1$, $x_0 = 3$;
 б) $f(x) = \frac{6x+11}{-10x^2-39x-35}$, $x_0 = -2$;
 в) $f(x) = \ln(-42-31x-5x^2)$, $x_0 = -4$;
 г) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt[4]{41-8x}}$, $x_0 = -5$.
- 21.** а) $f(x) = \frac{4x-3}{5x+7}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -4$, $x_0 = -1$;
 б) $f(x) = \frac{3x-10}{-10x^2+77x-144}$, $x_0 = 4$;
 в) $f(x) = \ln(11+6x-5x^2)$, $x_0 = 2$;
 г) $f(x) = \frac{4-x}{\sqrt[5]{3x-50}}$, $x_0 = 6$.
- 22.** а) $f(x) = \frac{3x-4}{6x+1}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -2$, $x_0 = 1$;
 б) $f(x) = \frac{10x+1}{-10x^2-17x-3}$, $x_0 = -1$;
 в) $f(x) = \ln(-52-36x-5x^2)$, $x_0 = -5$;
 г) $f(x) = \frac{x+7}{\sqrt[5]{12-5x}}$, $x_0 = -4$.
- 23.** а) $f(x) = \frac{3x+2}{5x-7}$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 4$;
 б) $f(x) = \frac{4x-1}{-9x^2+27x-8}$, $x_0 = 2$;
 в) $f(x) = \ln(18-9x-5x^2)$, $x_0 = 1$;
 г) $f(x) = \frac{-x-6}{\sqrt[5]{53-7x}}$, $x_0 = 3$.

24. а) $f(x) = \frac{2x+5}{6x-1}$, $x_0 = 0$, $x_0 = -2$, $x_0 = 3$;

б) $f(x) = \frac{2x+1}{-9x^2 - 45x - 44}$, $x_0 = -3$;

в) $f(x) = \ln(16 - 11x - 5x^2)$, $x_0 = -3$;

г) $f(x) = \frac{x-8}{\sqrt[5]{23-9x}}$, $x_0 = -1$.

Завдання 13. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$.

2. $\int_0^1 \cos(x^2) dx$.

3. $\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$.

4. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$.

5. $\int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$.

6. $\int_0^{0,5} \cos(9x^2) dx$.

7. $\int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx$.

8. $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$.

9. $\int_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx$.

10. $\int_0^{0,4} \sin(3x/2)^2 dx$.

11. $\int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx$.

12. $\int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx$.

13. $\int_0^{0,4} \cos(5x/2)^2 dx$.

14. $\int_0^{0,5} e^{-3x^2/25} dx$.

15. $\int_0^{0,5} x \ln(1+x^2) dx$.

16. $\int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx$.

17. $\int_1^2 e^{1/(2x)} dx$.

18. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

19. $\int_1^{10} \frac{\ln(1+10x)}{x} dx$.

20. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

21. $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x} dx$.

22. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

23. $\int_0^{1/4} \frac{\arcsin 2x}{x} dx$.

24. $\int_0^{1/2} \frac{\sin 4x}{x} dx$.

Самостійна робота № 8

8.1. Власні інтеграли, залежні від параметра

Завдання 14. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду, звівши його до задачі Коші для лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку.

1. $y(x) = 15e^{-x} + 4 \int_0^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{9}{2}e^{2x} + \frac{31}{2}e^{-2x} - 5e^{-x}$.

2. $y(x) = \sin 4x - \frac{11}{15}x - \int_{\pi}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = -\frac{11}{15}\sin x - \pi \cos x + \frac{16}{15}\sin 4x$.

3. $y(x) = \cos 3x - 5 - 4 \int_{\pi/2}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = 5 \cos 2x + \frac{6}{5}\sin 2x + \frac{9}{5}\cos 3x$.

4. $y(x) = xe^{2x} - 1 + \int_0^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = -\frac{5}{9}e^{-x} + \left(\frac{4}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^{2x}$.

5. $y(x) = x \sin x + 2 - 25 \int_{\pi}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = -\frac{601}{288} \cos 5x + \frac{5\pi}{24} \sin 5x + \frac{25}{288} \cos x - \frac{x}{24} \sin x$.

6. $y(x) = 15e^{1-x} + 3 - x + \int_1^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \left(\frac{11}{4} - \frac{x}{2}\right)e^{1-x} + \frac{3}{4}e^{x-1}$.

7. $y(x) = \operatorname{sh} x - 3x - 16 \int_0^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = -\frac{35}{68} \sin 4x + \frac{1}{17} \operatorname{sh} x$.

8. $y(x) = x \cos x - 9 \int_{\pi/2}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = -\frac{3\pi}{16} \cos 3x - \frac{9}{32} \sin 3x - \frac{1}{8}x \cos x - \frac{9}{32} \sin x$.

9. $y(x) = 3 - e^{x-2} + \int_2^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{7}{4}e^{x-2} + \frac{5}{4}e^{2-x} - \frac{1}{2}xe^{x-2}$.

10. $y(x) = \sin 2x - \cos 2x - \int_{2\pi}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{1}{3} \cos x - \frac{2}{3} \sin x - \frac{4}{3} \cos 2x + \frac{4}{3} \sin 2x$.

11. $y(x) = (x-1)e^x - \pi^2 \int_1^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{2e\pi^2}{(\pi^2+1)^2} \cos \pi x + \frac{e\pi(1-\pi^2)}{(\pi^2+1)^2} \sin \pi x + \left(\frac{x}{\pi^2+1} + \frac{\pi^2-1}{(\pi^2+1)^2}\right)e^x$.

12. $y(x) = 9 \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{4} \int_{3\pi/2}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{27}{5} \sqrt{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) - \frac{36}{5} \cos \frac{x}{3}$.

13. $y(x) = (2-x)e^x + \int_2^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{e^{4-x}}{8} + \frac{e^x}{8} (3 + 2x - 2x^2)$.

14. $y(x) = e^{-3x} + 2x + 1 + 9 \int_0^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{13}{12}e^{3x} + \frac{11}{12}e^{-3x} - \frac{3}{2}xe^{-3x}$.

15. $y(x) = x \cos x - \sin x - 4 \int_{\pi}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{-4\pi}{3} \cos 2x - \frac{4}{9} \sin 2x - \frac{x}{3} \cos x - \frac{5}{9} \sin x$.

16. $y(x) = e^x \sin x + \frac{1}{4} \int_{2\pi}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{1}{5}e^{\pi+\frac{x}{2}} - \frac{1}{13}e^{\frac{3\pi-x}{2}} - \frac{8}{65}e^x \cos x + \frac{64}{65} \sin x$.

17. $y(x) = \sin \pi x - \int_{-1}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{\pi}{\pi^2 - 1} \sin(x+1) + \frac{\pi^2}{\pi^2 - 1} \sin \pi x$.

18. $y(x) = 4xe^{x/2} - 2 \int_0^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = -\frac{128}{81} \cos \sqrt{2}x + \frac{224}{81\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x + \left(\frac{4}{9}x + \frac{128}{81}\right)e^{x/2}$.

19. $y(x) = x \cos x - \frac{1}{4} \int_{\pi}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{10}{9} \cos \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \sin \frac{x}{2} + \frac{4}{3} x \cos x - \frac{8}{9} \sin x$.

20. $y(x) = 1 - x^4 + 4 \int_1^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{1}{4} e^{2(1-x)} - \frac{19}{4} e^{2(x-1)} + 3x^2 + \frac{3}{2}$.

21. $y(x) = 2e^x - e^{2x} + \int_0^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{1}{3} e^{-x} + (2+x)e^x - \frac{4}{3} e^{2x}$.

22. $y(x) = xe^{3x} + 2 \int_0^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{12}{49} \operatorname{ch} \sqrt{2}x + \frac{11\sqrt{2}}{49} \operatorname{sh} \sqrt{2}x + \frac{e^{3x}}{49} (63x - 12)$.

23. $y(x) = xe^{2(x-1)} - 1 + 4 \int_1^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = -\frac{5}{16} e^{2-2x} + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{15}{16}\right) e^{2x-2}$.

24. $y(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \sin 2x - \frac{4}{9} \int_{\pi/4}^x (x-t)y(t) dt$.

Відповідь: $y = \frac{3\sqrt{3}-2}{32} \sin \frac{2x}{3} - \frac{3+2\sqrt{3}}{32} \cos \frac{2x}{3} + \frac{9}{16} \cos 2x + \frac{9}{8} \sin 2x$.

8.2. Невласні інтеграли, залежні від параметра

Завдання 15. Знайти всі значення параметра α , при яких інтеграл збігається.

1. а) $\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24 \cos x - 13x^4 - 30}{\sin^\alpha x} dx$; б) $\int_0^{+\infty} x^{4\alpha/3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^\alpha} dx$.

Відповіді: а) $\alpha < 7$; б) $-9/2 < \alpha < 3/4$.

2. а) $\int_0^1 e^{\alpha/x} (\cos x)^{1/x^3} dx$; б) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-101} \operatorname{arctg}^\alpha \frac{x}{1+x} dx$.

Відповіді: а) $\alpha \leq 1/2$; б) $50 < \alpha < 100$.

3. а) $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\alpha \cos x} - \sqrt{1+2 \cos x}}{\sqrt{\cos^5 x}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \left(x + \frac{1}{2x}\right)^{\alpha^2} \ln(1+x^{-3\alpha^2}) dx$.

Відповіді: а) $\alpha = 1$; б) $1/\sqrt{2} < |\alpha| < 1$.

4. а) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^2+x^2} - e^{\cos x}}{\sin^\alpha x} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^{-2\alpha})}{\sqrt{x^\alpha + x^{-\alpha}}} dx$ ($\alpha > 0$).

Відповіді: а) $\alpha < 3$; б) $\alpha > 2/5$.

5. а) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^\alpha \operatorname{tg} x} dx$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{(\alpha-1)x}}{(x-1)^{-\alpha} \ln x} dx$.

Відповіді: а) $\alpha < 4$; б) $0 < \alpha < 1$.

$$6. \text{ a) } \int_0^1 \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1+x}}{\operatorname{ch} x - \cos x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch} x}{x^2} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha = 1/2$; б) $1/2 < \alpha < 1$.

$$7. \text{ a) } \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(\alpha x) - \ln(1+x^2) - 1}{\sqrt[3]{8-x^3} - 2} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^\alpha)^{\alpha-2}} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha = \pm\sqrt{2}$; б) $\alpha > 1 + \sqrt{2}$.

$$8. \text{ a) } \int_0^1 \frac{\ln(e^{x^\alpha} + x) - x}{\operatorname{tg} x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{(x+\alpha)^2} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha < 0$; б) $\alpha \geq 0$.

$$9. \text{ a) } \int_0^{1/2} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{(4x \cos x - \pi \sin x)^\alpha} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3 + x^5}} dx \quad (\alpha > 0).$$

Відповіді: а) $\alpha < 1$; б) $\alpha > 1/2$.

$$10. \text{ a) } \int_0^1 \frac{\ln \sqrt{1+2x} - xe^{-x}}{1 - \cos^\alpha x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^\alpha}{1+x^3} \frac{dx}{x} \quad (\alpha > 0).$$

Відповіді: а) $\alpha \neq 0$; б) $0 < \alpha < 3$.

$$11. \text{ a) } \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^\alpha \ln(2+x) dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x^{\alpha^2})}{\sqrt{x^3}} dx.$$

Відповіді: а) $-2 < \alpha < 1$; б) $|\alpha| > 1/\sqrt{2}$.

$$12. \text{ a) } \int_1^2 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^\alpha} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^3+x^{3\alpha^2}} - 1}{x^3} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha < 2$; б) $\sqrt{6}/3 < \alpha < 2\sqrt{3}/3$.

$$13. \text{ a) } \int_0^1 \frac{\sin(\arcsin x + x^3) - x}{\operatorname{sh}^\alpha x} dx; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln^{2\alpha} x}{x^{2/3} \operatorname{arctg}^\alpha(1/x)} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha < 4$; б) $-1/2 < \alpha < -1/3$.

$$14. \text{ a) } \int_0^1 \frac{(1-x)^{-5/3}}{\operatorname{arctg}^\alpha(x-x^2)} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{e^{(3\alpha+1)x}}{(\sqrt[3]{x+1}-1)^\alpha \sin^\alpha \frac{x}{x+1}} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha < -2/3$; б) $\alpha < -1/3$.

$$15. \text{ a) } \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x^2+x^{2\alpha})}{x \ln^\alpha(1+x)} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x}{(x^2+5)(e^{2x}-1)^{3\alpha}} dx.$$

Відповіді: а) $0 \neq \alpha < 2$; б) $0 \leq \alpha < 1/2$.

$$16. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{\sqrt{(1-x)^3}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln^{2/3}(e^x-x)}{(x+\sqrt{x})^\alpha \arcsin \frac{x}{x+1}} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha > -1$; б) $5/3 < \alpha < 8/3$.

$$17. \text{ a) } \int_0^\pi \frac{\sin^{\alpha-1} x}{(1+2 \cos x)^\alpha} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1) - 2 \ln x}{(\sqrt[4]{x+1}-1)^\alpha \operatorname{arctg}^{1/3} x} dx.$$

Відповіді: а) $0 < \alpha < 1$; б) $-4 < \alpha < 2/3$.

$$18. \text{ a) } \int_0^\pi \frac{e^x - e^{-x}}{(e^{x^2} - \cos x)^\alpha} dx; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{(\sqrt{x^3-1})^\alpha}{x^7 \ln^{2\alpha} x} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha < 1$; б) $\alpha < 2/3$.

$$19. \text{ a) } \int_0^\pi \frac{\ln \sin x}{x \sin^\alpha x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln^{7/4}(1+x^2)}{(\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x})^\alpha} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha < 0$; б) $2 < \alpha < 9/4$.

$$20. \text{ a) } \int_0^1 \frac{\ln^\alpha(\operatorname{ch}(1/x))}{\ln^3(1+\sqrt{x})} dx; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha/2} x}{(e^{1/x^2}-1)^\alpha} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha < -1/2$; б) $-2 < \alpha < -1/2$.

$$21. \text{ a) } \int_0^{1/2} \frac{|\ln x|^\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{(xe^x)^\alpha} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha \in \mathbf{R}$; б) $0 < \alpha < 2$.

$$22. \text{ а) } \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{\ln(1/x)}} dx; \quad \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-1/x^2}}{(1 + x - \sqrt{1+3x})^\alpha} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha > -1$; б) $-1 < \alpha < 1/2$.

$$23. \text{ а) } \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{(\arctg x)^{\alpha/2}} dx; \quad \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2/2}}{\arctg^\alpha \frac{\sqrt{x}}{x+1}} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha < 2$; б) $\alpha < -2$.

$$24. \text{ а) } \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{(\sqrt{1-x^4})^\alpha} dx; \quad \text{ б) } \int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \frac{x^{\alpha-x}}{\ln^\alpha x} dx.$$

Відповіді: а) $\alpha < 6$; б) $\alpha < 3/2$.

Завдання 16. Дослідити інтеграл на збіжність і абсолютну збіжність при всіх значеннях параметра α .

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{x^3 + 1} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha < 2$, збігається умовно при $2 \leq \alpha < 3$.

$$2. \int_2^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha \sin x}{\ln x} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha < -1$, збігається умовно при $-1 \leq \alpha \leq 0$.

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(\ln(1+x) - \ln x)^\alpha} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha < -1$, збігається умовно при $-1 \leq \alpha < 0$.

$$4. \int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha + \ln x} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha > 1$, збігається умовно при $\alpha \leq 1$.

$$5. \int_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x} - \ln x)^\alpha} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha > 2$, збігається умовно при $0 < \alpha \leq 2$.

$$6. \int_2^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{x^\alpha \ln x} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha > 1$, збігається умовно при $1/2 \leq \alpha \leq 1$.

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^\alpha} \sin x^3 dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha > 2$, збігається умовно при $-1 < \alpha \leq 2$.

$$8. \int_1^{+\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha > 1$, збігається умовно при $0 < \alpha \leq 1$.

$$9. \int_1^{+\infty} \sin(x+x^2) \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha > 1$, збігається умовно при $-1 < \alpha \leq 1$.

$$10. \int_1^{+\infty} x^\alpha \sin \frac{1}{x} \cdot \cos x dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha < 0$, збігається умовно при $0 \leq \alpha < 1$.

$$11. \int_1^{+\infty} \frac{x^2 \cos x^3}{(5x - \arctg x)^\alpha} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha > 3$, збігається умовно при $0 < \alpha \leq 3$.

$$12. \int_2^{+\infty} (x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x))^\alpha \sin x dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha < -1$, збігається умовно при $-1 \leq \alpha < 0$.

$$13. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{(2x - \cos \ln x)^\alpha} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha > 1$, збігається умовно при $0 < \alpha \leq 1$.

$$14. \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right)^\alpha} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha < -1$, збігається умовно при $-1 \leq \alpha < 0$.

$$15. \int_\pi^{+\infty} \frac{x^\alpha \cos x^4}{\ln x} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha < -1$, збігається умовно при $-1 \leq \alpha \leq 3$.

$$16. \int_0^{+\infty} x^\alpha \sin(\sin x) dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $-2 < \alpha < -1$, збігається умовно при $-1 \leq \alpha < 0$.

$$17. \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \cos(5x^2)}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $-1 < \alpha < 1$, збігається умовно при $1 \leq \alpha < 3$.

$$18. \int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{tg} \sin \frac{1}{x} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $-1 < \alpha < 0$, збігається умовно при $-2 < \alpha \leq -1$.

$$19. \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{1+x^{2\alpha^2}} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $-2 < \alpha < -1/2$ та при $\alpha > 1$, збігається умовно при $-1/2 \leq \alpha < 0$ та при $1/2 < \alpha \leq 1$.

$$20. \int_1^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{x^\alpha} \sin x dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha > 1$, збігається умовно при $0 < \alpha \leq 1$.

$$21. \int_0^{+\infty} x^\alpha \sin \sqrt[3]{x} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $-4/3 < \alpha < -1$, збігається умовно при $-1 \leq \alpha < -2/3$.

$$22. \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $1/2 < \alpha < 3/2$, збігається умовно при $-1/2 \leq \alpha \leq 1/2$.

$$23. \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\sin \frac{1}{x}\right)}{x^\alpha} dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $0 < \alpha < 1$, збігається умовно при $1 \leq \alpha < 2$.

$$24. \int_1^{+\infty} (1 - e^{\sin x/x}) x^\alpha dx.$$

Відповідь: збігається абсолютно при $\alpha < 0$, збігається умовно при $0 \leq \alpha < 1$.

8.3. Ейлерові інтеграли

Завдання 17. Користуючись формулами

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} dx}{(1+x)^{p+q}},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right),$$

обчислити інтеграли:

1. а) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{4x-x^3}}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x(1+x^3)}}$;

в) $\int_0^{\pi/4} \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x} dx$.

Відповіді: а) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$; в) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

2. а) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x} x^3 dx}{\sqrt{27-x^3}}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$;

в) $\int_0^{\pi/6} \sqrt[4]{\operatorname{ctg} 3x} dx$.

Відповіді: а) $\frac{9\pi}{2}$; б) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

3. а) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x} x^3 dx}{\sqrt[6]{2x^4-x^6}}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sqrt[3]{x} dx}{(1+x^2)^2}$;

в) $\int_0^{3\pi/2} \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2(x/3)} dx$.

Відповіді: а) π ; б) $\frac{\pi}{6}$; в) 3π .

4. а) $\int_0^2 \sqrt[3]{2x^2-x^3} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{1+x^6}$;

в) $\int_0^{\pi/10} \frac{\sin^8 10x}{\sin^2 5x} dx$.

Відповіді: а) $\frac{8\sqrt{3}\pi}{27}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{16}$.

5. а) $\int_0^4 \frac{\sqrt{2-\sqrt{x}} dx}{\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2} dx}{(1+x^2)^2}$;

в) $\int_0^{\pi/4} \cos^2 2x \sqrt{\operatorname{ctg} 2x} dx$.

Відповіді: а) 2π ; б) $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$; в) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$.

6. а) $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^{4/3}}}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{5/4} dx}{(1+x^3)^2}$;

в) $\int_0^{\pi} \sin^8 x \cdot \sin^2(x/2) dx$.

Відповіді: а) 3π ; б) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$; в) $\frac{35\pi}{256}$.

7. а) $\int_0^e \sqrt[3]{\frac{x}{e-x}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{10} dx}{(1+x^4)^3}$;

в) $\int_0^{\pi/8} \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 4x} dx$.

Відповіді: а) $\frac{2\pi e}{3\sqrt{3}}$; б) $\frac{21\pi\sqrt{2}}{128}$; в) $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$.

8. а) $\int_0^{125} \frac{dx}{\sqrt[12]{x^7} \cdot \sqrt[4]{5-\sqrt[3]{x}}}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3} dx}{(1+x^5)^2}$;

$$\text{в) } \int_0^{\pi/4} \cos^2 2x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^5 2x} dx.$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{15\pi}{2\sqrt{2}}; \text{ б) } \frac{4\pi\sqrt{3}}{45}; \text{ в) } \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}.$$

$$\mathbf{9.} \text{ а) } \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^{31} dx}{\sqrt[4]{(8-x^6)^3}}; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{x} dx}{(1+x^7)^4};$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin^{14}(x/2)}{\sin^4(x/4)} dx.$$

$$\text{Відповіді: а) } \sqrt{2}\pi; \text{ б) } \frac{5\pi}{112}; \text{ в) } \frac{273\pi}{128}.$$

$$\mathbf{10.} \text{ а) } \int_0^{100} 3\sqrt[3]{\frac{10-\sqrt{x}}{x^2}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{(1+x^6)^2};$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/12} \sqrt[4]{\operatorname{tg} 6x} dx.$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{40\pi}{3\sqrt{3}}; \text{ б) } \frac{\pi\sqrt{3}}{27}; \text{ в) } \frac{\pi\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{12}.$$

$$\mathbf{11.} \text{ а) } \int_0^9 3\sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{x})^5}{x}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^2)^3}};$$

$$\text{в) } \int_0^{3\pi/2} \sin^{10}(x/3) dx.$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{20\pi}{3\sqrt{3}}; \text{ б) } \frac{5\pi\sqrt{3}}{27}; \text{ в) } \frac{189\pi}{512}.$$

$$\mathbf{12.} \text{ а) } \int_0^7 \sqrt[4]{\frac{(49-x^2)^3}{\sqrt{x}}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x^6)^3};$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/4} \sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 2x} \cdot \cos^4 x dx.$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{147\pi\sqrt{2}}{8}; \text{ б) } \frac{7\pi\sqrt{2}}{64}; \text{ в) } \frac{5\pi}{72}.$$

$$\mathbf{13.} \text{ а) } \int_0^{\pi^2} \frac{(\pi-\sqrt{x})^{3/4}}{x^{7/8}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x(1+x^8)^2}};$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos x)^{15}} dx.$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{3\sqrt{2}\pi^2}{2}; \text{ б) } \frac{\pi\sqrt{3}}{18}; \text{ в) } \frac{524288\sqrt{2}}{6435}.$$

$$\mathbf{14.} \text{ а) } \int_0^{\pi^2} \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{25-x^2} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{x^8 dx}{(1+x^6)^5};$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/6} \sin^6 3x \cdot \sin^{14} 6x dx.$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{25\pi}{6}; \text{ б) } \frac{5\pi}{768}; \text{ в) } \frac{2717\pi}{524288}.$$

$$\mathbf{15.} \text{ а) } \int_0^{1/2} \frac{x^{4/3}}{\sqrt[6]{1-4x^2}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[6]{x(1+x^5)^3}};$$

$$\text{в) } \int_0^{4\pi} \cos^{12}(x/8) dx.$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{\sqrt[3]{4}\pi}{48}; \text{ б) } \frac{11\pi}{36}; \text{ в) } \frac{231\pi}{256}.$$

$$\mathbf{16.} \text{ а) } \int_0^4 \frac{(\sqrt{2}-\sqrt[4]{x})^{8/3}}{12\sqrt{x^{11}}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[6]{x} dx}{(1+x^7)^2};$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/12} \sqrt{\operatorname{tg} 6x} dx.$$

Відповіді: а) $\frac{640\sqrt{6}\pi}{243}$; б) $\frac{5\pi}{21}$; в) $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$.

17. а) $\int_0^2 \frac{x^{10}}{\sqrt[3]{x(16-x^4)^2}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)^3}}$;

в) $\int_0^{5\pi/2} \cos^{12}(x/5) dx$.

Відповіді: а) $\frac{640\pi\sqrt{3}}{27}$; б) $\frac{\pi\sqrt{3}}{27}$; в) $\frac{1155\pi}{2048}$.

18. а) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^{13}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{27-64x^6}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^3)^2}$;

в) $\int_0^{\pi/2} \sqrt[4]{\frac{\cos^{11} x}{\sin^3 x}} dx$.

Відповіді: а) $\frac{1225\pi}{524288}$; б) $\frac{5\pi}{9}$; в) $\frac{7\pi\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{16}$.

19. а) $\int_0^5 \sqrt[3]{25x^7 - x^9} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{(1+x^8)^3}$;

в) $\int_0^{\pi/10} \sqrt{\operatorname{ctg} 5x} dx$.

Відповіді: а) $\frac{625\pi\sqrt{3}}{27}$; б) $\frac{55\pi}{288}$; в) $\frac{\sqrt{2}\pi}{10}$.

20. а) $\int_0^{2/3} \frac{x^9}{\sqrt[3]{8-27x^3}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^{11}} dx}{(1+x^4)^3}$;

в) $\int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos(x/2))^{11}} dx$.

Відповіді: а) $\frac{14336\pi\sqrt{3}}{43046721}$; б) $\frac{5\pi}{144}$; в) $\frac{32768\sqrt{2}}{693}$.

21. а) $\int_0^{25} \frac{\sqrt[4]{5-\sqrt{x}}}{x^{5/8}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} x^8 dx}{(1+x^7)^4}$;

в) $\int_0^{\pi/8} \sin^2 4x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 4x} dx$.

Відповіді: а) $\frac{5\sqrt{2}\pi}{2}$; б) $\frac{10\pi\sqrt{3}}{1701}$; в) $\frac{5\pi}{24}$.

22. а) $\int_0^{1/2} \frac{x^{9/2}}{\sqrt[6]{(1-8x^3)^5}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(1+x^3)^3}$;

в) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin^{14} 2x dx$.

Відповіді: а) $\frac{5\pi\sqrt{2}}{576}$; б) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{81}$; в) $\frac{429\pi}{8192}$.

23. а) $\int_0^4 \sqrt{16x^{12} - x^{14}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} dx}{(1+x^5)^2}$;

в) $\int_0^{\pi/4} \sqrt[3]{\frac{\cos^{13} 2x}{\sin 2x}} dx$.

Відповіді: а) 1280π ; б) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{20}$; в) $\frac{5\sqrt{3}\pi}{54}$.

24. а) $\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{\frac{(7-x^2)^2}{x}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^5 dx}{(1+x^8)^2}$;

в) $\int_0^{\pi/20} \operatorname{ctg}^{2/3} 10x dx$.

Відповіді: а) $\frac{14\pi\sqrt{3}}{9}$; б) $\frac{\pi\sqrt{2}}{32}$; в) $\frac{\pi}{10}$.

8.4. Класичні невластні інтеграли

Завдання 18. Користуючись класичними невластними інтегралами Френеля $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

обчислити інтеграли:

1. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2x^2 - x + 1) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(3x^2) \cos(x - 2) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7}{8}\right)$; б) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \cos 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{12}\right)$.

2. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(3x^2 + x - 2) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2x^2 + x - 3) \sin(4 - 2x) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{25}{12}\right)$; б) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sin \frac{9}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{29}{8}\right)$.

3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4x^2 - 2x - 1) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x^2 - 5x) \cos(8x + 1) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\right)$; б) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cos 11 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{89}{8}\right)$.

4. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x^2 - 3x + 4) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4x^2 - 5) \sin(3 - 2x) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{23}{8}\right)$; б) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin 3 \cdot \cos\left(\frac{21}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$.

5. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(3x^2 + 2x - 1) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(4x^2 - 2) \cos(3x) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\right)$; б) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{41}{16}\right)$.

6. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(4x^2 + 3x - 2) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(3x^2 + 2) \sin(2x + 3) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{41}{16}\right)$; б) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \sin 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5}{3}\right)$.

7. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2x^2 - x + 5) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(3x^2 - x) \cos(6x - 2) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{39}{8}\right)$; б) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \cos 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{37}{12}\right)$.

8. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(3x^2 + 5x - 2) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2x^2 + x - 1) \sin(2x - 6) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{49}{12}\right)$; б) $-\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sin \frac{13}{2} \cos\left(\frac{13}{8} - \frac{\pi}{4}\right)$.

9. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4x^2 - 2x - 5) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(5x^2 + 2) \cos(4x - 3) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{21}{4}\right)$; б) $\frac{\sqrt{5\pi}}{5} \cos 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6}{5}\right)$.

10. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(5x^2 - 4x + 2) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4x^2 - 5) \sin(2x + 1) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{5\pi}}{5} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6}{5}\right)$; б) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{21}{4}\right)$.

11. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(3x^2 + 2x - 4) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x^2 - x) \cos(3x + 1) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{13}{3}\right)$; б) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cos \frac{7}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5}{4}\right)$.

12. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x^2 - 4x - 1) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(3x^2 + x) \sin(4 - 3x) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3\right)$; б) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \sin \frac{9}{2} \cdot \cos\left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$.

13. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(5x^2 - 6x - 4) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(6x^2 + 5) \cos(4x - 7) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{5\pi}}{5} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{29}{5}\right)$; б) $\frac{\sqrt{6\pi}}{6} \cos 7 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{13}{3}\right)$.

14. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(6x^2 - 4x + 5) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(5x^2 - x - 1) \sin(5x + 3) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{6\pi}}{6} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{13}{3}\right)$; б) $\frac{\sqrt{5\pi}}{5} \sin \frac{7}{2} \cdot \sin\left(\frac{23}{10} - \frac{\pi}{4}\right)$.

15. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2x^2 + 6x - 3) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(3x^2 - 2) \cos(6x + 1) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{15}{2}\right)$; б) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \cos 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5\right)$.

16. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(3x^2 - 6x - 1) dx$;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2x^2 + x - 1) \sin(5x - 2) dx$;

Відповіді: а) $\frac{\sqrt{3\pi}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\right)$; б) $-\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sin \frac{13}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{17}{4}\right)$.

17. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4x^2 + 6x + 5) dx$;

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(5x^2 - 6x - 1) \cos(2x - 3) dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{11}{4}\right); \text{ б) } \frac{\sqrt{5\pi}}{5} \cos\frac{9}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right).$$

$$\mathbf{18.} \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(5x^2 - 2x + 4) dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4x^2 + 5x) \sin(x + 5) dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{\sqrt{5\pi}}{5} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{19}{5}\right); \text{ б) } \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\frac{35}{8} \cdot \sin\left(\frac{13}{8} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\mathbf{19.} \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(6x^2 - 2x - 5) dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(3x^2 + 4x - 1) \cos(4x + 1) dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{\sqrt{6\pi}}{6} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{31}{6}\right); \text{ б) } \frac{\sqrt{3\pi}}{3} \cos\frac{5}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{11}{3}\right).$$

$$\mathbf{20.} \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(3x^2 + 8x - 2) dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(6x^2 - 5x) \sin(3x - 5) dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{\sqrt{3\pi}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{22}{3}\right); \text{ б) } -\frac{\sqrt{6\pi}}{6} \sin\frac{15}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{17}{12}\right).$$

$$\mathbf{21.} \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2x^2 - 10x + 3) dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(4x^2 - 10x) \cos(2x - 1) dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{19}{2}\right); \text{ б) } \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{13}{2}\right).$$

$$\mathbf{22.} \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(4x^2 - 8x - 1) dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2x^2 - 9x + 3) \sin(x - 2) dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5\right); \text{ б) } \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sin\frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{29}{4}\right).$$

$$\mathbf{23.} \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(6x^2 + 8x + 3) dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(4x^2 + x - 1) \cos(9x - 4) dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{\sqrt{6\pi}}{6} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right); \text{ б) } \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\frac{41}{8} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{49}{8}\right).$$

$$\mathbf{24.} \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(4x^2 + 10x - 5) dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(6x^2 + 7x + 2) \sin(x + 1) dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{45}{4}\right); \text{ б) } \frac{\sqrt{6\pi}}{6} \sin\frac{5}{12} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{12}\right).$$

Завдання 19. Користуючись класичним невластним інтегралом Ейлера-Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ ($\alpha > 0$), обчислити інтеграли:

$$1. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2+2x-1} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (7x-4)e^{-2x^2-5x+1} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{5}e^{-4/5}\sqrt{5\pi}; \quad \text{б) } \frac{-51}{8}e^{33/8}\sqrt{2\pi}.$$

$$2. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-4x+2} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (5x+1)e^{-4x^2+3x-2} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{3}e^{10/3}\sqrt{3\pi}; \quad \text{б) } \frac{23}{16}e^{-23/16}\sqrt{\pi}.$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2+x-3} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (6x-1)e^{-3x^2-x+4} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{2}e^{-47/16}\sqrt{\pi}; \quad \text{б) } -\frac{2}{3}e^{49/12}\sqrt{3\pi}.$$

$$4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2-3x-6} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (8x-5)e^{-6x^2-2x+3} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{2}e^{-39/8}\sqrt{2\pi}; \quad \text{б) } -\frac{19}{18}e^{19/6}\sqrt{6\pi}.$$

$$5. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-6x^2-x-5} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (3x+8)e^{-5x^2+6x-1} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{6}e^{-119/24}\sqrt{6\pi}; \quad \text{б) } -\frac{8}{5}e^7\sqrt{5\pi}.$$

$$6. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2+5x-7} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (9-4x)e^{-3x^2+x+5} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{3}e^{-59/12}\sqrt{3\pi}; \quad \text{б) } \frac{1}{3}e^{61/12}\sqrt{3\pi}.$$

$$7. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2+2x-3} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (8x-3)e^{-2x^2-4x+3} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{2}e^{-11/4}\sqrt{\pi}; \quad \text{б) } -\frac{11}{2}e^5\sqrt{2\pi}.$$

$$8. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2-4x-6} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (7x+2)e^{-5x^2+3x+2} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{5}e^{-26/5}\sqrt{5\pi}; \quad \text{б) } \frac{41}{50}e^{49/20}\sqrt{5\pi}.$$

$$9. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+5x+3} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (2x-9)e^{-4x^2-5x-6} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{2}e^{49/8}\sqrt{2\pi}; \quad \text{б) } -\frac{41}{8}e^{-71/16}\sqrt{\pi}.$$

$$10. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-6x^2-x+2} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (2x-9)e^{-6x^2+2x-1} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{6}e^{49/24}\sqrt{6\pi}; \quad \text{б) } -\frac{13}{9}e^{-5/6}\sqrt{6\pi}.$$

$$11. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2+2x-5} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (3x-8)e^{-2x^2-5x+3} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{3}e^{-14/3}\sqrt{3\pi}; \quad \text{б) } -\frac{47}{8}e^{49/8}\sqrt{2\pi}.$$

$$12. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2+5x+6} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (6x+1)e^{-5x^2+4x-6} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{2}e^{121/16}\sqrt{\pi}; \quad \text{б) } \frac{17}{25}e^{-26/5}\sqrt{5\pi}.$$

$$13. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2-6x+2} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (2x-6)e^{-6x^2+5x-2} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{5}e^{19/5}\sqrt{5\pi}; \quad \text{б) } -\frac{31}{36}e^{-23/24}\sqrt{6\pi}.$$

$$14. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+3x-4} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (6x+2)e^{-3x^2+2x+4} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{2}e^{-23/8}\sqrt{2\pi}; \quad \text{б) } \frac{4}{3}e^{13/3}\sqrt{3\pi}.$$

$$15. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-8x+7} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (4x+6)e^{-8x^2-3x-7} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{3}e^{37/3}\sqrt{3\pi}; \quad \text{ б) } \frac{21}{16}e^{-215/32}\sqrt{2\pi}.$$

$$16. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-7x^2+2x-4} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (4x+5)e^{-2x^2-7x+4} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{7}e^{-27/7}\sqrt{7\pi}; \quad \text{ б) } -e^{81/8}\sqrt{2\pi}.$$

$$17. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2-4x+7} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (5x-6)e^{-7x^2+4x-4} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{2}e^8\sqrt{\pi}; \quad \text{ б) } -\frac{32}{49}e^{-24/7}\sqrt{7\pi}.$$

$$18. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-8x^2+2x+5} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (3x-2)e^{-5x^2+8x+2} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{4}e^{-39/8}\sqrt{2\pi}; \quad \text{ б) } \frac{2}{25}e^{26/5}\sqrt{5\pi}.$$

$$19. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+6x-3} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (2x+5)e^{-6x^2-2x+3} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{2}e^{-1/2}\sqrt{2\pi}; \quad \text{ б) } \frac{7}{9}e^{19/6}\sqrt{6\pi}.$$

$$20. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2-8x-2} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (9x+2)e^{-8x^2-5x-2} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{5}e^{6/5}\sqrt{5\pi}; \quad \text{ б) } -\frac{13}{64}e^{-39/12}\sqrt{2\pi}.$$

$$21. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-6x^2-7x-3} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (4x-6)e^{-9x^2+8x+4} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{6}e^{-23/24}\sqrt{6\pi}; \quad \text{ б) } -\frac{38}{27}e^{52/9}\sqrt{\pi}.$$

$$22. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2+9x-8} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (4x+3)e^{-9x^2+8x+4} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{2}e^{-47/16}\sqrt{\pi}; \quad \text{ б) } \frac{43}{27}e^{52/9}\sqrt{\pi}.$$

$$23. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-9x^2+x-2} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (3x+8)e^{-2x^2-9x+1} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{3}e^{-71/36}\sqrt{\pi}; \quad \text{ б) } -\frac{59}{8}e^{89/8}\sqrt{2\pi}.$$

$$24. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-9x+8} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} (5x-8)e^{-4x^2+3x-9} dx;$$

$$\text{Відповіді: а) } \frac{1}{3}e^{54/4}\sqrt{3\pi}; \quad \text{ б) } -\frac{49}{16}e^{-135/16}\sqrt{\pi}.$$

Самостійна робота № 9

9.1. Ряд Фур'є

Завдання 20. Розкласти функцію $f(x)$: а) у ТРФ; б) у ТРФ по косинусах кратних дуг; в) у ТРФ по синусах кратних дуг. Побудувати графік суми $S(x)$ та знайти її значення в точках $x = a$, $x = b$, $x = c$.

$$1. f(x) = \begin{cases} 2x-4, & \text{якщо } 2 < x < 4; \\ 7-x, & \text{якщо } 4 < x < 7; \end{cases} \quad a=2, \quad b=4, \quad c=7.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } 2 < x < 3; \\ x, & \text{якщо } 3 < x < 5; \end{cases} \quad a=2, \quad b=3, \quad c=5.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{якщо } -3 < x < -2; \\ x, & \text{якщо } -2 < x < -1; \end{cases} \quad a=-3, \quad b=-2, \quad c=-1.$$

4. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 2 < x < 4; \\ x-3, & \text{якщо } 4 < x < 5; \end{cases} \quad a=2, b=4, c=5.$
5. $f(x) = \begin{cases} (x-2)/3, & \text{якщо } 2 < x < 3; \\ 3-x, & \text{якщо } 3 < x < 6; \end{cases} \quad a=2, b=3, c=6.$
6. $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } -5 < x < -4; \\ -x, & \text{якщо } -4 < x < -2; \end{cases} \quad a=-5, b=-4, c=-2.$
7. $f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{якщо } 1 < x < 5; \\ x+1, & \text{якщо } 5 < x < 6; \end{cases} \quad a=1, b=5, c=6.$
8. $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{якщо } \pi < x < 2\pi; \\ 2-x, & \text{якщо } 2\pi < x < 3\pi; \end{cases} \quad a=\pi, b=2\pi, c=3\pi.$
9. $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } \pi/2 < x < \pi; \\ 1-x, & \text{якщо } \pi < x < 2\pi; \end{cases} \quad a=\pi/2, b=\pi, c=2\pi.$
10. $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{якщо } 4 < x < 5; \\ 2-x, & \text{якщо } 5 < x < 6; \end{cases} \quad a=4, b=5, c=6.$
11. $f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{якщо } 1 < x < 4; \\ 3-x, & \text{якщо } 4 < x < 6; \end{cases} \quad a=1, b=4, c=6.$
12. $f(x) = \begin{cases} x/3, & \text{якщо } 2 < x < 3; \\ 1-2x, & \text{якщо } 3 < x < 6; \end{cases} \quad a=2, b=3, c=6.$
13. $f(x) = \begin{cases} -x/2, & \text{якщо } -3 < x < -2; \\ x+3, & \text{якщо } -2 < x < -1; \end{cases} \quad a=-3, b=-2, c=-1.$
14. $f(x) = \begin{cases} (x+2)/5, & \text{якщо } -4 < x < -2; \\ -x, & \text{якщо } -2 < x < -1; \end{cases} \quad a=-4, b=-2, c=-1.$
15. $f(x) = \begin{cases} 6-x, & \text{якщо } 1 < x < 5; \\ x-5, & \text{якщо } 5 < x < 6; \end{cases} \quad a=1, b=5, c=6.$
16. $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{якщо } 1 < x < 2; \\ -x/2, & \text{якщо } 2 < x < 6; \end{cases} \quad a=1, b=2, c=6.$

17. $f(x) = \begin{cases} x/3, & \text{якщо } 3 < x < 6; \\ 13-2x, & \text{якщо } 6 < x < 7; \end{cases} \quad a=3, b=6, c=7.$
18. $f(x) = \begin{cases} (1-x)/2, & \text{якщо } 1 < x < 4; \\ x+4, & \text{якщо } 4 < x < 5; \end{cases} \quad a=1, b=4, c=5.$
19. $f(x) = \begin{cases} -x/4, & \text{якщо } -5 < x < -4; \\ x+2, & \text{якщо } -4 < x < -2; \end{cases} \quad a=-5, b=-4, c=-2.$
20. $f(x) = \begin{cases} x-4, & \text{якщо } 2 < x < 5; \\ 12-2x, & \text{якщо } 5 < x < 7; \end{cases} \quad a=2, b=5, c=7.$
21. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 1 < x < 2; \\ 2-x, & \text{якщо } 2 < x < 3; \end{cases} \quad a=1, b=2, c=3.$
22. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } 1 < x < 3; \\ x+1, & \text{якщо } 3 < x < 4; \end{cases} \quad a=1, b=3, c=4.$
23. $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2, & \text{якщо } 1 < x < 5; \\ (x-5)/3, & \text{якщо } 5 < x < 8; \end{cases} \quad a=1, b=5, c=8.$
24. $f(x) = \begin{cases} (x+4)/2, & \text{якщо } -6 < x < -4; \\ 1-x, & \text{якщо } -4 < x < -1; \end{cases} \quad a=-6, b=-4, c=-1.$

Завдання 21. У наступних завдання використані позначення

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (n=0, 1, \dots)$$

для поліномів Лежандра,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (n=0, 1, \dots)$$

для поліномів Чебишова,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n), \quad 0 \leq x < +\infty \quad (n=0, 1, \dots)$$

для поліномів Лагерра,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad -\infty < x < +\infty \quad (n=0, 1, \dots)$$

для поліномів Ерміта.

1. Знайти $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx$.
2. Знайти $\int_0^1 x P_n(x) dx$.
3. Розкласти в ряд Фур'є по поліномах Лежандра функцію $f(x) = \operatorname{sgn} x, |x| < 1$.
4. Розкласти в ряд Фур'є по поліномах Лежандра функцію $f(x) = |x|, |x| < 1$.
5. Знайти $\int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. Розкласти в ряд Фур'є по поліномах Чебишова функцію $f(x) = \operatorname{sgn} x, |x| < 1$.
7. Розкласти в ряд Фур'є по поліномах Чебишова функцію $f(x) = |x|, -1 < x < 1$.
8. Знайти $\int_0^{+\infty} e^{-x} L_n^2(x) dx$.
9. Розкласти в ряд Фур'є по поліномах Лагерра функцію $f(x) = \operatorname{sgn} x$.
10. Розкласти в ряд Фур'є по поліномах Лагерра функцію $f(x) = |x|$.
11. Знайти $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx$.
12. Розкласти в ряд Фур'є по поліномах Ерміта функцію $f(x) = \operatorname{sgn} x$.
13. Розкласти в ряд Фур'є по поліномах Ерміта функцію $f(x) = |x|$.

9.2. Інтеграл Фур'є

Завдання 22. Функцію $f(t)$ подати інтегралом Фур'є у дійсній і комплексній формах. Записати спектральну

$$\text{густину } C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

1. $f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \text{якщо } |t| \leq a; \\ 0, & \text{якщо } |t| > a \end{cases} \quad (a > 0).$
2. $f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{a}, & \text{якщо } 0 < t \leq a; \\ 0, & \text{якщо } t > a; \end{cases} \quad f(-t) = -f(t) \quad (a > 0).$
3. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{якщо } |t| \leq \pi; \\ 0, & \text{якщо } |t| > \pi. \end{cases}$
4. $f(t) = \begin{cases} |\sin t|, & \text{якщо } |t| \leq \pi; \\ 0, & \text{якщо } |t| > \pi. \end{cases}$
5. $f(t) = \begin{cases} \cos \frac{t}{2}, & \text{якщо } |t| \leq \pi; \\ 0, & \text{якщо } |t| > \pi. \end{cases}$
6. $f(t) = \begin{cases} a - |t - a|, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2a; \\ 0, & \text{якщо } t > 2a; \end{cases} \quad f(-t) = -f(t) \quad (a > 0).$
7. $f(t) = \begin{cases} a - |t - a|, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2a; \\ 0, & \text{якщо } t > 2a; \end{cases} \quad f(-t) = f(t) \quad (a > 0).$
8. $f(t) = e^{-a|t|} \quad (a > 0).$
9. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 < t \leq 2; \\ e^{2-t}, & \text{якщо } t > 2; \end{cases} \quad f(-t) = -f(t).$
10. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2; \\ e^{2-t}, & \text{якщо } t > 2; \end{cases} \quad f(-t) = f(t).$

11. $f(t) = e^{-\alpha t} \sin \beta t, t \geq 0; f(-t) = -f(t) \quad (\alpha > 0).$
12. $f(t) = e^{-\alpha t} \sin \beta t, t \geq 0; f(-t) = f(t) \quad (\alpha > 0).$
13. $f(t) = e^{-\alpha t} \cos \beta t, t > 0; f(-t) = -f(t) \quad (\alpha > 0).$
14. $f(t) = e^{-\alpha t} \cos \beta t, t \geq 0; f(-t) = f(t) \quad (\alpha > 0).$
15. $f(t) = te^{-\alpha t}, t \geq 0; f(-t) = -f(t) \quad (\alpha > 0).$
16. $f(t) = te^{-\alpha t}, t \geq 0; f(-t) = f(t) \quad (\alpha > 0).$
17. $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & \text{якщо } 0 < t \leq 1; \\ 0, & \text{якщо } t > 1; \end{cases} \quad f(-t) = -f(t).$
18. $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 1; \\ 0, & \text{якщо } t > 1; \end{cases} \quad f(-t) = f(t).$
19. $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & \text{якщо } |t| \leq 1; \\ 0, & \text{якщо } |t| > 1. \end{cases}$
20. $f(t) = \begin{cases} 1-(t-1)^2, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2; \\ 0, & \text{якщо } t > 2; \end{cases} \quad f(-t) = -f(t).$
21. $f(t) = \begin{cases} 1-(t-1)^2, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2; \\ 0, & \text{якщо } t > 2; \end{cases} \quad f(-t) = f(t).$
22. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 < t \leq 1; \\ 2-t, & \text{якщо } 1 < t \leq 2; \\ 0, & \text{якщо } t > 2; \end{cases} \quad f(-t) = -f(t).$
23. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 1; \\ 2-t, & \text{якщо } 1 < t \leq 2; \\ 0, & \text{якщо } t > 2; \end{cases} \quad f(-t) = f(t).$
24. $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & \text{якщо } t > 0; \\ 0, & \text{якщо } t < 0; \end{cases} \quad (\alpha > 0).$

Література

1. Єфіменко С. В., Кривошея С. А. Контрольні завдання з математичного аналізу. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2002. — 67 с.
2. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1991. — 352 с.
3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды/Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — М.: "Наука", 1986. — 528 с.

Зміст

Самостійна робота 7	3
7.1. Елементи математичної теорії поля і векторного аналізу.....	3
7.2. Числові ряди.....	6
7.3. Функціональні послідовності і ряди.....	12
7.4. Степеневий ряд. Ряд Тейлора.....	18
Самостійна робота 8	26
8.1. Власні інтеграли, залежні від параметра.....	26
8.2. Невласні інтеграли, залежні від параметра.....	29
8.3. Ейлерові інтеграли.....	36
8.4. Класичні невластні інтеграли.....	41
Самостійна робота 9	51
9.1. Ряд Фур'є.....	51
9.2. Інтеграл Фур'є.....	54
Література	56

Навчальне видання

Майко Наталія Валентинівна
Рябічев В'ячеслав Львович
Іваненко Дмитро Олександрович

**Індивідуальні завдання
для самостійних робіт
з математичного аналізу**

Частина 3

Навчально-методичний посібник



Підписано до друку ■.■.2010. Формат 60x80^{1/16}.
Гарнітура Bookman Old Style. Папір офсетний. Друк офсетний.
Наклад ■ примірників. Ум. друк. арк. ■ .

Видавнича лабораторія радіофізичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка