

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Кривошея С.А., Моторна О.В., Проценко Т.М.

**ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДО ТЕМ, ВИНЕСЕНИХ НА
САМОСТІЙНУ РОБОТУ
ЧАСТИНА 4**

Методичний посібник

Київ – 2011

УДК 517

Рецензенти

канд. фіз.-мат. наук Грязнова В.О.

канд. фіз.-мат. наук Зайцева Л.Л.

Кривошея С.А., Моторна О.В., Проценко Т.М.

Індивідуальні завдання з математичного аналізу до тем, винесених на самостійну роботу. Частина 4. Методичний посібник.

Методична розробка містить задачі з математичного аналізу до тем «Числові ряди», «Функціональні послідовності і ряди», «Ряди Фур'є». Здійснено підбір задач до кожної теми, які оформлені у вигляді 25 варіантів.

Затверджено вченою радою радіофізичного факультету № від

УДК 517

© Кривошея С.А., Моторна О.В., Проценко Т.М., 2011

© Видавнича лабораторія радіофізичного факультету
Київського університету імені Тараса Шевченка

I. Знайти суму ряду:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2-1}$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2+5n+4}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{3^n n!}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^3+n^2-n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!n!}{(2n)!}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{2^{n+1}(n+1)!(2n+1)!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{30n^2+12n-35}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^{n-2}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-15}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{2n-1}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{3n-1}}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2+7n-12}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right).$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right).$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n - \sqrt{n^2 + 2n + 1}}{\sqrt{n^2 + 3n + 2}}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2 - 1}}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{a}{2^{n+1}} \sin \frac{3a}{2^{n+1}}.$$

II. Перевірити виконання необхідної умови збіжності ряду:

$$1. \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$$

$$2. \frac{2}{2^3 + 1} + \frac{3}{3^3 + 2} + \frac{4}{4^3 + 3} + \frac{5}{5^3 + 4} + \dots$$

$$3. \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$4. 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

$$5. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{6}{81} + \dots$$

$$6. 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$7. \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots$$

$$8. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$$

$$9. \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots$$

$$10. \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{8} + \dots$$

$$11. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$12. 1,1 + 1,02 + 1,003 + 1,0004 + \dots$$

$$13. 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$$

$$15. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$$

$$16. \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{13}{10^3} + \frac{19}{10^5} + \dots$$

$$17. \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$$

$$18. 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + 3\frac{1}{16} + 3\frac{1}{32} + \dots$$

$$19. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

$$21. \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$$

$$22. \frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \dots$$

$$23. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$$

$$24. \frac{1}{2^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{8^2} + \frac{4}{11^2} + \dots$$

$$25. 0,6 + 0,51 + 0,501 + 0,5001 + \dots$$

III. Дослідити збіжність ряду, користуючись ознаками порівняння:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5^{n-1} + n - 1}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right).$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2+5}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 3)^2}{n^5 + \ln^4 n}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3 + 1}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right).$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n^4\sqrt{n^3}-1)}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}} - 1 \right).$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi}{2n+1}.$$

IV. Дослідити збіжність ряду, користуючись ознакою Даламбера:

$$1. \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \dots$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{5^n n!}$$

$$3. \frac{10}{11} + \left(\frac{10}{11}\right)^2 2^5 + \left(\frac{10}{11}\right)^3 3^5 + \dots$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \dots (5n-4)}$$

$$5. \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 \frac{1}{2^5} + \left(\frac{11}{10}\right)^3 \frac{1}{3^5} + \dots$$

$$6. \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4 \cdot 3^4}} + \dots$$

$$7. 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \dots$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$$

$$9. 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4}{4^4} + \dots$$

$$10. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$$

$$12. 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$$

$$13. \frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000}{3!} + \dots$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$$

$$15. \frac{1!}{2!} + \frac{2!}{4!} + \frac{3!}{6!} + \dots$$

$$16. 1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$18. 1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}.$$

$$21. \frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^2} + \dots$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}.$$

$$23. \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(2n-1)!!}$$

$$25. \frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^2} + \dots$$

V. Дослідити збіжність ряду, користуючись ознакою Коші:

$$1. \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{5n^{2n}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+\dots+n}\right)^n.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2} n}{5^n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n(n-1)} .$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} .$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} .$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{\frac{3}{2}}} .$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8n^6+2n+1}}{5n^2+3n+5} \right)^n .$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2} .$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n-2} \right)^{(2n-1)n} .$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^3} .$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{\frac{n(n+1)}{3}} .$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2+4n+5} .$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}} .$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2}}} .$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{2^n} .$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+1}{5n-3} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{2n}{3}} .$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+2} \right)^n.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}.$$

VI. Користуючись ознаками Раабе, Гауса або інтегральною ознакою, дослідити збіжність ряду:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n-1)!}{(2n-1)!!}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)!!}{2^n n!} \right)^p.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}, a > 0.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n (2n-1)!!}{(2n)!} \right)^\alpha.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}!}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\dots(a+\sqrt{n})}, a > 0$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1} (2n)!!}{(n+1)!(2n+1)!} \right)^\lambda.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!}{3^n n!}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n^5 n!}, p > 0.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(n+1)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-5}}{p(p+1)\dots(p+n)}, p > 0.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\ln(n+2)}}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(n\sqrt{5}+2)}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{((2n)!!)^2}.$$

$$18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3) \ln^2 n}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (4+3n)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \dots (5+3n)}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1) \ln^{\frac{3}{2}}(n+1)}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 \cdot 15 \cdot 20 \dots (10+5n)}{5^n (n+5)!}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1) \ln(n+0,5)}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^2 \ln^2(3n+5)}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p.$$

VII. Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2 nx - 1}{n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n^2+1}{n^3+2}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3nx}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \cdot \ln \frac{n+1}{n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2nx \cdot \ln \frac{n^2+3}{n^2+1}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{2\sqrt{n-1}}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln(n+1)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n+1}}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos^2 nx - 1}{n}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n^5+1}{n^5+n+1}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4 \sqrt[4]{2n+3}}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt[10]{2n}}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \frac{\ln n}{n}.$$

VIII. Визначити область збіжності (абсолютної та умовної) функціонального ряду

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2x)^{n+1}}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} \left(\frac{3-x}{3+x} \right)^n.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n^3}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{1+x^{4n}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(x+1)(x+2n)}{2n} \right)^n.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \left(\frac{x}{3} \right)^n.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{x-3}{4} \right)^n.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(2n)!!} x^n.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} \left(\frac{x+1}{x} \right)^n.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{x+3}{x} \right)^n.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{e^{nx}-1}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} (\ln x)^n.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} + 1 \right)^b x^n.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(1+2x)(1+(2x)^{3n}) \dots (1+(2x)^{2n-1})}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n+1)x)}{e^{(n+1)x}}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx}-1}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \cos x}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(2x+1)(2x+2)\dots(2x+n)}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} (3 \operatorname{tg}^2 x)^n.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x} \right)^n.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg}^n x}{n^2}.$$

IX. Дослідити на рівномірну збіжність функціональну послідовність

$$1. f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{n} \right\} \end{cases}.$$

$$2. f_n(x) = (2x)^n, \quad x \in [0; 0,5],$$

$$3. f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, n], \\ 1, & x \geq n \end{cases}.$$

$$4. f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$5. f_n(x) = \frac{2x}{n} \cdot \sin \frac{n^2}{x^2}, \quad x \in [1, +\infty).$$

$$6. f_n(x) = e^{-x^2 n}, \quad x \in [0, 1].$$

$$7. f_n(x) = \frac{1}{1 + (nx - 1)^2}, \quad x \in [0, 1].$$

$$8. f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (nx - 1)^2}, \quad x \in [0, 1]$$

$$9. f_n(x) = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$10. f_n(x) = x(1 - x)^n, \quad x \in [0, 1].$$

$$11. f_n(x) = x^n - x^{2n}, x \in [0, 1].$$

$$12. f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2, x \in [0, 1].$$

$$13. f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^2}, x \in \mathbf{R}.$$

$$14. f_n(x) = \frac{n^3 x}{1 + n^4 x}, x \in [0, 1].$$

$$15. f_n(x) = \frac{1}{(n+1)x}, x \in [0, 1].$$

$$16. f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}, x \in [0, 1].$$

$$17. f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}, x \in [0, 1].$$

$$18. f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(xn)}{n+1}, x \in [0, 1].$$

$$19. f_n(x) = \frac{1}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}, x \in [1, +\infty).$$

$$20. f_n(x) = \frac{1}{x} \left(e^{\frac{x}{n}} - 1 \right), x \in (0, +\infty).$$

$$21. f_n(x) = \frac{x^2 + n^2 + nx}{n^2 + x^2}, x \in [0, 1].$$

$$22. f_n(x) = nx^n(1-x), x \in [0, 1].$$

$$23. f_n(x) = n \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^\alpha - 1 \right), x \in [0, 1].$$

$$24. f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n^2} \right), [-1, 1]$$

$$25. f_n(x) = n \left(\sin \left(x + \frac{1}{n} \right) - \sin x \right), x \in \mathbf{R}.$$

X. Користуючись ознакою Вейєрштрасса, дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^{\frac{3}{2}} x^2}, x \in \mathbf{R}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{\sqrt[5]{n^6 + x^4}}, x \in \mathbf{R}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n\sqrt[3]{n}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(\pi nx), \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n\sqrt{n+x}}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}, \quad -1 \leq x \leq 3.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}}, \quad -3 \leq x \leq -1.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^3 (2x)^{2n}}{x^2+3x+4}, \quad -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{arctg}(2n^2 x)}{\sqrt[3]{n^4+n+x}}, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cdot \sin \frac{1}{nx}}{4 + \ln^2(nx)}, \quad 2 \leq x < +\infty$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2 x}, \quad 0 < \delta \leq x < +\infty.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4+n^3 x^2}, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^3}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln(1+nx)}{x^n}, \quad 1+\alpha \leq x < +\infty, \alpha > 0.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2 \sin x}{(n+1)(1+n^5 x^4)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+n} \right)^3, \quad x \notin [0, +\infty)$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{1+n^2 x}, \quad x \in [0, +\infty).$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+n^8 x^3}, \quad x \in [0, +\infty).$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cdot \sin \frac{1}{nx}}{x^2 + \ln^3(n+1)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^6 x^2} \sin nx, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^3}, \quad x \in [0, +\infty).$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{nx} \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right), \quad x \in (0, +\infty).$$

XI. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого (узагальненого степеневого) ряду. Дослідити збіжність ряду в кінцевих точках інтервалу збіжності:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3 \sqrt{n}}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(3n+4)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+5} \right)^n (x+1)^n.$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (5n+1)}{3n^2+4} x^{2n+1}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x-2)^n.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{2n+1}{2n-1}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!} (x-1)^n.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} (x+1)^n.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n x}{3^n (n+1)}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^n.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^n .$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{n} \right)^n 3^{-\frac{n}{x^2}} .$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n} .$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{5}{n} \right)^n 3^{-\frac{n}{x^2}} .$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{n \sin x}} .$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(1+x)} .$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{x}} \cdot \left(3 + \frac{1}{n} \right)^n .$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n 6^n} .$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-2}}{(2n^2-5n)4^n} .$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} (x+1)^{2n+1} .$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+5) \ln(n+5)} .$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n (x+1)^n} .$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-1)^n}{(n^4+1)^2} .$$

ХІІ. Розкласти функцію в степеневий ряд та вказати область, в якій цей розклад має місце:

а) по степеням x :

$$1. \frac{9}{20-x-x^2} .$$

$$2. \ln(1-x-6x^2) .$$

3. $\frac{6}{8+2x-x^2}$.

5. $\frac{5}{6+x-x^2}$.

7. $\frac{x+2}{2x^2-5x+2}$.

9. $\frac{x^2-3x+1}{x-5x+6}$.

11. $(3-e^{-x})^2$.

13. $\frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$.

15. $\frac{x^2}{\sqrt{4-3x}}$.

17. $\frac{3}{2-x-x^2}$.

19. $\frac{x}{(1-x)^2(4-x)}$.

21. $\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$.

23. $x\sqrt[3]{27-2x}$.

4. $\ln(1-x-12x^2)$.

6. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

8. $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

10. $\frac{x}{(1-x)(1+v^2)}$.

12. $\sin^4 x$.

14. $(x-1)\sin 5x$.

16. $\ln(1+x-12x^2)$.

18. $\frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}$.

20. $\ln(x^2+3x+2)$.

22. $\frac{6}{6-x-x^2}$.

24. $\cos^3 x$.

25. $\sqrt[5]{32-5x}$.

б) по степеням двочлена $(x - x_0)$:

1. $(x+1)e^x, x_0 = 1$

2. $\frac{e^x}{x}, x_0 = 1$

3. $\frac{(x+1)}{x}, x_0 = 1$

4. $\frac{\ln x}{x}, x_0 = 1$

5. $x \ln(x-1), x_0 = 1$

6. $\frac{\cos x}{x}, x_0 = 1$

7. $\ln(4+3x-x^2), x_0 = 2$

8. $\sin^2 x, x_0 = \frac{\pi}{4}$

9. $\frac{1}{(x^2-6x+18)^2}, x_0 = 3$

10. $\frac{1}{x^2-5x+6}, x_0 = 1$

11. $(x+1)\cos^2 x, x_0 = -1$

12. $\ln(x^2+2x+2), x_0 = -1$

13. $\ln(x^2-4x+6), x_0 = -2$

14. $\cos^4 x, x_0 = -\frac{\pi}{2}$

15. $\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}}, x_0 = 5$

16. $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}, x_0 = 2$

17. $\sin^3 x, x_0 = \frac{\pi}{4}$

18. $\ln(x^2-9x+20), x_0 = 3$

19. $\ln(x^2-10x+30), x_0 = 5$

20. $\sin^4 x, x_0 = -\frac{\pi}{2}$

21. $\ln x, x_0 = 4$

22. $3^x, x_0 = 2$

23. \sqrt{x} , $x_0 = 4$

24. $\frac{1}{x^2+2x+5}$, $x_0 = -1$

25. $\cos^3 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

ХІІІ. Розклавши попередньо похідні, шляхом почленного інтегрування знайти розклад в степеневий ряд даної функції. Вказати інтервал збіжності.

1. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

2. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{x+6}$.

3. $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$.

4. $f(x) = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$.

5. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

6. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

8. $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

9. $f(x) = \arccos(1-4x^4)$.

10. $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1-x}) - \sqrt{1-x}$.

11. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

12. $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+4}) - \sqrt{x^2+4}$.

13. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$.

14. $f(x) = \arccos(1-2x^2)$.

15. $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ 16. $f(x) = x \arccos \frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$.
17. $f(x) = 2x \operatorname{arctg} 2x - \ln(1+x^2)$. 18. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3}$.
19. $f(x) = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$. 20. $f(x) = \frac{1}{8} \arccos \frac{4x^2}{\sqrt{1+16x^4}}$.
21. $f(x) = \arccos \frac{2x^4}{1+x^8}$. 22. $f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$.
23. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{16-x^4}{8x^2}$. 24. $f(x) = \arcsin x^k, k > 1$.
25. $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$.

XIV. Розкласти в степеневий ряд функцію:

1. $\int_0^x e^{-t^4} dt$.
2. $\int_0^x \frac{\sin 2t}{t} dt$.
3. $\int_0^x t^2 \operatorname{sh} t dt$.
4. $\int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt$.
5. $\int_0^x \frac{\ln(1+4t)}{t} dt$.
6. $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

7. $\int_0^x \frac{\arcsin t}{t} dt.$

8. $\int_0^x \ln \frac{1+t}{1-t} dt.$

9. $\int_0^x \frac{1}{1-t^9} dt.$

10. $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt.$

11. $\int_0^x \sqrt{1+t^3} dt.$

12. $\int_0^x \sqrt{1-t^4} dt.$

13. $\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt.$

14. $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt.$

15. $\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt.$

16. $\int_0^x \frac{1-e^t}{t} dt.$

17. $\int_0^x \frac{\ln(1+\sqrt{1+t^2})}{t} dt.$

18. $\int_0^x \frac{1-\cos t^2}{t^4} dt.$

19. $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$

20. $\int_0^x \frac{\ln(1+2t^2)}{t} dt.$

21. $\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} dt.$

22. $\int_0^x \frac{1}{1-t^8} dt.$

23. $\int_0^x \frac{\sin t^3}{t} dt.$

24. $\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt.$

25. $\int_0^x \sqrt{1-t^3} dt.$

XV. Знайти суму ряду, застосовуючи почленне диференціювання або інтегрування :

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n .$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} .$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}, x \geq 0 .$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{(2n)!} x^{2n} .$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n .$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2-1}{(2n)!} x^{2n} .$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(n+1)x^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)x^n .$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)x^{3n}}{n!} .$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n+1)} .$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} .$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)(2n+1)} .$$

$$13. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{4n+1}}{(4n+1)} .$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)} .$$

$$15. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1} .$$

$$16. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n .$$

$$17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)(n+2)} .$$

$$18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^4}{(n+1)!} x^n .$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n .$$

$$20. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)} .$$

$$21. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{n!} .$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n .$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{3^n} .$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n .$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} .$$

XVI. Користуючись розкладом функції в ряд Тейлора, обчислити границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - x}{\operatorname{tg}^3 x} .$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)} .$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-2x} - x}{x^2 \operatorname{tg} x - e^{-x^2} + 1} .$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\operatorname{tg} x} - \sin^2 x - x}{x + x^3 - \operatorname{tg} x} .$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2} \right) .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\operatorname{arcsin} x - \sin x} .$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x-\frac{9}{2}x^2}}{x^3}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \sin x + \ln \cos x - 1}{\sqrt[3]{1-x^3} - 1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+\sin x} + \ln(1-x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + \ln(1-x) - 1}{2 - \sqrt{4+x^2}}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - x \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}x^2}{x \cos x - \sin x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{2x} + \ln(1-x^2)}{x \cos x - \sin x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1-x^2} - \cos x \ln(1+x)}{\ln \sin x - \ln x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x \cdot \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arcsin} x} \right).$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - e^{x^{\frac{2}{3}}}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2 \cos x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x - x e^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{tg} x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt{x^5 - x^4} \right).$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x + 3 \cos x - 3\sqrt[3]{1+x}}{1 + \ln(1+x) - e^x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - \ln(1+x^2) - \operatorname{arcsin} x^3}{x \sin x - x^2}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{x + \operatorname{tg} x - \sin 2x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8-x^4} - 2}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) - 2 \sin x + 2x \cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - x^2 + \frac{1}{2}x \right).$$

XVII. Користуючись відповідними розкладами, обчислити із точністю до 10^{-4} :

$$1. \cos 1^\circ.$$

$$2. \sin 1^\circ.$$

$$3. \cos 10^\circ.$$

$$4. \sin 10^\circ.$$

$$5. \arcsin \frac{1}{3}.$$

$$6. \ln(1,2).$$

$$7. \sqrt[3]{130}.$$

$$8. \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$9. \operatorname{tg} 9^\circ.$$

$$10. \sqrt[3]{500}.$$

$$11. \sqrt[10]{1027}.$$

$$12. \sqrt[3]{68}.$$

13. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

14. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

15. $\cos 5^\circ$.

16. $\operatorname{arctg}(1,1)$.

17. $\sqrt[4]{83}$.

18. $\sqrt[3]{1,015}$.

19. $\sqrt[5]{250}$.

20. $\sqrt[3]{70}$.

21. $\cos 72^\circ$.

22. $\ln(1,3)$.

23. $\sin 72^\circ$.

24. $\sin 9^\circ$.

25. $\cos 9^\circ$.

XVII. Користуючись розкладом підінтегральної функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001:

1. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

2. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

3. $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

4. $\int_0^1 \sin x^2 dx$.

5. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

6. $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$.

$$7. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx .$$

$$8. \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx .$$

$$9. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx .$$

$$10. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx .$$

$$11. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx .$$

$$12. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx .$$

$$13. \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx .$$

$$14. \int_0^1 \sqrt[4]{1+x^3} dx .$$

$$15. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx .$$

$$16. \int_0^1 \sqrt[4]{x} e^x dx .$$

$$17. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx .$$

$$18. \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{x} dx .$$

$$19. \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx .$$

$$20. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx .$$

$$21. \int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x}) dx .$$

$$22. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \sin x dx .$$

$$23. \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx .$$

$$24. \int_1^{\frac{3}{2}} x^x dx .$$

$$25. \int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx .$$

XIX. Розкласти функцію в ряд Фур'є. Побудувати графік функції та графік суми ряду Фур'є:

1. а) $f(x) = x^2, x \in (-\pi, \pi]$; б) $f(x) = x + 1, x \in (0, \pi)$
по синусам;

в) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1; \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$.
по косинусам;

2. а) $f(x) = 2x + 1, x \in (-\pi, \pi]$; б) $f(x) = x + \pi, x \in (0, \pi)$,
по косинусам;

в) $f(x) = e^x, x \in (-1, 1)$; г) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 1; \\ x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$
по синусам.

3. а) $f(x) = x + 1, x \in (-\pi, \pi]$; б) $f(x) = |x|, x \in (-2, 2)$;

$$в) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} .$$

по косинусам;

$$г) f(x) = 3x, \quad x \in (0, 1)$$

по синусам.

4. а) $f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi];$

б) $f(x) = 5x, \quad x \in (0, \pi)$
по косинусам;

$$в) f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1; \\ 2x, & 1 \leq x \leq \pi \end{cases} .$$

по синусам;

$$г) f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -1 < x \leq 0; \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases} .$$

5. а) $f(x) = 2x, \quad x \in (-1, 1];$

б) $f(x) = x+3, \quad x \in (0, 3]$
по синусам;

в) $f(x) = 1-x, \quad 0 < x < \pi$
по косинусам;

$$г) f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

6. а) $f(x) = x^2 + 1, \quad x \in (-\pi, \pi);$

б) $f(x) = \frac{\pi}{8}(\pi - x), \quad x \in [0, \pi],$
по синусам;

$$в) f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases} .$$

по косинусам;

$$г) f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & |x|=1; \end{cases} .$$

7. а) $f(x) = 2x + 1, x \in (-1, 1)$; б) $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$
по косинусам;
- в) $f(x) = x + 1, x \in (0, \pi]$
по синусам; г) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0; \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.
8. а) $f(x) = x, x \in (-3, 3)$; б) $f(x) = \frac{x}{2}, x \in (0, \pi)$
по синусам;
- в) $f(x) = x^2, x \in (0, 1)$
по косинусам; г) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -\pi < x < 0; \\ 2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.
9. а) $f(x) = 3x - 1, x \in (-\pi, \pi)$; б) $f(x) = 5x + 1, x \in (-3, 3)$;
- в) $f(x) = x^2 + 1, x \in (0, \pi]$.
по косинусам; г) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1; \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
по синусам.
10. а) $f(x) = x^2, x \in [0, 3]$
по синусам; б) $f(x) = x^2 + 1, x \in (0, \pi)$,
по косинусам;
- в) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$; г) $f(x) = \begin{cases} 2x, & -2 < x \leq 0; \\ 0, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$.

11. а) $f(x) = x^2 - x, x \in (-\pi, \pi)$; б) $f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}, x \in (0, \pi]$
по синусам;

в) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < \frac{\pi}{4}; \\ x^2, & \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0; \\ 1 - x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$
по косинусам;

12. а) $f(x) = |x|, x \in (-1, 1)$; б) $f(x) = 2x^2 + 1, x \in [0, 2)$
по синусам;

в) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ г) $f(x) = x + 5, x \in [-\pi, \pi)$.
по косинусам;

13. а) $f(x) = |x| + 2, x \in (-2, 0]$ б) $f(x) = e^x, x \in [0, \pi]$,
по косинусам; по синусам;

в) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0; \\ 1 - x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$; г) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0; \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$.

14. а) $f(x) = e^{x+1}, x \in (-2, 0]$; б) $f(x) = 2x - 1, x \in (0, 1)$,
по синусам;

в) $f(x) = 4x, x \in [0, \pi]$
по косинусам;

г) $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x \leq 0; \\ \pi, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

15. а) $f(x) = x^2 - 1, x \in (-1, 0]$; б) $f(x) = 3 - x, x \in (0, 1)$,
по синусам;

в) $f(x) = x^2 - x, x \in [0, \pi)$
по косинусам;

г) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi < x \leq 0; \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$

16. а) $f(x) = 4 + 2x, x \in (-\pi, \pi]$;

б) $f(x) = \frac{x + \pi}{2}, x \in (0, \pi)$
по синусам;

в) $f(x) = e^{-x}$
по косинусам;

г) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0; \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

17. а) $f(x) = \frac{3x - 1}{2}, x \in (-\pi, \pi]$;

б) $f(x) = 2x + 1, x \in (0, 1)$
по синусам;

в) $f(x) = e^x, [0, \pi]$
по косинусам;

г) $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

18. а) $f(x) = |x + 1|, x \in (-\pi, \pi]$; б) $f(x) = e^{-2x}, x \in (0, 1)$
по синусам;

в) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$
по косинусам;

г) $f(x) = \begin{cases} -2, & -4 < x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 4 \end{cases}$

19. а) $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2, x \in (0,2);$

в) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1; \\ 3-x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$
по косинусам;

б) $f(x) = \cos x + 1, x \in (0, \pi)$
по косинусам;

г) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

20. а) $f(x) = 1 - \frac{x}{2}, x \in (0,1];$

в) $f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x \leq 2; \\ 3x, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$
по косинусам;

б) $f(x) = x \sin x, x \in (0, \pi)$
по синусам;

г) $f(x) = \arcsin(\cos x).$

21. а) $f(x) = x + 2, x \in (-1,2];$

в) $f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x \leq 0; \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

б) $f(x) = 2x + \pi, x \in (0, \pi)$
по синусам;

г) $f(x) = x + \pi, x \in (0, \pi)$
по косинусам;

22. а) $f(x) = |2x - 1|, x \in (-1,1);$

в) $f(x) = \pi - x, x \in (0, \pi)$
по косинусам;

б) $f(x) = 3 - x, x \in (0,2)$
по синусам;

г) $f(x) = x \cos x, x \in (0, \pi).$

23. а) $f(x) = \sin^2 x;$

б) $f(x) = (x-1)^2, x \in (0, \pi)$
по синусам;

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} -2, & 0 < x \leq 1; \\ 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

по косинусам;

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} -2x, & -2 < x \leq 0; \\ 2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}.$$

$$24. \text{ а) } f(x) = 6x, \quad x \in (-1, 2];$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x}{2} + 1, \quad x \in (0, 1)$$

по синусам;

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} -x, & 0 < x \leq 1; \\ 2+x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

по косинусам;

$$\text{г) } f(x) = |x+3|, \quad x \in (-4, -1).$$

$$25. \text{ а) } f(x) = |2x|, \quad x \in (-1, 2];$$

$$\text{б) } f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in (0, \pi)$$

по синусам;

$$\text{в) } f(x) = x - 2\pi, \quad x \in (0, \pi)$$

по косинусам;

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} \nu - 1, & -1 < x \leq 0; \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 2003.
2. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл. – К.: Вища шк., 1984.
3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2000.
4. Гончаренко Ю.В., Ляшко С.И. Задачи и упражнения по курсу математического анализа. – “КІЙ”, Киев 2001.
5. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. – “Вища школа”, кїїв 2002.
6. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі. – Видавничий центр “Академія”, Київ 2002.
7. Крутицкая С.С., Волкова Н.И., Яковлева Е.Н., Половина Н.Т., Сергиенко Л.И., Лабораторные работы по теме “Дифференциальное исчисление функции одной переменной”, - Днепропетровск, 1987.
8. Бойцун Л.Г., Гришин В.Б., Рыбникова Т.И., Задания для самостоятельной работы студентов по теме “Предел и непрерывность функции”, - Днепропетровск, 1989.
9. Моторна О.В., Поляков О.В., Трактинская В.М., Завдання для індивідуальної роботи за темою “Порівняння функцій”.

Навчальне видання

КРИВОШЕЯ Сергій Арсенович
МОТОРНА Оксана Віталіївна
ПРОЩЕНКО Тетяна Михайлівна

**ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДО ТЕМ, ВИНЕСЕНИХ НА
САМОСТІЙНУ РОБОТУ
ЧАСТИНА 4**

Підписано до друку Формат 60x80¹⁶.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний.
Наклад 50 примірників. Ум. друк. арк. 2,5.

Видавнича лабораторія радіофізичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка