КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кривошея С.А., Моторна О.В., Прощенко Т.М.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДО ТЕМ, ВИНЕСЕНИХ НА САМОСТІЙНУ РОБОТУ «НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА»

ЧАСТИНА 5

Методичний посібник

Київ – 2012

УДК 517

Рецензенти
канд. фіз.-мат. наук Грязнова В.О.
канд. фіз.-мат. наук Зайцева Л.Л.

Кривошея С.А., Моторна О.В., Прощенко Т.М.

Індивідуальні завдання з математичного аналізу до тем, винесених на самостійну роботу. Частина 4. Методичний посібник.

Методична розробка містить задачі з математичного аналізу до тем «Невласні інтеграли», «Інтеграли, залежні від парамеира», «Класичні невласні інтеграли», «Інтеграли Ейлера», «Інтеграл Фур'є».. Здійснено підбір задач до кожної теми, які оформлені у вигляді 25 варіантів.

Затверджено вченою радою радіофізичного факультету
№ 11 від 14.04.2012

УДК 517

Варіант 1.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{e^4}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))^3}$;   б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1} dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sin^2 x + 1 + 2x^2 + 3x^4}$;   б) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \cos(7x)}{x^2 + 2x + 2} dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx,\ 0 < \beta_0 < \beta < \infty$;   б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^4 + \alpha} dx,\ \alpha \geq 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx,\ |\alpha| < \infty$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(2 + x^4\right)^2}$;   б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1 - x^3}}$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} \ln x}{1 + x^3} dx$;   г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{(1+x)^3 \ln x} dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx,\ \beta > \alpha > 0$;   б) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos 2bx dx,\ \ (a > 0)$

8. Довести рівність

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}\cos ax\,dx = \frac{1}{a^p}\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2},\ 0<p<1.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\varepsilon x}}{1+x^2}dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\ln\left(x^2+\alpha^2\right)dx,\ \alpha>0$.

11. Використовуючи рівність $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{\left(1+x^8\right)^2}dx=\frac{\pi}{4}ae^{-a},\ a>0$, обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^8+a^8}\frac{\sin x}{x}dx$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=\begin{cases}\operatorname{sign} t, & |t|<1,\\ 0, & |t|\geq 1\end{cases}$$

Варіант 2.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int\limits_1^2\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$; б) $\int\limits_0^1\frac{e^{\sqrt[4]{x}}-1}{\sqrt{1-\cos x}}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2-4x+5}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}dx,\ \alpha>0$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[5]{x+\alpha}}dx,\ \alpha\ge 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}dx,\ |\alpha|<\infty$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(9+x^2)^2}dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}}$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{(1+x)^4\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{a}{x^2}}dx,\ a>0$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\ \ (\alpha>0,\beta>0)$

8. Довести рівність

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\sin ax\,dx=\frac{1}{a^p}\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2},\ -1<p<1.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}dx,\ \alpha>0$.

11. Виходячи з рівності $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}signa$, обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t) = \begin{cases} t+\operatorname{sign}t, & |t|<1, \\ 0, & |t|\geq 1 \end{cases}.$$

Варіант 3.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin x dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{1/x^3}-1}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha(1+x^2)}\sin\alpha\, dx,\ |\alpha|<\infty$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{\sqrt{x}}}{x^2+\alpha^2}dx,\ |\alpha|<\infty$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2(1+x^2)} \sin \alpha x\, dx, \ |\alpha| < \infty$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^5}$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{(1+x)^3(1-x)^2}}$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}\ln^2 x}{1+x^2} dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}(1+x^2)\ln x} dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2+\alpha^2} dx, \ (\alpha > 0, \beta > 0)$.

8. Використовуючи рівність $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt, \ x > 0$, знайти інтеграли

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{x}} dx.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha) = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\alpha x^8} dx$.

11. Виходячи з рівності $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} \ (a > 0)$, обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур’є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур’є.

$$f(t)=\begin{cases} |t+\operatorname{sign} t|, & |t|<1, \\ 0, & |t|\geq 1 \end{cases}.$$

Варіант 4.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{tg\, {}^1\!/\!{}_x}{1+x\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^2}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx,\ |\alpha|<\infty$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^3+\alpha^3}dx,\ |\alpha|<\infty$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx,\ 0<\alpha<2$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x}}dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^2}}$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^q \ln^2 x}{1+x^2} dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x(1+x^2)}\ln x} dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 \sin 2x dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx, \quad (0 < a < b)$.

8. Використовуючи рівність $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt,\ x > 0$, знайти інтеграли

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x}} dx.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \alpha\sqrt{1-x^2}\, dx,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

11. Виходячи з рівності $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} a$, обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3}$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \ge 1 \end{cases}$$

Варіант 5.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3\cos x^2}{x^8-8x^4+18}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}}{\sqrt{\alpha}}dx,\ \alpha>0$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt{x+\alpha}}dx,\ \alpha\ge 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\beta x^2}dx,\ \beta>0$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{8+x^5}dx$; б) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{dx}{\sqrt[4]{(3+x)^3(3-x)^2}}$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x}\left(1+x^2\right)}dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{(1+x^6)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x^2 \sin 2x dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}dx,\ \ (k>0)$.

8. Використовуючи рівність $\frac{1}{x^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_{0}^{+\infty} t^{m-1}e^{-xt}dt,\ x>0$, знайти інтеграли

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$.

11. Виходячи з рівності $\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a}\ln(1+ab)$, обчислити інтеграл $\int_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2}$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1, \\ -1-t, & -1 \le t < 0, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Варіант 6.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$; б) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int_1^{+\infty} \ln \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 + n}{n} dx \ (n > 0)$; б) $\int_{1/2}^{6/5} \frac{\sin x}{\sqrt{|1-x^2|}} dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} x\sin x^4 dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^1 \frac{\alpha^2 - x^2}{\left(\alpha^2 + x^2\right)^2} dx,\ |\alpha| < \infty$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x^2 + \alpha^2} dx,\ \alpha \geq 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx,\ 0 < \alpha < \infty$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\left(1 + x^3\right)^3} dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\frac{\cos^7 x}{\sin x}} dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{4 + x^2} dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}(1 + x^2)\ln x} dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \beta x}{x} dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-ax} \cos bx dx,\ \ (n \in \mathrm{N},\ a > 0)$.

8. Використовуючи рівність $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt,\ x > 0$, знайти інтеграли

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx,\ p > 0$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x+1}dx$.

11. Використовуючи рівність $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}\operatorname{sign}a$, обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=\begin{cases}|t|, & |t|<1,\\ 0, & |t|\ge 1\end{cases}$$

Варіант 7.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2x)}{x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sec x}\,dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_0^1\frac{\sin\frac{2}{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}dx$; б) $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{3x-2-x^2}}$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin e^x dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках а) $\int\limits_0^1 e^{-\varepsilon x}\frac{\cos x}{x^p}dx,\ \alpha \ge 0, 0 < p < l - фіксов.;$ б) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\varepsilon x}}{1+x^4}dx,\ \alpha \ge 0.$

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\varepsilon x^2}\cdot\cos\beta x}{x^2}dx,\ \alpha > 0, \beta - фіксов..$

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{\left(4+\sqrt{x^3}\right)^2}dx;$ б) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{27}x\,dx;$

в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^4\ln x}{1+x^{10}}dx;$ г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{(1+x^3)\ln x}dx.$

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-\cos\beta x}{x^2}dx,\ \alpha > 0;$

б) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{a\sin bx - b\sin ax}{x^2}dx,\ \ (a>0,\ b>0).$

8. Використовуючи рівність $\frac{1}{x^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^{+\infty}t^{m-1}e^{-xt}dt,\ x>0$, знайти інтеграли

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty}x^m\sin x^n dx,\ n>0.$

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha)=\int\limits_\alpha^{2\alpha}f\left(x+\alpha, x-\alpha\right)dx.$

11. Виходячи з рівності $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, обчислити інтеграл $\int\limits_0^b \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1, \\ 2-t, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t \ge 2 \end{cases} \qquad \mathrm{f}(-t) = \mathrm{f}(t)$$

Варіант 8.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$; б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2+x}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^7\cos x^4}{x^8-8x^4+18}\,dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha}\,dx,\ \alpha > 2+\sigma, \sigma > 0$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{\cos\alpha x}{x^\alpha}\,dx,\ 0 < \alpha \le \frac{1}{2}$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha^2}\,dx,\ |\alpha| < \infty$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{\left(e^{6x}+e^{-6x}\right)^2}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt[3]{e^t\left(1-e^t\right)^8}\,dt$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln^2 x}{1+x^2}dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{(1+x^4)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx$.

8. Використовуючи рівність $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-xt}\,dt,\ x > 0$, знайти інтеграли

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла,

залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin\left(x^2+y^2-\alpha^2\right)dy$.

11. Попередньо обчисливши $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx\ (a>0)$, знайти $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}x^{n-1}dx$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1,\\ 2-t, & 1<t\le 2, \qquad f(-t)=-f(t)\\ 0, & t\ge 2\end{cases}$$

Варіант 9.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{tg}\, x\, dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+\sqrt[3]{x+3}}{x+2\sqrt[4]{x^5+1}}dx$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{\sqrt{x}}{\sin x\sqrt[3]{9-x^3}}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\sin(10x)}{x^3+3x+1}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\varepsilon\sqrt{x}}dx,\ \alpha\ge 0$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{3+x^{\alpha}}dx,\ \alpha\ge 3$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^p}dx,\ \alpha>0, 0<p<1-\textit{фіксов.}.$

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^8}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt[5]{\sin^7 x\cos^9 x}dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{(1+x^3)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2 dx, \quad (a>0)$.

8. Довести рівність, використовуючи інтеграли Ейлера

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{\pi}{4}.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^3+x+1}dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F''(\alpha)$, якщо $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}(\alpha+x)f(x)\,dx$, $f(x)$ - диференційовна функція.

11. Попередньо обчисливши $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\cdot \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}dx \ (a>0)$, знайти $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}dx$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|<\pi, \\ 0, & |t|\ge\pi\end{cases}$$

Варіант 10.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$;   б) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{x}{1-x^4}}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x \cdot \cos(2x)}{\sqrt[6]{x}}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ n \ge 0$;   б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^{\alpha}}dx,\ \alpha \ge \frac{3}{2}$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}dx,\ p > 0$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{\left(e^{2x}+e^{-2x}+3\right)^3}dx$;   б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^{15} x dx$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)}dx$;   г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt{x}}{(1+x^2)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx$;   б) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-ax} \sin bx dx,\ \ (n \in \mathrm{N},\ a > 0)$.

8. Довести рівність, використовуючи інтеграли Ейлера

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^4}dx \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^4}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x^n dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F''(\alpha)$, якщо

$$F(\alpha)=\frac{1}{h^3}\int\limits_{h}^{\alpha h}dx\int\limits_{0}^{h}f\left(x+2\alpha+3y\right)dy,\ h>0,\quad f(x)\ \text{- неперервна.}$$

11. Виходячи з рівності $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin ax}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}$, обчислити інтеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax}{\left(1+x^2\right)^2}dx,\ a>0.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=\begin{cases}|\sin t|, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$$

Варіант 11.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{0}^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$; б) $\int\limits_{-1}^{0}e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3}$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{1}^{+\infty}(1-\cos\frac{2}{x})dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x-\sin x}$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln x\cdot\sin(4x)}{\sqrt[5]{x}}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках а) $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha^2}dx,\ |\alpha|<\infty$;   б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+\alpha}}dx,\ \alpha \ge 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^{\alpha}}dx,\ \alpha>2$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[6]{x}}{9+x^2}dx$;   б) $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt[8]{e^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^3}\,dt$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\ln x}{1+x^2}dx$;   г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{-2/3}-x^{-1/3}}{(1+x^3)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^2}dx$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx,\ \ (\alpha>0,\ \beta>0)$.

8. Довести рівність, використовуючи інтеграли Ейлера

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\cdot\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx=\frac{\pi}{2n}.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2}x^n dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^3}dx$.

11. Виходячи з рівності $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int\limits_a^b e^{-xy}dy$, обчислити інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t) = \begin{cases} \cos\frac{t}{2}, & |t| \le \pi, \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

Варіант 12.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x^3}} dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x \cdot \sin(3x)}{\sqrt[4]{x}} dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$, $\alpha \ge 0$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{\alpha + x} dx$, $\alpha \ge 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon x}}{1+x^4} dx$, $\alpha \ge 0$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[8]{x^3}\left(2+\sqrt{x}\right)^3}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\frac{\cos^{13} x}{\sin x}}dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{5/3}\, x \ln \mathrm{tg}\, x dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{(1+x^3)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x}dx, \; \alpha\beta \neq 0$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx, \quad (a>0)$.

8. Довести рівність, використовуючи інтеграли Ейлера

$$\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha),\; \alpha>0.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(\ln x)^n},\; n>0$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(x)=\int\limits_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$.

11. Виходячи з рівності $\frac{\cos ax - \cos bx}{x}=\int\limits_a^b \sin xy dy \; (a>0, b>0)$, обчислити

інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$f(t)=\begin{cases} 0, & |t|<1, \\ e^{-|t|}, & |t|\geq 1 \end{cases}$$

Варіант 13.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}$; б) $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{3+\arcsin 1/x}{1+x\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^4\cos(5x)}{x^5-x+2}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ye^{-x^2}\sin^2 y\,dx,\ |y|<\infty$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}\sin x^3}{\alpha+1}dx,\ \alpha\geq 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x}{5+x^{\alpha}}dx,\ \alpha\geq 3$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{\left(e^{4x}+e^{-4x}+1\right)^2}dx$; б) $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}\sqrt{3-x}\sqrt[6]{(x+1)^7}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\ln\sin x\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{(1+x^2)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx,\ \alpha>0, \beta>0;$

б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}dx,\quad (a>0).$

8. Довести рівність, використовуючи інтеграли Ейлера

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^6}dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} x^4 e^{-x^6}dx=\frac{\pi}{18}.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^1 x^m\left(1-x^2\right)^n dx.$

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F^{(n)}(x)$, якщо $F(x)=\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt.$

11. Використовуючи рівність $\int\limits_0^1 x^{n-1}dx=\dfrac{1}{n}\ (n>0)$, обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\ln x dx.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t<1, \\ e^{-t}, & t\ge 1 \end{cases} \qquad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$$

Варіант 14.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}} dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}(1+x^3)} dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\ln(1+\sqrt[4]{x})}{e^{\operatorname{tg} x} - 1} dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3 \cos x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx, \ \ y > 0$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x^4 + \alpha^2} dx, \ |\alpha| < \infty$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos \alpha x}{x^\alpha} dx, \ \ 0 < \alpha \le \frac{1}{3}$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^{17}}}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt[3]{\frac{\sin^{19} x}{\cos x}} dx$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1+x)^4} dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}(1+x^2) \ln x} dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x dx, \ \alpha > 0$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x e^x} dx, \ \ (a > 0)$.

8. Довести рівність, використовуючи інтеграли Ейлера

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{\pi}{6}.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int_0^{+\infty} x^{\alpha} \frac{x+2}{x+1}dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$.

11. Користуючись формулою $\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\ (n>0)$, обчислити інтеграл

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x dx,\ m \in N.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t) = \left[\begin{array}{ll} 1, & 0<t\le 1, \\ e^{-t+1}, & t>1 \end{array}\right. \qquad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$$

Варіант 15.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}dx$; б) $1\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{(1-x)^2}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x+2}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2 \sin\left(x^3+y\right)}{100x+y}dx,\ y \geq 0$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon x}-1}{x}dx,\ \alpha \geq 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^{\alpha}}dx,\ \alpha \geq \frac{3}{2}$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{\left(e^{6x}+e^{-6x}\right)^4}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^6}{\sqrt[3]{x\left(1-x^2\right)}}dx$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\ln x}{\left(1+x\right)^2}dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}-x^{\beta}}{(1+x^4)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx dx,\ \alpha > 0, \beta > 0$;

б) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx,\ \ (n \in \mathrm{N},\ a > 0)$.

8. Довести рівність, використовуючи інтеграли Ейлера

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^3}dx \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^3}dx = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}}dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^3\varphi}}$.

11. Попередньо обчисливши $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{ctg}x)}{\operatorname{ctg}x}dx$, знайти $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\pi/2-x}{\operatorname{ctg}x}dx$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=\left[\begin{array}{ll} 1, & 0<t\le 1, \\ e^{-t+1}, & t>1 \end{array}\right. \qquad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$$

Варіант 16.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}dx \ (\alpha>0)$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\ln(1+x)}$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{x+6}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x^p}dx,\ p\ge 1$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{\alpha^2+x^3}}dx,\ |\alpha|<\infty$.

5. Дослідити на неперервність $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}dx, \ \alpha \ge 0$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[8]{x}}{\left(4+x^2\right)^2}dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}\sqrt{2-x}\sqrt[4]{(x+3)^5}}$;

в) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x}{1+x^4}dx$; г) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha - x^\beta}{(1+x^2)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx dx, \ \alpha > 0, \beta > 0$;

б) $\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}dx, \ \ (n \in \mathrm{N}, \ a > 0)$.

8. Довести

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^{x-1}\int_0^1 \left(1 - t^{\frac{1}{n}}\right)^{x-1} dt$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x^n}dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F''(x)$, якщо $F(x) = \int_a^b f(y)(x-y)^2\,dy$.

11. Довести, що функція $y = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax dx$ задовольняє рівняння $y' + ay = 0$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур’є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур’є.

$$\mathrm{f}(t)=e^{-t}\sin t,\quad t\ge 0;\quad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$$

Варіант 17.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\arccos^p x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\sqrt{x}}{e^{\arcsin x}-1}dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(e^x-1)\sqrt{1+x^3}}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt[4]{x}}{x+5}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\alpha x\,dx,\ \alpha\ge 0$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\alpha^2}dx,\ \alpha\ge 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,\alpha x}{x(1+x^2)}dx,\ |\alpha|<1$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{\left(e^{6x}+e^{-6x}\right)^3}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \mathrm{tg}^{2n-1} x dx$;

в) $\int\limits_{0}^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha} \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}-x^{\beta}}{(1+x^3)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx, \alpha > 0, \beta > 0$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

8. Довести

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \int\limits_0^1 y^{n-1}(1-y)^{x-1} dy$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^n} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2+x} dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} f\left(x\alpha, \dfrac{x}{\alpha} \right) dx$.

11. Довести, що функція $y = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xz} \dfrac{dz}{1+z^2}$ задовольняє рівняння $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t) = e^{-t} \sin t, \quad t \geq 0; \quad \mathrm{f}(-t) = -\mathrm{f}(t)$$

Варіант 18.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; б) $\int\limits_0^2 \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_0^2 \sqrt{\dfrac{16+x^4}{16-x^4}}dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\sin(9x)}{x^2+3x+3}dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos\left(1/x^2\right)}{x^2+y^2}dx,\ |y|<\infty$; б) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin\alpha x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}dx,\ |\alpha|<\infty$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2}\cdot\cos\beta x\,dx,\ \alpha>0, \beta - \textit{фіксов.}.$

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^{11}}}{\left(8+x^3\right)^2}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{\sin^3 x}{\left(1+\frac{1}{2}\cos x\right)^4}dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+x)^5}dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^p-x^q}{(1+x^5)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 x^{\alpha}(\ln x)^m dx,\ \alpha>-1,\ m\in N$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}\cos 2bx\,dx,\ \ (n\in\mathrm{N},\ a>0)$.

8. Довести

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty} n^x \frac{(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^n}dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha} dx \int\limits_{x-\alpha}^{\alpha} f\left(x+y+\alpha\right)dy$.

11. Довести, що функція $y=\int\limits_0^{+\infty} e^{-xz}\frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2}$ задовольняє рівняння

$$xy''-2y'+xy=1.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1, \quad t>2,\\ 1, & 1<t<2,\end{cases} \qquad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$$

Варіант 19.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^x}dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt[9]{7+5x^4}}{\sqrt[6]{x^4+1}}dx$; б) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(4-x)}}$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^7 \sin(2x)}{(x^2+x+1)^4} dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x^3+1}} dx,\ |\alpha| < \infty$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^2+\alpha^2} dx,\ \alpha \ge \alpha_0 > 0$.

5. Дослідити на неперервність . $\int\limits_0^{1} \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx,\ 0 < \alpha < 1$

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\left(1+x^2\right)^8} dx$;

б) $\int\limits_0^{3} \sqrt{\frac{3-x}{x}} dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^3} dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{(1+x^3)\ln x} dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx,\ \ (a > 0)$.

8. Довести

$$\frac{\Gamma(x)}{t^x} = \int\limits_0^1 y^{x-1} \mathrm{e}^{-ty} dy,\ x > 0, t > 0.$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F'(\alpha)$, якщо $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2\alpha - x}} dx$.

11. Виходячи з рівності $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$, обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)} dx.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \quad t > 2, \\ 1, & 1 < t < 2, \end{cases} \qquad \mathrm{f}(-t) = -\mathrm{f}(t)$$

Варіант 20.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2(1+x)} dx$; б) $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int_3^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^4+x+1}} dx$; б) $\int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[6]{x^5})}{\sin\sqrt[3]{x}} dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x+2}} dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \alpha x dx, \ \alpha \ge 0$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx, \ \alpha > \alpha_0 > 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\alpha}} dx,\ 0 < \alpha < 1.$

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{\left(e^{2x} + e^{-2x} + 7\right)^{4}} dx;$ б) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3 - \cos\theta}};$

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \ln x}{\left(1 + x^{3}\right)^{2}} dx;$ г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{(1 + x^{2}) \ln x} dx.$

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^{3} \alpha x}{x^{2}} dx;$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^{2} \cos 2ax dx.$

8. За допомогою формули $\frac{\Gamma(x)}{t^{x}} = \int\limits_{0}^{1} y^{x-1} e^{-ty} dy,\ x > 0,\ t > 0$ обчислити

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos bt}{t^{x}} dt,\ x \in (0;1).$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^{\alpha}} dx.$

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}$, якщо

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x - at) + f(x + at)\right] + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} F(z) dz.$$

11. Користуючись формулою $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dy}{1 + x^{2} y^{2}},$ обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}dx.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур’є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур’є.

$$\mathrm{f}(t)=te^{-t}, \quad t\geq 0; \quad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$$

Варіант 21.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_2^4 \frac{1}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx$;

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sin^2 x}dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\ln\cos x}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\sqrt[4]{x}}{3+x\sqrt[3]{x}}dx.$$

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}dx,\ p\geq 0$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx,\ \alpha\geq\alpha_0>0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(\alpha+x)^2}dx,\ |\alpha|<\infty$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^4\right)^2}$; б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x-3}\sqrt[4]{(4-x)(x+2)^5}}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}\ln^2 x}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}(1+x^2)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+a^2\right)}{x^2+b^2}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(ax^2+bx\right)dx,\ \ (a \neq 0)$.

8. За допомогою формули $\frac{\Gamma(x)}{t^x} = \int\limits_{0}^{1} y^{x-1} e^{-ty}\,dy,\ x>0, t>0$ обчислити

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin bt}{t^x}dt,\ x \in (0;2).$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[m]{1+x^n}}$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, якщо

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(z)dz.$$

11. $E(k) = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$. Показати, що $E(k)$ задовольняє рівняння

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$f(t)=te^{-t},\ \ t\ge 0;\quad f(-t)=-f(t)$$

Варіант 22.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin bx\,dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^q}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^p x}\,dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}\,dx,\ \alpha\ge 0, p>0$; б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx,\ \alpha\ge\alpha_0>0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x^p}\,dx,\ p\ge 1$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{32+x^5}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\left(1+\frac{1}{3}\cos x\right)^2}\,dx$;

в) $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}\ln x\,dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{(1+x^3)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^1\frac{\ln\left(1-\alpha x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ |\alpha|<1$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cos 2ax\,dx$.

8. Довести

$$\Gamma(x)\Gamma''(x)-(\Gamma'(x))^2\geq 0,\ \ \forall x>0$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$u(x,y,z)=\int\limits_0^1\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}.$$

11. $J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(n\varphi-\pi\sin\varphi)d\varphi$. Показати, що $J_n(x)$ задовольняє рівняння

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+\left(x^2-n^2\right)J_n(x)=0.$$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=e^{-t}\cos t,\ \ t\geq 0;\quad \mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(t)$$

Варіант 23.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}dx$; б) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^{\alpha}}{\sqrt[3]{1-x^4}}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)dx.$$

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln^{p} x}{x\sqrt{x}}dx,\ 0 \le p \le 10$; б) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x\,dx,\ |\alpha| < \infty$.

5. Дослідити на неперервність $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\alpha x\,dx,\ \alpha \ge 0$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\left(5x^2+3\right)^2}dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sqrt[4]{e^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^{10}}\,dt$:

в) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2\ln x}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}dx$; г) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}-x^{\beta}}{(1+x^6)\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-\alpha^2 x^2\right)}{x\sqrt{1-x^2}}dx,\ |\alpha|<1;$ б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x}dx.$

8. Довести

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x+1}}\Gamma(2x).$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^q}{x^p+1}dx.$

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, якщо

$$u(x,y,z)=\int\limits_0^1 \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}.$$

11. Довести, що функція $y=\int\limits_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^{n-1}e^{xz}dz$ задовольняє диференціальне рівняння $xy''+2ny'-xy=0.$

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=e^{-t}\cos t,\quad t\geq 0;\quad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$$

Варіант 24.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_0^2 \frac{x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{5}}}dx$;   б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos x dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}dx$;   б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}\sqrt[5]{\cos x}}dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{1+x\sqrt{x}}dx.$$

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx,\ \alpha \ge 0$;   б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha}{1+\alpha^2 x^2}dx,\ \alpha \ge \alpha_0 > 0$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x^2+1}}dx,\ |\alpha| < \infty$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{\left(9+x^4\right)^2}dx$;   б) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{(3-x)(x-2)^2}\sqrt[4]{(x+2)^5}}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{\alpha}x \ln\mathrm{tg}\, x dx$;   г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}-x^{\beta}}{(1+x^{5/3})\ln x}dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,\alpha x}{x\left(1+\beta^2 x^2\right)}dx$;   б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2+3x+4\right)e^{-\left(x^2-x+1\right)}dx$.

8. Довести:

$$\int_0^{+\infty} \ln \Gamma(x) dx = \ln \sqrt{2\pi}$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^n} dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $F''_{xy}(x,y)$, якщо $F(x,y) = \int\limits_{x/y}^{xy} (x - yz) f(z)\, dz$.

11. Довести, що функція $y = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xz}}{\left(1+z^2\right)^{n+1}} dz$ задовольняє диференціальне рівняння $xy'' - 2ny' + xy = 1$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t) = \left[\begin{array}{ll} (t-1)^2, & 0 < t \le 1, \\ 0, & t > 1 \end{array}\right. \qquad \mathrm{f}(-t) = \mathrm{f}(t)$$

Варіант 25.

1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність (за означенням)

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; б) $\int\limits_{0,5}^{2} \frac{1}{x \ln x} dx$.

2. Дослідити збіжність інтеграла

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x)} dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x \operatorname{tg} x dx$.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^5 dx$.

4. Дослідити інтеграл на рівномірну збіжність на вказаних проміжках

а) $\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx,\ p \geq p_0 > 0$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha} dx,\ \alpha > 2$.

5. Дослідити на неперервність $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\varepsilon x^4}}{xe^x} dx,\ \alpha > -1$.

6. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\left(8+x^3\right)^2} dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}} dx,\ \alpha > 0, \beta > 0, a > 0$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^\alpha x \ln \cos x dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{(1+x^2)\ln x} dx$.

7. Користуючись властивостями невласних інтегралів, залежних від параметра та класичними невласними інтегралами (Пуассона, Діріхле, Фруллані, Френеля), обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln\left(1+\alpha^2 x^2\right) \operatorname{arctg} \beta x}{x^3} dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin^2 \beta x}{x} dx,\ \ (a > 0)$.

8. Довести:

$$\int\limits_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx = a(\ln a - 1) + \ln \sqrt{2\pi},\ \ a > 0$$

9. Знайти область збіжності інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{\varepsilon x} dx$.

10. Застосовуючи теорему про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, знайти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$u(x,t)=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi .$$

11. Довести, що функція $J_0(x)=2\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)d\theta$ задовольняє диференціальне рівняння $J_0''(x)+\frac{J_0'(x)}{x}+J_0(x)=0$.

12. Дану функцію розкласти в інтеграл Фур'є: а) у дійсній; б) у комплексній формах. Знайти перетворення Фур'є.

$$\mathrm{f}(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 0<t\le 1,\\ 0, & t>1\end{cases}\qquad \mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 2003.
2. *Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П.* Справочное пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл. – К.: Вища шк., 1984.
3. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2000.
4. *Гончаренко Ю.В., Ляшко С.И.* Задачи и упражнения по курсу математического анализа. – "КИЙ", Киев 2001.
5. *Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І.* Математичний аналіз у задачах і прикладах. – "Вища школа", київ 2002.
6. *Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О.* Вища математика. Приклади і задачі. – Видавничий центр "Академія", Київ 2002.
7. *Єфіменко С.В., Кривошея С.А.,* Контрольні завдання з математичного аналізу, -К.: Видавничо=поліграфічний центр "Київський університет", 2002.- 67 с.
8. *Моторна О.В., Трактинская В.М., Парфінович Н.В., Ткаченко М.Є.*, Практикум з математичного аналізу за темами "Числові та функціональні ряди", "Інтеграли, залежні від параметра", Дніпропетровськ, РВВ ДНУ, 2004.

Навчальне видання

КРИВОШЕЯ *Сергій Арсенович*
МОТОРНА *Оксана Віталіївна*
ПРОЩЕНКО *Тетяна Михайлівна*

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДО ТЕМ, ВИНЕСЕНИХ НА САМОСТІЙНУ РОБОТУ «НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА»

ЧАСТИНА 5

Підписано до друку . . . Формат 60x80[16].
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний.
Наклад 50 примірників. Ум. друк. арк. 3

Видавнича лабораторія радіофізичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка