

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем



**САМОСТІЙНА РОБОТА СТУДЕНТІВ З КУРСУ
«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА
СТАТИСТИКА»**

Київ – 2014

УДК 519.22.35(075.8)
ББК 22.172я73

Рецензенти:

канд. фіз.-мат. наук, доц. Єфіменко С.В.,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Шевченко Г.М.

Іваненко Д.О., Сугакова О.В.

Самостійна робота студентів з курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика» : Навчальний посібник

Посібник можна використовувати як задачник при вивченні курсу „Теорія ймовірностей і математична статистика»” студентами 2 курсу факультету радіофізики, електроніки і комп’ютерних систем напрямку «Комп’ютерна інженерія», а також напрямку «Прикладна фізика». Він містить численні задачі з цього курсу для самостійного розв’язуванн і індивідуальні домашні завдання, кожне з яких складається з 25 варіантів задач. На початку розділів наведені теоретичні відомості, необхідні для виконання завдань. Містить розбір типових прикладів.

*Затверджено вченою радою факультету радіофізики,
електроніки і комп’ютерних систем
(протокол №3 від 13 жовтня 2014 року)*

УДК 519.22.35(075.8)
ББК 22.172я73

© Іваненко Д.О., Сугакова О.В., 2014
© Видавнича лабораторія факультету
радіофізики, електроніки і комп’ютерних систем
Київського університету імені Тараса Шевченка

ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

1. Комбінаторика

Основний принцип комбінаторики (Правило множення).

Нехай треба виконати одне за одним k дій. Першу дію можна виконати n_1 способами, другу - n_2 способами, третю - n_3 і т. д., k -ту дію можна виконати n_k способами. Тоді всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ способами.

Приклад 1.1. В кафе подають 4 перших страви, 5 других і 3 види десертів. Скількома способами можна скласти з цих страв повноцінний обід?

Розв'язок. Нам треба виконати три дії: вибрати першу страву, другу та десерт. За правилом множення перемножуємо можливості: $4 \times 5 \times 3 = 60$.

Δ Довільна k -елементна підмножина множини з n елементів називається **комбінацією(сполукою)** з n елементів по k . Комбінація є неупорядкованою множиною. Число можливих комбінацій з n елементів по k :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад 1.2. Скількома способами з 10-ти студентів можна скласти підгрупу, що складається з 5-ти осіб?

Розв'язок. Число можливих підгруп дорівнює числу всіх п'ятиелементних підмножин множини з 10-ти елементів, тобто $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = 252$.

Δ **Перестановкою** називають впорядковану множини з n елементів. Число можливих перестановок з n елементів:

$$P_n = n!.$$

Приклад 1.3. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4, якщо кожна цифра входить в зображення числа лише один раз?

Розв'язок. Таких чотиризначних чисел буде стільки, скільки існує різних перестановок з 4-х елементів, тобто $P_n = 4! = 24$.

Δ **Розміщенням з n елементів по k** називають впорядковану k -елементну підмножину множини з n елементів. В розміщенні порядок елементів є суттєвим. Число можливих розміщень з n елементів по k :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад 1.4. В класі вивчають 10 предметів. В понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

Розв'язок. Число різних розкладів на понеділок існує стільки, скільки існує різних впорядкованих 6-елементних підмножин множини з 10-ти елементів, тобто скільки існує розміщень з 10-ти по 6. $A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = 151\,200$.

Розбиття множини на підмножини (перестановки з повтореннями)

Нехай Ω – множина з n елементів. Нам треба представити множину Ω у вигляді: $\Omega = \bigcup_{i=1}^m B_i$; $B_i \cap B_j = \emptyset$; $i \neq j$, де кожна множина B_i містить k_i елементів і $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Число способів, яким n -елементну множину Ω можна подати у вигляді об'єднання m множин B_i , що не перетинаються і мають відповідно k_1, k_2, \dots, k_m елементів, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Приклад 1.5. Скількома способами можна розселити 8 студентів по 3 кімнатах: одномісній, трьохмісній, чотирьохмісній?

Розв'язок. Нам треба розбити множину з 8 студентів на 3 підмножини: одноелементну, трьохелементну і чотирьохелементну: $C_8(1,3,4) = \frac{8!}{1!3!4!} = 280$.

Розміщення розрізних частинок по комірках.

Модель Максвелла-Больцмана

Припустимо, що n розрізних частинок розподіляються по m комірках. Число всіх розміщень частинок по комірках дорівнює m^n . Число розміщень n частинок по m комірках, коли в 1-й комірці знаходиться k_1 частинок; в 2-й - k_2 частинок, ..., в m -тій - k_m частинок (тут $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$) дорівнює $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$.

Комбінації з повтореннями

Δ **Комбінаціями з m елементів по n з повтореннями** називаються групи, які містять по n елементів, причому кожний елемент належить одному з m типів.

Число різних комбінацій з m елементів по n з повтореннями є $f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n$.

Приклад 1.6. Скільки існує різних кісток доміно?

Розв'язок. Кожну кістку доміно можна розглядати як комбінацію з 7 елементів по 2 з повтореннями. Тому що кістка визначається двома цифрами, кожна цифра вибирається з 7 можливих – 0,1,2,3,4,5,6; також можливі повторення, бо в доміно бувають дублі. Отже, $f_7^2 = C_8^6 = \frac{8!}{6!2!} = 28$.

Розміщення нерозрізнених частинок по комірках.

Модель Бозе-Ейнштейна

Припустимо, що n нерозрізнених частинок розподіляються по m комірках. Тоді число всіх можливих розташувань дорівнює $f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n$. Число розміщень, при яких в кожній комірці є хоча б одна частинка, є C_{n-1}^{m-1} .

Задачі

- 1.1. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4,5 ?
- 1.2. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,4, якщо кожна з цифр використовувати не більше одного разу?
- 1.3. Скільки існує п'ятизначних чисел, які діляться на 5?
- 1.4. В селі живуть 1500 жителів. Довести, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.
- 1.5. Скільки діагоналей має опуклий n -кутник?
- 1.6. Скількома способами з 30-ти студентів можна вибрати делегацію, що складається з 3-х осіб?
- 1.7. Скільки існує чотиризначних чисел, в яких кожна наступна цифра а) більша за попередню? б) менша за попередню?
- 1.8. Скільки різних кісток доміно можна утворити, використовуючи числа 1,2,3,...,n ?
- 1.9. Скількома способами можуть розміститись 5 покупців в черзі в касу?
- 1.10. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,3, \dots, n\}$ так, щоб числа 1,2,3 стояли поряд в порядку зростання?
- 1.11. У розіграшу першості країни з футболу приймає участь 10 команд. Команди, які займуть перше, друге і третє місце, нагороджуються відповідно золотою, срібною і бронзовою медалями. Команди, які займуть останні два місця, покинуть вищу лігу. Скільки різних результатів першості може бути?
- 1.12. Скількома різними способами можна розташувати 11 ящиків по 7 поверхах?
- 1.13. Кожна з n різних частинок потрапляє в один з N лічильників. Знайти ймовірність того, що перший лічильник зареєструє k частинок, другий – j .

- 1.14. Скільки кісток доміно можна скласти, використовуючи цифри 0,1,2,3,4,5,6?
- 1.15. З колоди, яка налічує 52 карти, вибрали 10 карт. У скількох випадках серед цих карт є а) хоча б один туз; б) рівно один туз; в) не менше двох тузів; г) рівно два тузи?
- 1.16. Скількома способами можна розділити колоду з 52 карт навпіл так, щоб в кожній частині було по 2 тузи?
- 1.17. Скількома способами можна розділити n однакових цукерок серед m дітей? Скільки серед них способів, коли кожна дитина отримає хоча б одну цукерку?
- 1.18. Довести, що кількість способів, якими двоє людей можуть розділити порівну $2n$ предметів першого типу, $2n$ предметів другого і $2n$ предметів третього типу становить $3n^2 + 3n + 1$.
- 1.19. Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_n = N$? Скільки цілих додатних розв'язків має це рівняння?
- 1.20. Скільки слів можна скласти, переставляючи літери слова «математика»?
- 1.21. В хокейному клубі 8 нападаючих, 5 захисників і 2 воротаря. Скільки різних варіантів команди може створити тренер, якщо на лід виходять воротар, 2 захисника і трійка нападаючих?
- 1.22. На полиці стоять 7 книг різних авторів і трьохтомник одного автора. Скількома способами можна розставити ці книги на полиці так, щоб книги одного автора стояли поряд?
- 1.23. Скількома способами можна розсадити n чоловік за круглим столом?
- 1.24. Довести формулу Бінома Ньютона $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$; $n \in N$.
- 1.25. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ так, щоб кожне число, кратне 2, і кожне число, кратне 3, мали номери, кратні 2 і 3 відповідно?
- 1.26. Скількома способами можна розділити $a + b + c$ різних предметів на три групи так, щоб у першій групі було a , в другій - b , і в третій - c предметів?

2. Стохастичний експеримент, простір елементарних подій, операції над подіями.

Під **стохастичним експериментом (випробуванням)** розуміємо експеримент, результат якого неможливо передбачити заздалегідь, але який можна повторити багато разів. Нехай в результаті випробування відбувається одна і тільки одна з подій $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$. Події ω_i називають **елементарними наслідками (елементарними подіями)**.

Δ Множина всіх елементарних подій, які можуть з'явитись у стохастичному експерименті, називається **простором елементарних подій Ω** .

Δ **Випадкові події** – підмножини простору елементарних подій.

Приклад 2.1. Один раз підкидають гральний кубик, фіксується кількість очок, що випало. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. А-подія, яка полягає в тому, що кількість очок, що випало, ділиться на 3. Тоді $A = \{3,6\}$; $A \subset \Omega$.

Операції над випадковими подіями

(аналогічні операціям над множинами).

Позначення	Теорія множин	Теорія ймовірностей
Ω	Ω - універсальна множина.	Ω - простір елементарних подій (достовірна подія).
\emptyset	Порожня множина.	Неможлива подія.
$A \subset \Omega$	A - підмножина Ω .	A - випадкова подія.
$A \subset B$	A - підмножина B .	З події A випливає подія B .
$A \cup B$	Об'єднання множин A і B .	Подія, яка полягає в тому, що відбудеться хоча б одна з подій A , B .
$A \cap B$	Перетин множин A і B .	Подія, яка полягає в тому, що відбудеться і подія A , і подія B .
$A \cap B = \emptyset$	Множини A і B не перетинаються.	Події A і B несумісні.
$A \setminus B$	Різниця множин A і B .	Подія, яка полягає в тому, що відбудеться A , але B не відбудеться.
$\bar{A} = \Omega \setminus A$	Доповнення до множини A .	Подія, протилежна A . Подія, яка полягає в тому, що A не відбудеться.

Задачі

2.1. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – один раз з'явиться герб, B – при другому підкиданні з'явиться герб. Описати події: $A \cap B$, $A \cup \bar{B}$, \bar{A} .

2.2. Нехай A, B, C – довільні події. Виразити через них наступні події – з цих трьох подій:

$$A_1 = \{\text{Відбулась лише } A\};$$

$A_2 = \{\text{Відбулись } A \text{ і } B, \text{ але } C \text{ не відбулось}\};$

$A_3 = \{\text{Відбулись всі три події}\};$

$A_4 = \{\text{Відбулась хоча б одна з подій}\};$

$A_5 = \{\text{Відбулись хоча б дві події}\};$

$A_6 = \{\text{Відбулась одна і тільки одна з подій}\};$

$A_7 = \{\text{Відбулись дві і тільки дві з подій}\};$

$A_8 = \{\text{Жодна подія не відбулась}\};$

$A_9 = \{\text{Відбулось не більше двох подій}\}.$

2.3. Спростити вирази:

а) $(A \cup B) \cup (A \cup \bar{B})$;

б) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$;

в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

2.4. З урни, в якій міститься 5 куль (3 білих і 2 чорних) послідовно дістаємо 2 кулі. Розглянемо події $A = \{\text{Перша куля біла}\}$, $B = \{\text{Обидві кулі білі}\}$, $C = \{\text{Обидві кулі різного кольору}\}$. Чому дорівнюють $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \setminus C$, $A \cap C$?

2.5. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Позначимо події: A - сума очок, що з'явилося, дорівнює 8; B - хоча б один раз випало 6 очок. Описати події: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; \bar{B} .

2.6. Об'єднання $A \cup B$ двох подій можна виразити як об'єднання двох несумісних $A \cup B = A \cup (B \setminus A \cap B)$. Виразити аналогічним чином об'єднання трьох подій.

3. Геометричні ймовірності.

Нехай $\Omega = D$ – деяка область на площині або в просторі. D квадратна, тобто має площу або об'єм. Випадкові події – ті підмножини Ω , які теж мають площу або об'єм: $A \subset \Omega$.

$$\Delta \quad P(A) = \frac{\text{mes}(A)}{\text{mes}(\Omega)}.$$

$\text{mes}(\cdot)$ означає «міра», тобто площа або об'єм. Аналогічне означення існує для випадку, коли $\Omega \subset R$, тоді під мірою розуміємо довжину.

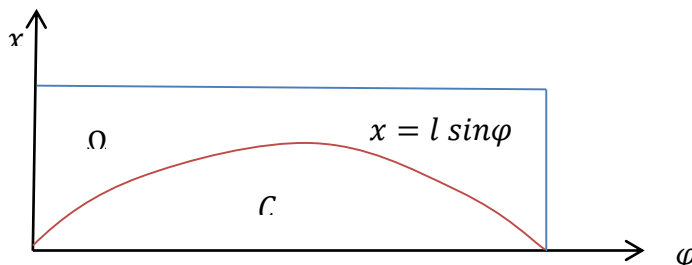
Приклад 3.1. Задача Бюффона. Площина покрита сіткою паралельних прямих, відстань між якими дорівнює $2a$. На площину навмання кидають голку довжиною $2l$, ($l < a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне якусь пряму.



Розв'язок. Позначимо за x відстань від середини голки до найближчої прямої; φ – кут між голкою і цією прямою. Величини (x, φ) повністю визначають положення голки. Отже, простір елементарних подій

$$\Omega = \{(x, \varphi); 0 \leq x \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

З рисунка видно, що голка перетинає пряму тоді і тільки тоді, коли $x \leq l \sin \varphi$. Отже, подія, що голка перетне пряму виглядає наступним чином: $C = \{(x, \varphi); 0 \leq x \leq l \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.



Отже, за геометричним означенням ймовірності $P(C) = \frac{\text{mes}(C)}{\text{mes}(\Omega)} =$

$$\frac{\int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{l}{a\pi} (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Задачі

- 3.1 Маємо 2 концентричних кола з радіусами r і R , $r < R$. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання в великий круг, потрапить і в кільце, утворене побудованими колами.
- 3.2 На відрізок OA довжини L числової вісі Ox навмання поставлена точка $B(x)$. Знайти ймовірність того, що менший з відрізків OB і BA має довжину, більшу за $L/3$.
- 3.3 Монета радіуса r випадковим чином кидається на стіл, розграфлений на квадрати зі стороною l ($2r < l$). Знайти ймовірність того, що а) монета не перетне жодної зі сторін квадратів; б) монета перетне не більше однієї сторони квадратів.
- 3.4 В квадрат з вершинами $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,0)$; $(1,1)$ навмання кинута точка. Нехай (ξ, η) - її координати. Довести, що для будь-яких $0 \leq x, y \leq 1$

$$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\}P\{\eta < y\} = xy.$$

Для $0 < z < 1$ знайти:

- а) $P\{|\xi - \eta| < z\}$; г) $P\{\xi\eta < z\}$;
 б) $P\{\min(\xi, \eta) < z\}$; д) $P\{\max(\xi, \eta) < z\}$;
 в) $P\left\{\frac{(\xi+\eta)}{2} < z\right\}$; е) $P\{\xi + 2\eta < z\}$.

- 3.5 Випадкова точка А обирається навмання в прямокутнику зі сторонами 1 і 2. Знайти ймовірності подій: відстань від А
 а) до найближчої сторони прямокутника не переважає x ;
 б) до кожної сторони прямокутника не переважає x ;
 в) до кожної діагоналі прямокутника не переважає x .
- 3.6 На колі радіуса R навмання взято 2 точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує r ?
- 3.7 В квадрат з вершинами $(0,0); (1,0); (0,1); (1,1)$ навмання кинули точку. Нехай (ξ, η) – її координати. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + \xi x + \eta = 0$ а) дійсні; б) додатні.
- 3.8 Для кожного x знайти ймовірність того, що довжина перпендикуляра, опущеного з центра кола на випадкову хорду, менша за x . Остання визначається як пряма, що проходить через 2 точки, незалежно вибрані на колі.
- 3.9 Стрижень довжиною l навмання розламали на 3 частини. Яка ймовірність того, що з отриманих частин можна скласти трикутник?
- 3.10 Навмання взято два додатних числа x та y , кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy не перевищуватиме 1, а частка y/x не перевищуватиме 2.
- 3.11 В одиничне коло навмання вписаний трикутник. Знайти ймовірності подій: $A = \{\text{Трикутник гострокутний}\}$; $B = \{\text{Трикутник рівнобедрений}\}$.

4. Класичне означення ймовірностей. Аксіоматика теорії ймовірностей.

Нехай ми проводимо випробування, маємо такий простір елементарних подій: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. A – деяка подія, яка в результаті

випробування може відбутись, а може й ні: $A \subset \Omega$. Нехай всі елементарні наслідки $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ випробування рівноможливі.

Δ **Ймовірність події А** дорівнює відношенню числа елементарних подій, що сприяють А, до загального числа можливих подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Приклад 4.1. В ящику знаходяться 10 шкарпеток чорного кольору і 5 сірого. Поспішаючи на першу пару, студент дістає навпомацки 2 шкарпетки з ящика. Знайти ймовірності подій а) $A = \{\text{обидві шкарпетки різних кольорів}\}$; б) $B = \{\text{обидві шкарпетки одного кольору}\}$; в) $C = \{\text{обидві шкарпетки сірі}\}$.

Розв'язок. Загальне число можливих наслідків вибору двох шкарпеток з 15-ти є $n = C_{15}^2 = \frac{15!}{2!13!} = 15 \times 7$. а) Знайдемо кількість наслідків, які сприяють події А. Для вибору чорної шкарпетки маємо 10 можливостей, для вибору сірої – 5. За правилом множення $m = 10 \times 5$. За класичним означенням $P(A) = \frac{10 \times 5}{15 \times 7} = \frac{10}{21}$. б) Якщо обидві шкарпетки одного кольору, то вони або обидві чорні, або сірі. Тоді $m = C_{10}^2 + C_5^2 = 55$; $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{55}{15 \times 7} = \frac{11}{21}$. в) Аналогічно $P(C) = \frac{C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{2}{21}$.

Δ Клас K підмножин з Ω називається **алгеброю**, якщо

- 1) $\Omega \in K$;
- 2) Якщо $A, B \in K$, то $A \cup B \in K$;
- 3) Якщо $A \in K$, то $\bar{A} \in K$.

Δ Клас F підмножин з Ω називається **сігма-алгеброю**, якщо

- 1) $\Omega \in F$;
- 2) Якщо $A_n \in F, n \in N$ то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$;
- 3) Якщо $A \in F$, то $\bar{A} \in F$.

Δ **Сігма-алгеброю борелівських множин на \mathbf{R}** називають найменшу сігма-алгебру, що містить клас всіх можливих проміжків $[a, b)$: $\mathcal{B}^1 = \sigma([a, b))$. Аналогічно визначається борелівська сігма-алгебра на R^n : $\mathcal{B}^n = \sigma([a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n))$.

Аксіоми теорії ймовірностей

Ω – простір елементарних подій. \mathcal{F} – σ -алгебра підмножин з Ω . Отже,

- $A_1) \Omega \in \mathcal{F}$;
- $A_2) A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$;
- $A_3) A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Припустимо, що кожній множині $A \in \mathcal{F}$ поставлено у відповідність $P(A)$ - ймовірність події з властивостями:

$$P_1) P(A) \geq 0;$$

$$P_2) P(\Omega) = 1;$$

$$P_3) A_n \in \mathcal{F}; A_n \cap A_m = \emptyset; n \neq m: P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

(Ω, \mathcal{F}, P) - ймовірнісний простір.

Приклад 4.2. (Класичне означення ймовірностей).

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Кожному наслідку ω_i ставимо у відповідність ймовірність $1/n$. \mathcal{F} - сігма-алгебра всіх підмножин Ω , **дискретна сігма-алгебра**. Тоді

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Для такого означення аксіоми $A_1 - P_3$ виконані.

Приклад 4.3. (Геометричне означення ймовірностей).

$\Omega = D$ - деяка квадратна область на площині. \mathcal{F} - борелівська сігма-алгебра підмножин з D . Для всіх $A \in \mathcal{F}$ визначена площа $mes(A)$. Тоді $P(A) = \frac{mes(A)}{mes(D)}$. Для такого означення аксіоми $A_1 - P_3$ виконані.

Властивості ймовірності, які впливають з аксіом

$$1) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\text{Наслідок. } P(\emptyset) = 0.$$

$$2) A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Теорема додавання для сумісних подій).

$$4) P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}).$$

Приклад 4.4. Яка ймовірність дістати з колоди в 52 карти фігуру довільної масті або карту пік? Фігурою називаються валет, дама або король.

Розв'язок. Позначимо

$A = \{\text{Ми витягнемо фігуру}\}; B = \{\text{Ми витягнемо карту пік}\}$. Тоді за властивістю 3):

$$P\{\text{Дістати або фігуру, або карту пік}\} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{52} + \frac{13}{52} - \frac{3}{52} = \frac{11}{26}.$$

Задачі

- 4.1. В ящику знаходяться 10 деталей, помічених номерами $1, 2, \dots, 10$. Навмання виймають 6 деталей. Знайти ймовірність того, що серед цих 6-ти деталей буде а) деталь №1; б) деталі №1 і №2.
- 4.2. В офісі працюють 6 чоловіків і 4 жінки. Навмання відбирають 7 працівників. Знайти ймовірність того, що серед відібраних осіб виявиться рівно 3 жінки.
- 4.3. Чому дорівнює ймовірність того, що серед k відібраних цифр а) не зустрінеться 0; б) не зустрінеться 1; в) не зустрінеться ні 0, ні 1?
- 4.4. Набираючи номер телефону, абонент забув 3 останні цифри i , пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри.
- 4.5. З колоди, що складається з 52 карт, навмання вибирають 6 карт. Знайти ймовірність того, що серед цих карт а) є туз; б) є карти всіх мастей; в) є хоча б 2 карти з однаковим рангом.
- 4.6. В три вагони входять 9 пасажирів, кожен з яких обирає вагон навмання. Знайти ймовірність того, що а) в перший вагон зайдуть 3 пасажери; б) в кожний вагон зайде по 3 пасажери; в) в один вагон зайде 4, в другий – 3, в третій – 2 пасажери.
- 4.7. Знайти ймовірність того, що в добре перемішаній колоді з 36 карт хоча б 3 тузи розташовані поряд.
- 4.8. В ряду з n крісел сидять троє людей. Знайти ймовірність того, що жодні дві людини не сидять поруч.
- 4.9. З урни, що містить n пронумерованих куль, m разів виймають кулю, щоразу кладучи її назад. Яка ймовірність того, що хоча б одну кулю буде вийнято двічі?
- 4.10. З множини $\{1, 2, \dots, n\}$ послідовно без повернення вибирають 2 числа. Знайти ймовірність того, що різниця між першим і другим вибраними числами буде меншою за m , $m > 0$.
- 4.11. Обчислити ймовірність того, що в січні навмання обраного року буде а) 5 неділь; б) 4 неділі; в) 3 неділі.
- 4.12. Групу з n осіб навмання розсаджують навколо круглого столу. Обчислити ймовірність того, що певні особи А та В опиняться поруч.
- 4.13. З множини $\{1, 2, \dots, n\}$ послідовно навмання обирають 2 числа. Обчислити ймовірність того, що друге з них буде більше за перше, якщо вибір здійснюється а) без повернення; б) з поверненням.

- 4.14. Учасник лотереї «5 з 36» заповнив одну картку. Обчислити ймовірності подій $A = \{\text{Не вгадано жодного номера}\}$; $B = \{\text{Вгадано точно 3 номери}\}$; $C = \{\text{Вгадано всі номери}\}$; $D = \{\text{Отримано який – небудь виграш}\}$.
- 4.15. Учасник лотереї «6 з 49» на першій картці закреслив номери 4, 12, 20, 31, 32, 33, а на другій – 4, 12, 20, 41, 42, 43. Знайти ймовірність того, що в кожній картці вгадано рівно три номери.
- 4.16. Обчислити ймовірність того, що дні народження k навмання обраних людей ($k \leq 12$) припадають на різні місяці року.

5. Умовні ймовірності. Незалежні випадкові події.

$\Delta A, B \in \mathcal{F}$. **Умовною ймовірністю** $P(A/B)$ називають ймовірність події A при умові, що подія B вже відбулась.

Приклад 5.1. В урні 2 білих і 2 чорних кулі. З урни двічі виймають по одній кулі, не повертаючи назад. Знайти ймовірність того, що при другому випробуванні з'явиться біла куля (подія A), якщо при першому випробуванні була вийнята чорна куля (подія B).

Розв'язок. Треба знайти $P(A/B)$. Уявимо, що подія B відбулась. Тоді в урні залишилось 3 кулі, з яких 2 білих і 1 чорна. Отже, $P(A/B) = \frac{2}{3}$.

Δ Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, \mathcal{F}, P) . Нехай $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$. **Умовною ймовірністю** $P(A/B)$ події A відносно події B називатимемо величину

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Отже, **теорема множення для залежних подій** – це наслідок означення умовних ймовірностей:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Наслідок. A_1, \dots, A_n – деякі події. Тоді $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1, A_2) \times \dots \times P(A_n/A_1, \dots, A_{n-1})$.

Властивості умовних ймовірностей

- 1) $0 \leq P(A/B) \leq 1$.
- 2) $P(\Omega/B) = 1$.
- 3) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n / B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n / B)$.

Δ $A, B \in \mathcal{F}$. Події A і B називаються **незалежними**, якщо

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Цю формулу називають **теоремою множення для незалежних подій**.

Теорема 5.1. Нехай $A, B \in \mathcal{F}$; $P(B) \neq 0$. Тоді A і B незалежні \Leftrightarrow , коли $P(A/B) = P(A)$.

Теорема 5.2. A і B незалежні $\Rightarrow A, \bar{B}$ незалежні;

\bar{A}, B незалежні;

\bar{A}, \bar{B} незалежні.

Δ Випадкові події A_1, A_2, \dots, A_n називаються **незалежними в сукупності**, якщо для $\forall k = \overline{2, n}$; $\forall i_1, \dots, i_k$ справедливо:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \times \dots \times P(A_{i_k}).$$

Зауваження. Якщо події попарно незалежні, то це не означає, що вони незалежні в сукупності. Незалежність в сукупності є більш сильною вимогою, ніж попарна.

Теорема 5.3.(Ймовірність появи хоча б однієї з подій, незалежних в сукупності).

Нехай події A_1, A_2, \dots, A_n незалежні в сукупності. Тоді

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \times \dots \times P(\bar{A}_n).$$

Задачі

- 5.1. Підкидають три гральних кубики. Знайти ймовірність того, що а) хоча б раз випала шістка, якщо на всіх кубиках випали різні грані; б) хоча б раз випала шістка, якщо на всіх кубиках випали однакові грані.
- 5.2. З урни, яка містить n білих і m чорних куль, послідовно виймають 2 кулі (без повернення). Знайти ймовірність того, що а) друга куля біла, якщо відомо, що перша куля біла; в) обидві кулі одного кольору; г) кулі різного кольору.
- 5.3. В урні міститься 5 чорних, 6 білих і 8 червоних куль. Послідовно без повернення з урни виймають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що а) перша куля – чорна, друга – біла, третя – червона; б) перша куля – біла, друга і третя – червоні.
- 5.4. Два стрільця незалежно одне від одного стріляють в вовка. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі для першого мисливця дорівнює 0,7; для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі а) в вовка

попаде тільки один з мисливців; б)жоден з мисливців; в)хоча б один з мисливців.

- 5.5. Тричі підкидають монету. Подія $A = \{\text{Двічі випав герб}\}$; подія $B = \{\text{При другому підкиданні випав герб}\}$. Обчислити $P(A)$; $P(B)$; $P(A/B)$; $P(B/A)$.
- 5.6. Ймовірність влучення в десятку при одному пострілі дорівнює 0,2. Скільки треба зробити пострілів (з незалежними подіями влучення), щоб влучити в десятку хоча б 1 раз із ймовірністю, не меншою за 0,9?
- 5.7. Кожна з m радіолокаційних станцій за час T робить n обертів антени і за один оберт антени виявляє об'єкт із ймовірністю p незалежно від інших станцій. Знайти ймовірність того, що а)за час T об'єкт буде виявлено хоча б однією станцією; б)за час T об'єкт буде виявлено кожною станцією.
- 5.8. Два гравці Вася і Коля по черзі стріляють в мішень. Виграє той, хто влучить першим. Ймовірності влучення в мішень для Васи і Колі рівні відповідно p_1 і p_2 . Першим стріляє Вася. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.
- 5.9. Підкидаються 2 гральних кубики. Розглянемо події: A_1 – на першому кубіку випала парна кількість очок; A_2 – на другому кубіку випала непарна кількість очок; A_3 – сума очок на кубиках непарна. Довести, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, але не є незалежними в сукупності.
- 5.10. Нехай дві події A і B визначені на одному і тому ж просторі елементарних подій, не є тотожними, і нехай $0 < P(A) < 1$; $0 < P(B) < 1$. Використовуючи знаки “ $<$ ”, “ $=$ ”, впорядкувати величини $0, P(A \cap B), P(A) + P(B), P(A/B), P(A \cup B), P(A)$ за припущення, що а)події A і B несумісні; б)події A і B незалежні.
- 5.11. Для підвищення надійності приладу він дублюється $n-1$ іншими такими самими приладами. Надійність кожного приладу дорівнює p . Знайти надійність цієї системи приладів. Скільки потрібно взяти приладів, щоб надійність системи була не меншою, ніж p_0 ? Знайти надійність системи, якщо пристрій, що вмикає дублюючий прилад, має надійність q . (**Надійність системи** – ймовірність безвідмовної роботи системи).
- 5.12. Відомі ймовірності трьох незалежних подій: $P(A_i) = p_i$; $i = 1, 2, 3$. Після проведення випробування виявилось, що якісь дві події з A_i відбулись, а третя – ні. Знайти ймовірність, що за цих умов відбулась подія A_1 .
- 5.13. Ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань успіх буде хоча б один раз, дорівнює 0,5. Визначити ймовірність успіху при одному випробуванні, якщо ця ймовірність однакова для всіх випробувань.
- 5.14. Підкидають два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що а)хоча б 1 раз випала шістка, якщо відомо, що сума очок, які випали, дорівнює 8; б)сума очок більше, ніж 9, якщо відомо, що один раз випало 5 очок.
- 5.15. В урні містяться 2 білих і 3 чорних кулі. З урни послідовно виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі, якщо а)проводиться вибірка без повернення; б)проводиться вибірка з поверненням.
- 5.16. В трьох урнах містяться білі та чорні кулі. В першій – 2 білі і 3 чорні; в другій - 2 білих і 2 чорних; в третій - 3 білих і 1 чорна. З першої урни

переклали кулю в другу, з другої – в третю; з третьої – в першу. Який склад куль в першій урні найбільш ймовірний? Знайти ймовірність, що склад куль в усіх урнах залишиться без змін.

- 5.17. При переливанні крові треба враховувати групи крові донора і хворого. Людині, що має 4-ту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи. Людині з 2-ю або 3-ю групою крові можна перелити кров або тієї ж групи, або першої. Людині з 1-шою групою можна перелити кров тільки 1-ї групи. Серед населення 33,7% мають першу, 37,5% - другу, 20,9% - третю і 7,9% - четверту групу крові. Знайти ймовірність того, що випадково взятому хворому можна перелити кров випадково взятого донора.
- 5.18. На відрізок $[-1,1]$ навмання і незалежно одна від одної кинуть дві точки з координатами ξ і η . Перевірити, чи є незалежними події $\{\xi \text{ або } \eta < 1/2\}$ і $\{\eta < 0\}$.
- 5.19. На відрізок $[0,2]$ навмання і незалежно одна від одної кинуть дві точки з координатами ξ і η . Перевірити, чи є незалежними події $\{\xi \geq 1\}$ і $\{\xi + \eta < 2\}$.
- 5.20. Нехай $P(A/B) = 0,7$; $P(A/\bar{B}) = 0,3$; $P(B/A) = 0,6$. Знайти $P(A)$.
- 5.21. (**Парадокс Монті-Хола**) Уявіть себе на телегрі, де вам пропонують вибір між трьома дверима – за ними приз!: за одними з них автомобіль; за іншими -по козі. Ви обираєте одні з дверей, наприклад, перші, ведучий відкриває одні з двох інших, наприклад, треті, за яким знаходиться коза. Тоді він каже вам: «Бажаєте змінити вибір на інші двері?» Чи отримаєте ви перевагу, якщо зміните свій вибір? Ведучий завжди знає, за якими дверима що знаходиться, він завжди відкриває ті з дверей, за якими знаходиться коза, і завжди пропонує гравцю змінити вибір.

6. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.

Δ Події H_1, H_2, \dots, H_n утворюють повну групу подій, якщо

$$1) H_i \cap H_j = \emptyset; \quad i \neq j;$$

$$2) \bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega.$$

(Події попарно несумісні, і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій).

Зауваження. Якщо H_1, H_2, \dots, H_n - повна група подій, то

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Теорема 6.1. (Формула повної ймовірності). Нехай H_1, H_2, \dots, H_n – повна група подій, $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$. Тоді для довільної випадкової події A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A/H_i).$$

Теорема 6.2. (Формула Байєса). Нехай H_1, H_2, \dots, H_n утворюють повну групу подій, їх ще називають гіпотезами. Припустимо, що відбулась подія A . Як змінились ймовірності гіпотез у зв'язку з тим, що подія A відбулась?

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}; \quad k = 1, \dots, n.$$

Задачі

- 6.1. В цеху працюють 20 станків. З них 10 марки А, 6 марки В, 4 марки С. Ймовірність того, що деталь, виготовлена на кожному зі станків А,В,С, виявиться якісною, для цих станків відповідно дорівнює: 0,9; 0,8 і 0,7. Який відсоток якісних деталей виготовляє цех в цілому?
- 6.2. Є три однакові урни. В першій знаходяться 2 білих і 1 чорна кулі; в другій – 3 білих і 1 чорна; в третій – 2 білих і 2 чорних. Дехто навмання вибирає 1 урну і виймає з неї кулю. Знайти ймовірність, що ця куля біла.
- 6.3. Радіолокаційна станція веде спостереження за об'єктом, який може застосовувати або не застосовувати перешкоди(шум). Якщо об'єкт не застосовує шум, то за один цикл обзору станція виявляє його з ймовірністю 0,9; якщо застосовує – з ймовірністю 0,6. Ймовірність того, що за цикл об'єкт застосовуватиме шум, дорівнює 0,8 і не залежить від того, як і коли застосовується шум в інших циклах. Знайти ймовірність того, що об'єкт буде виявлений за один цикл.
- 6.4. З урни, яка містить 3 білих і 2 чорних кулі, переклали дві навмання вибрані кулі в урну, яка містить 4 білих і 4 чорних кулі. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята з другої урни куля буде білою.
- 6.5. Султану набрид його астролог зі своїми невірними передбаченнями, і той вирішив його стратити. Але вирішив дати астрологу останній шанс. Йому треба розкласти по 2 урнам 4 кулі: 2 білих і 2 чорних. Кат навмання обере урну, з неї – кулю. Якщо куля чорна, то астролога стратять, якщо біла – помилують. Яким чином астролог повинний розташувати кулі в урнах, щоб забезпечити собі максимальну ймовірність бути врятованим?
- 6.6. В урні міститься 1 кулька, про яку відомо, що вона або білого, або чорного кольору. Після того, як в урну поклали білу кульку і перемішали, з неї навмання вибрали кульку, колір якої виявився білим. Яка ймовірність того, що і колір кульки, що залишилась, білий?

- 6.7. На трьох дочок – Алісу, Марину і Олену в сім'ї покладений обов'язок мити посуд. Оскільки Аліса старша, їй доводиться виконувати 40% всієї роботи. Інші 60% роботи Марина і Олена ділять порівну. Коли Аліса миє посуд, ймовірність для неї розбити хоча б одну тарілку дорівнює 0,02. Для Марини і Олени ця ймовірність дорівнює відповідно 0,03 і 0,04. Батьки не знають, хто мив посуд ввечері, але вони чули брязкіт розбитої тарілки. Яка ймовірність, що посуд мила Аліса? Марина? Олена?
- 6.8. Ймовірності влучення при кожному пострілі для першого, другого і третього стрільця дорівнюють $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ відповідно. При одночасному пострілі усіх трьох стрільців відбулось рівно 2 влучення. Знайти ймовірність того, що не влучив третій стрілець.
- 6.9. Є 10 однакових урн, у дев'яти з яких по 2 чорних і 2 білих куль, в одній – 5 білих і 1 чорна. Зі взятої навмання урни вийнято білу кульку. Яка ймовірність того, що цю кульку вийняли з урни, що містила 5 білих кульок?
- 6.10.3 урни, яка містить n кульок невідомого кольору, вибрали кульку, яка виявилась білою. Після цього знов взяли кульку. Яка ймовірність, що друга кулька теж біла?
- 6.11. Припустимо, що серед всіх чоловіків дальтоніки становлять 5%, а серед жінок – 0,25%. Вважаючи, що кількість чоловіків і жінок є однаковою, обчислити ймовірність того, що навмання обраний дальтонік є чоловіком.
- 6.12. В урні 3 кулі, які можуть бути білими або чорними. Всі припущення про склад урни рівноймовірні. З урни 4 рази виймали кулю, щоразу кладучи її назад. З'явилися кольори: ч, б, б, б. Як змінилися ймовірності припущень про склад урни?
- 6.13. Стрільці А і В по черзі стріляють в ціль. Ймовірність влучення першими пострілами для них становить відповідно 0,4 та 0,5, а ймовірність влучення при наступних пострілах для кожного стрільця збільшується на 0,05. Яка ймовірність того, що першим почав стріляти стрілець А, якщо п'ятому пострілі було перше влучення?

7. Схема Бернуллі.

Формула Бернуллі

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія А може або відбутись, або ні. Будемо для визначеності називати подію А «успіх». Нехай в результаті кожного випробування відбудеться

або «успіх» з ймовірністю p або «невдача» з ймовірністю $q = 1 - p$. Така постановка задачі називається **схемою Бернуллі**.

Ймовірність того, що при випробуваннях подія «успіх» відбудеться рівно k разів і, отже, не відбудеться $n - k$ разів, можна знайти за допомогою **формули Бернуллі**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Приклад 7.1. Оптова база постачає товар 10-ти магазинам, від кожного з яких може поступити заявка на поставку в поточний день з ймовірністю 0,4 незалежно від заявок інших магазинів. Знайти ймовірність того, що в поточний день на базу надійде а) рівно 5 заявок; б) від 2-х до 5-ти заявок; в) хоча б одна заявка.

Розв'язок. Застосуємо формулу Бернуллі. В поточний день проводиться 10 незалежних випробувань: від кожного з 10-ти магазинів може або надійти заявка (успіх) з ймовірністю $p = 0,4$ або не надійти (невдача) з ймовірністю $q = 1 - p = 0,6$.

а) Треба знайти ймовірність, що «успіх» відбудеться рівно 5 разів.

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 (p)^5 (q)^{10-5} = \frac{10!}{5!5!} (0,4)^5 (0,6)^{10-5} = 252 \cdot 0,01024 \cdot 0,07776 \approx 0,2007.$$

б) Подію {Надійде від 2 до 5 заявок} можна розкласти в об'єднання несумісних {Надійде 2 заявки}, {Надійде 3 заявки}, {Надійде 4 заявки}, {Надійде 5 заявок}. Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$P\{\text{Надійде від 2 до 5 заявок}\} = P_{10}(2) + P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) = C_{10}^2 (p)^2 (q)^8 + C_{10}^3 (p)^3 (q)^7 + C_{10}^4 (p)^4 (q)^6 + C_{10}^5 (p)^5 (q)^5 = \frac{10!}{2!8!} (0,4)^2 (0,6)^8 + \frac{10!}{3!7!} (0,4)^3 (0,6)^7 + \frac{10!}{4!6!} (0,4)^4 (0,6)^6 + 0,2007 \approx 0,7874.$$

в) Подія {Надійде хоча б одна заявка} протилежна події {Не надійде жодної заявки}. Тому

$$P\{\text{Надійде хоча б одна заявка}\} = 1 - P\{\text{Не надійде жодної заявки}\} = 1 - P_{10}(0) = 1 - (0,6)^{10} \approx 1 - 0,006 = 0,994.$$

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо p дуже мале у порівнянні з n , n велике, то справедлива наближена формула

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \text{де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Значення функції $\varphi(x)$ знаходимо з таблиць (Додаток 1).

Властивості функції $\varphi(x)$

1) $\varphi(x)$ парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$.

Приклад 7.3. За соціологічними опитуваннями відомо, що в даному місті лише 0,5% населення на минулих виборах голосували за Партію Зелених. Фабрика, що знаходиться в місті, налічує 10 000 робітників. Знайти ймовірність того, що на наступних виборах за Партію Зелених проголосують рівно 55 робітників.

Розв'язок. Маємо $n = 10\,000$ незалежних випробувань – як робітник проголосує: за Партію Зелених (з ймовірністю $p = 0,005$, «успіх») або ні (з ймовірністю $q = 1 - p = 0,995$, «невдача»). Треба знайти ймовірність, що «успіх» відбудеться 55 раз. Очевидно, що n велике, p мале. Використаємо локальну теорему Лапласа.

$$P_{10\,000}(55) \approx \frac{1}{\sqrt{10\,000 \cdot 0,005 \cdot 0,995}} \varphi(x),$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 10\,000 \cdot 0,005}{\sqrt{10\,000 \cdot 0,005 \cdot 0,995}} = \frac{5}{7,0533} \approx 0,71.$$

За таблицями (Додаток 1) знаходимо $\varphi(0,71) = 0,3101$.

$$P_{10\,000}(55) \approx \frac{\varphi(0,71)}{7,0533} = \frac{0,3101}{7,0533} \approx 0,044.$$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Якщо p дуже мале у порівнянні з n , n велике, то ймовірність того, що подія «успіх» відбудеться не менше k_1 разів і не більше k_2 разів, наближено дорівнює

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \text{де } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Значення функції $\Phi(x)$ знаходимо з таблиць (Додаток 2).

Властивості функції $\Phi(x)$

1) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Тому таблиці для $\Phi(x)$ складені лише для додатних x .

2) $0 \leq \Phi(x) \leq 1$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$. Для значень x , більших за 4, в таблиці відсутні значення функції, оскільки вони мало відрізняються від 1.

Приклад 7.3. В страховій компанії зареєстровано 10 000 персон одного віку і однієї соціальної групи. Ймовірність померти на протязі року для кожної застрахованої персони становить $p = 0,006$. Кожна з цих персон на початок року вносить страховий внесок 12 доларів. У випадку смерті застрахованої персони спадкоємець, зазначений у заповіті, отримає від компанії 1000 доларів. Знайти ймовірність того, що а) страхова компанія стане збитковою; б) страхова компанія отримає прибуток не менший, ніж 40 000 доларів.

Розв'язок. В даній задачі також присутня схема Бернуллі. Маємо $n = 10\,000$ незалежних випробувань, в результаті кожного з них або відбудеться подія $A = \{\text{Смерть даного клієнта на протязі року}\}$ з ймовірністю $p = 0,006$, або не відбудеться з ймовірністю $q = 1 - p = 0,994$. Позначимо k – кількість смертей серед 10 000 клієнтів на протязі року.

а) Коли страхова компанія понесе збитки? Коли обсяг виплат компанії на протязі року перевищить дохід, тобто суму страхових внесків. Дохід складає $12 \times 10\,000 = 120\,000$ доларів. Обсяг виплат складає $k \times 1000 = 1000k$ доларів. Отже,

$$P\{\text{Страхова компанія понесе збитки}\} = P\{1000k > 120\,000\} = P\{k > 120\} = P\{121 \leq k \leq 10\,000\} = P_{10\,000}(121; 10\,000).$$

Для підрахунку цієї ймовірності скористуємось інтегральною теоремою Муавра-Лапласа.

$$P_{10\,000}(121; 10\,000) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{121 - 10\,000 \times 0,006}{\sqrt{10\,000 \cdot 0,006 \cdot 0,994}} \approx 7,899;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{121 - 10\,000 \times 0,006}{\sqrt{10\,000 \cdot 0,006 \cdot 0,994}} \approx 1287.$$

$$P_{10\,000}(121; 10\,000) \approx \Phi(1287) - \Phi(7,899) \approx 1 - 1 = 0.$$

Аргументи у функції більші за 4, тому значення $\Phi \approx 1$. Ймовірність збанкрутувати для страхової компанії практично нульова.

б) Знайдемо тепер ймовірність, що прибуток буде не менший, ніж 40 000 доларів. Прибуток – це різниця між доходом і збитками, тобто $120\,000 - 1000k$.

$$P\{120\,000 - 1000k \geq 40\,000\} = P\{0 \leq k \leq 80\} = P_{10\,000}(0; 80).$$

Знов застосуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

$$P_{10\,000}(0; 80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 10\,000 \times 0,006}{\sqrt{10\,000 \cdot 0,006 \cdot 0,994}} \approx -7,77;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 10\,000 \times 0,006}{\sqrt{10\,000 \cdot 0,006 \cdot 0,994}} \approx 2,59.$$

Значення для першого аргументу знаходимо з таблиць (Додаток 2), для другого використовуємо властивість (1) функції Φ

$$P_{10\,000}(0; 80) \approx \Phi(2,59) - \Phi(-7,77) \approx 0,9952 - (1 - \Phi(7,77)) = 0,9952 - (1 - 1) = 0,9952.$$

Формула Пуассона

Якщо p мале у порівнянні з n , n велике, але $\lambda = np$ залишається невеликим (припустимо, $0 < np < 10$), то справедлива наближена формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{де } k = 0, 1, \dots, n.$$

Значення функції з правої частини формули знаходимо з таблиць (Додаток 3).

Приклад 7.4. Деяка суспільна організація налічує 400 членів. Знайти ймовірність, що в трьох людей з даної спільноти день народження припаде на Різдво. Вважаємо, що ймовірність народження в фіксований день дорівнює $1/365$.

Розв'язок. Маємо схему Бернуллі з $n = 400$ незалежних випробувань; ймовірність «успіху» - що день народження падає на Різдво – стала і дорівнює $p = \frac{1}{365} \approx 0,00274$. Тут доречно скористатись теоремою Пуассона: n велике, p мале, при цьому $\lambda = np = 400:365 \approx 1,096 \approx 1 < 10$ – досить невелике. Залишається скористатись таблицями (Додаток 3)

$$P_{400}(3) \approx P(\lambda = 1, k = 3) \approx 0,0613.$$

Задачі

- 7.1. Два рівносильні шахісти грають в шахи. Що ймовірніше – виграти 2 партії з чотирьох чи 3 партії з шести? (Нічий не враховуються).
- 7.2. Продукція містить 10% браку. Знайти ймовірність того, що серед шести навмання взятих виробів а) немає бракованих; б) рівно 3 бракованих; в) не менше двох бракованих.

- 7.3. Для прядіння змішали білу і фарбовану бавовну у відношенні 1:3. З суміші навмання вибрали 5 волокон. Яка ймовірність того, що а)серед них рівно 2 білих; б)не менше 4-х білих; в)хоча б 1 волокно біле?
- 7.4. (**Проблема Джона Сміта**) Чи однакові шанси на успіх у трьох гравців, якщо першому потрібно отримати хоча б одну шістку при підкиданні гральної кості 6 разів, другому – не менше двох шісток при 12 підкиданнях, а третьому – не менше трьох шісток при 18 підкиданнях?
- 7.5. Відомо, що при підкиданні 10-ти гральних кубиків випало хоча б раз 6 очок. Яка ймовірність, що шістка випала 2 і більше разів?
- 7.6. Знайти ймовірність того, що подія А відбудеться рівно 70 разів в 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,25.
- 7.7. Знайти ймовірність того, що подія А відбудеться 1400 разів в 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,6.
- 7.8. Ймовірність поцілити в мішень дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах попадань буде рівно 75.
- 7.9. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених буде рівно 50 хлопчиків.
- 7.10. Ймовірність появи події в кожному зі 100 незалежних випробувань $p = 0,8$. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться а)не менше 75 і не більше 90 разів; б)не менше 75 разів; в)не більше 74 разів.
- 7.11. Виробництво дає 1% браку. Яка ймовірність того, що серед 11000 виробів бракованих буде не більше 40-ка.
- 7.12. Схожість насіння льону становить 90%. Знайти ймовірність того, що з 900 посаджених насінин число пророслих буде між 790 і 830.
- 7.13. Серед насіння рису є 0,4% насінин бур'яна. Яка ймовірність виявити 5 насінин бур'яна при випадковому відборі 500 насінин?
- 7.14. Пристрій складається з 1000 елементів, які працюють незалежно одне від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента на протязі години дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що за годину відмовлять рівно 2 елементи.
- 7.15. Ймовірність поцілити в мішень при одному пострілі дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що при 200 пострілах буде 3 попадання.
- 7.16. Знайти ймовірність того, що п'ятий успіх в схемі Бернуллі з'явиться у вісімнадцятому випробуванні, а в усіх випробуваннях з непарними номерами буде невдача.
- 7.17. Станок-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена на ньому деталь є бракованою, є 0,01. Знайти ймовірність, що серед 1000 деталей 3 бракованих.
- 7.18. Фабрика виготовляє 80% взуття найвищої якості. Знайти ймовірність того, що зі 100 пар взуття, випущених фабрикою, а)половина виявиться якісних; б)якісних буде не більше 90 і не менше 60.

- 7.19. Ймовірність отримання вдалого результату при проведенні складного хімічного досліду дорівнює $2/3$. Знайти ймовірність того, що при проведенні 7-ми дослідів вдалих серед них буде рівно 4.
- 7.20. Викладач економіки пропонує студентам тест, який складається з 10 питань, на які треба відповісти лише «Так» чи «Ні». Студент, який не знає матеріалу, розставляє відповіді навмання. Яка ймовірність, що він отримає задовільну оцінку або вище, якщо для цього достатньо відповісти правильно лише на 6 питань?
- 7.21. Відомо, що при 10-ти підкиданнях правильної монети герб випав рівно 7 разів. Яка умовна ймовірність того, що при першому і другому підкиданнях випав герб?
- 7.22. Мері підкидає $n + 1$ монету, а Джон - n монет. Яка ймовірність того, що в Мері випаде більше орлів, ніж у Джона?
- 7.23. Ймовірність виникнення небезпечного для приладу перевантаження дорівнює 0,4. Обчислити ймовірність відмови приладу в серії з трьох незалежних дослідів, якщо ймовірність відмови при одному, двох та трьох небезпечних перевантаженнях дорівнює відповідно 0,2; 0,5 та 0,8.

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Нехай (Ω, \mathcal{F}, P) - ймовірнісний простір.

Δ **Випадковою величиною** ξ , заданою на цьому просторі, називається функція $\xi(\omega): \Omega \rightarrow R$, вимірна відносно сігма-алгебри \mathcal{F} , тобто така, що для $\forall x \in R: \{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.

Δ **Функцією розподілу** випадкової величини ξ називається

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = P\{\xi < x\}.$$

Властивості функції розподілу

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$.
- 2) $F(x)$ – неспадна, тобто якщо $a < b$, то $F(a) \leq F(b)$.
- 3) Для будь-яких $a < b$ ймовірність потрапляння в.в. ξ в півінтервал $[a, b)$ дорівнює $P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a)$.
- 4) Якщо можливі значення випадкової величини ξ належать інтервалу (a, b) , то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ і $F(x) = 1$ при $x \geq b$.
- 5) $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- 6) Для будь-якого $x \in R$ ймовірність того, що ξ прийме значення x , дорівнює величині стрибка функції розподілу в точці x : $P\{\xi = x\} = F(x + 0) - F(x)$.
- 7) Функція розподілу неперервна зліва: $F(x - 0) = F(x)$.

8. Дискретні випадкові величини.

Δ Випадкова величина на (Ω, \mathcal{F}, P) називається **дискретною**, якщо вона приймає скінченну або зліченну кількість значень.

Δ **Законом розподілу дискретної випадкової величини** ξ називається відповідність між можливими значеннями в.в. x_i і їх ймовірностями $p_i = P\{\xi = x_i\}$. Закон розподілу можна задати таблично:

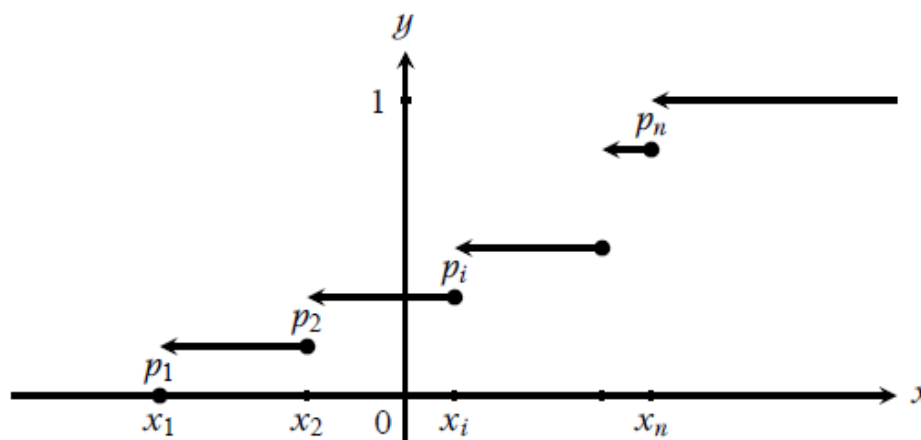
ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

$$\sum_i p_i = 1$$

Функція розподілу дискретної випадкової величини має східчастий вигляд, має стрибки в точках x_i :

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i$$

Якщо випадкова величина приймає скінченну кількість значень $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, то графік функції розподілу матиме наступний вигляд



Графік функції розподілу $F(x)$

Числові характеристики дискретних випадкових величин

Δ **Математичне сподівання дискретної випадкової величини** ξ визначається рівністю

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

якщо такий ряд є збіжним.

Частіше використовують інше позначення $E\xi$ – від слова “expectation”.

Зауваження 8.1. Математичне сподівання ξ наближено дорівнює середньому арифметичному значень випадкової величини ξ , які ми спостерігаємо. Математичне сподівання ξ характеризує ξ «в середньому».

Властивості математичного сподівання

1) $Mc = c$, де c – стала.

2) $M(c\xi) = cM\xi$.

3) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

4) $M\xi\eta = M\xi M\eta$, якщо ξ, η незалежні.

Δ Дискретні випадкові величини ξ, η називаються **незалежними**, якщо $P\{\xi = x_n; \eta = y_k\} = P\{\xi = x_n\} P\{\eta = y_k\}$ для всіх можливих x_n, y_k .

Δ **Дисперсією випадкової величини ξ** називається

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Якщо ξ дискретна, то:

$$D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M\xi)^2 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M\xi)^2,$$

якщо даний ряд є збіжним.

Зауваження 8.2. Дисперсія ξ характеризує розкид випадкової величини навкруги математичного сподівання. Чим розкид більший, тим більша дисперсія.

Властивості дисперсії

1) $Dc = 0$, де c – стала.

2) $D\xi \geq 0$.

3) $D(c\xi) = c^2 D\xi$.

4) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, якщо ξ, η незалежні.

Δ **Середньоквадратичним відхиленням випадкової величини ξ** називається

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}.$$

Приклад 8.1. Монету підкидають 2 рази, ξ - число появ герба. Скласти закон розподілу ξ , побудувати функцію розподілу $F_\xi(x)$, її графік.

Розв'язок. $\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma P, P\Gamma, PP\}$ - простір елементарних подій.

$$P\{\xi = 0\} = P\{PP\} = P\{P\}P\{P\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P\{\xi = 1\} = P\{\Gamma P \cup P\Gamma\} = P\{\Gamma P\} + P\{P\Gamma\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$P\{\xi = 2\} = P\{\Gamma\Gamma\} = \frac{1}{4}.$$

Отже, закон розподілу:

ξ	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

Знайдемо функцію розподілу $F_\xi(x)$:

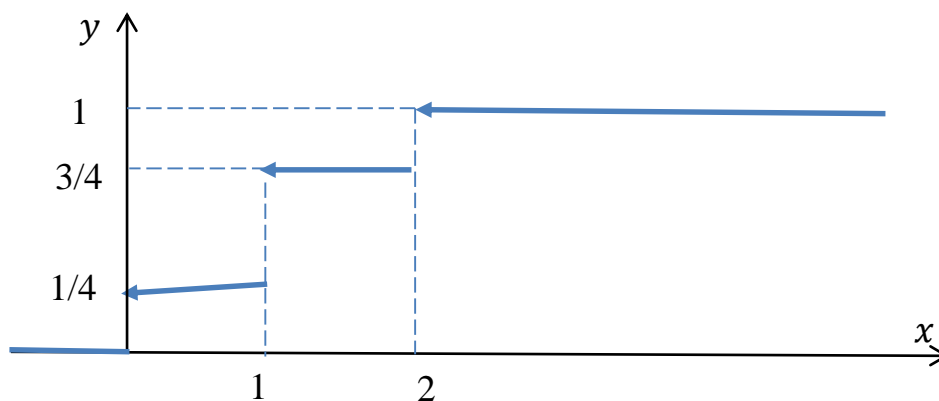
Якщо $x \leq 0$: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 0$;

Якщо $0 < x \leq 1$: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} = \frac{1}{4}$.

Якщо $1 < x \leq 2$: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Якщо $x > 2$: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} = 1$.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1/4, & 0 < x \leq 1, \\ 3/4, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$



Графік функції розподілу $F_\xi(x)$

Біноміальний розподіл

Δ Випадкова величина ξ має **біноміальний розподіл** з параметрами n, p , якщо вона приймає значення $k = 0, 1, 2, \dots, n$ з ймовірностями, що задаються формулою Бернуллі $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$; $q = 1 - p$.

$$M\xi = np; \quad D\xi = npq.$$

Геометричний розподіл

Δ Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p , якщо вона приймає значення $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ з ймовірностями $P\{\xi = k\} = pq^{k-1}$.

$$M\xi = \frac{1}{p}; \quad D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

Розподіл Пуассона

Δ Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ ($\lambda > 0$), якщо вона приймає значення $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ з ймовірностями $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$$M\xi = \lambda; \quad D\xi = \lambda.$$

Розподіл суми двох незалежних випадкових величин.

Нехай ξ, η – незалежні дискретні випадкові величини, які приймають лише цілочислові значення $0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Позначимо їх розподіли: $p_k = P\{\xi = k\}$; $q_k = P\{\eta = k\}$; $k = 0, 1, \dots$. Знайдемо розподіл їх суми $\xi + \eta$ ($n=0, 1, \dots$).

$$\begin{aligned} P\{\xi + \eta = n\} &= P\left\{\bigcup_{k=0}^n \{\xi = k; \eta = n - k\}\right\} = \sum_{k=0}^n P\{\xi = k; \eta = n - k\} = \\ &= \sum_{k=0}^n P\{\xi = k\}P\{\eta = n - k\} = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \end{aligned}$$

Приклад 8.2. Нехай ξ, η – незалежні однаково розподілені випадкові величини, які мають геометричний розподіл з параметром p . Знайти розподіл суми $\zeta = \xi + \eta$.

Розв'язок. Розподіл геометричної випадкової величини має вигляд $P\{\xi = k\} = p(1 - p)^{k-1}$; $k = 1, 2, \dots$. Отже, обидві компоненти ξ, η мають такий розподіл. Зрозуміло, що в.в. ζ приймає значення $2, 3, \dots$ (0 не включений). Тому ми можемо скористатись попередньою формулою, змінивши межі підсумовування: від 1 до $n-1$.

$$\begin{aligned}
P\{\xi + \eta = n\} &= \sum_{k=1}^{n-1} p_k q_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{n-k-1} \\
&= p^2(1-p)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} 1 = p^2(1-p)^{n-2}(n-1).
\end{aligned}$$

Задачі

- 8.1. Тричі підкидають гральний кубик. Нехай ξ – число появ шісток. Знайти закон розподілу ξ , $M\xi$, $D\xi$.
- 8.2. В партії з 10 деталей знаходяться 8 стандартних. Навмання відбирають 2 деталі. Скласти закон розподілу ξ – числа стандартних деталей серед відібраних. Знайти $M\xi$, $D\xi$.
- 8.3. Проводиться ряд спроб ввімкнути двигун автомобіля. Кожне випробування займає 1 сек. І закінчується успіхом (включенням двигуна) незалежно від інших спроб з ймовірністю $p = 0,6$. Знайти розподіл випадкової величини ξ – часу, який витрачається на включення двигуна. Знайти $M\xi$, $D\xi$.
- 8.4. На заводі є 3 конвеєри, які працюють незалежно одне від одного. Ймовірність, що зламається перший дорівнює 0,1; другий – 0,01; третій – 0,03. Нехай ξ – кількість конвеєрів, які є справними. Скласти закон розподілу ξ .
- 8.5. Нехай ξ – біноміальна випадкова величина з параметрами n , p . Яке найімовірніше значення ξ ?
- 8.6. Два бомбардувальника скидають по черзі бомби до першого попадання. Ймовірність попасти для першого бомбардувальника дорівнює 0,7; для другого – 0,8. Скласти закон розподілу ξ – числа бомб, скинутих обома бомбардувальниками.
- 8.7. З урни, в якій міститься 3 білих і 2 чорних кулі, переклали 2 кулі до урни, в якій є 1 біла і 2 чорні кулі. Далі з другої урни беруть 2 кулі. Нехай ξ – число білих куль серед них. Знайти розподіл ξ .
- 8.8. Тривалість телефонної розмови вимірюється хвилинами і є геометричною випадковою величиною з параметром p . Яка ймовірність того, що розмова буде тривати ще 3 хвилини, якщо до цього вона продовжувалась 10 хвилин?
- 8.9. Які з послідовностей є розподілами дискретних випадкових величин? ($0 < p < 1$; $q = 1 - p$).
 - а) $p^k q^2$; $k = 1, 2, \dots$;
 - б) $p^{k-n} q$; $k = n, n + 1, \dots$;

$$в) \frac{1}{k+1}; \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$г) \frac{2^k e^{-2}}{k!}; \quad k = 0, 1, \dots$$

- 8.10. Підкидають пару симетричних гральних кубиків і розглядають випадкову величину (ξ, η) , де ξ – число очок на першому гральному кубикові; η – на другому. Знайти: а) закон розподілу в.в. $\max\{\xi, \eta\}$; б) закон розподілу $\xi + \eta$; в) $P\{|\xi - \eta| \geq 3\}$; в) $P\{\min\{\xi, \eta\} \leq 1; \max\{\xi, \eta\} \geq 5\}$.
- 8.11. Нехай ξ, η – дискретні незалежні випадкові величини, які набувають значення x_1, x_2, \dots з ймовірностями $P\{\xi = x_i\} = p_i; P\{\eta = x_j\} = q_j$. Обчислити $P\{\xi = \eta\}$.
- 8.12. Нехай ξ, η – незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона відповідно з параметрами λ і μ . (Розподіл Пуассона має вигляд $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; k = 0, 1, \dots$). Знайти розподіл їх суми $\zeta = \xi + \eta$.
- 8.13. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p . Знайти Mx^ξ , де $|x| < 1$.
- 8.14. Нехай ξ набуває цілих невід’ємних значень. Довести, що $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \geq k\}$.
- 8.15. В урні міститься 2 білих, 3 чорних і 5 червоних куль. З урни беруть 3 кулі. Знайти розподіли: ξ – числа вибраних білих куль; η – числа вибраних чорних куль. Чи залежать ξ і η ? Знайти $M\xi, M\eta$.

9. Функції від дискретних випадкових величин і їх числові характеристики.

Математичне сподівання функції від дискретної випадкової величини

Нехай ξ – випадкова величина, яка приймає значення x_i з ймовірностями p_i ; $g(x)$ – не випадкова функція. Тоді математичне сподівання від $g(\xi)$ можна обчислити за формулою

$$Mg(\xi) = \sum_i g(x_i) p_i.$$

Приклад 9.1. Випадкова величина ξ має розподіл

ξ	-2	-1	2
p_i	1/2	1/4	1/4

Обчислити $M\xi 2^{|\xi|}$.

Розв’язок. За формулою $M\xi 2^{|\xi|} = \sum_i x_i 2^{|x_i|} p_i = \frac{1}{2}(-2)2^{|-2|} + \frac{1}{4}(-1)2^{|-1|} + \frac{1}{4}2 \cdot 2^2 = -\frac{5}{2}$.

Задачі

- 9.1. Підкидають монету і гральний кубик. Нехай ξ – число гербів, η – число очок на кубику. Знайти а) $M \frac{1}{\xi+1} \cos \frac{\pi}{6} \eta$; б) $M e^{\xi} \sin \frac{\pi}{6} \eta$.
- 9.2. Довести, що коли кожна з незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2 має геометричний розподіл, то і випадкова величина $\eta = \max\{\xi_1, \xi_2\}$ має геометричний розподіл. Знайти параметр цього розподілу, якщо параметри ξ_1 і $\xi_2 \in p_1$ і p_2 відповідно.
- 9.3. Випадкова величина має розподіл Пуассона з параметром λ . Обчислити $M \frac{1}{1+\xi}$.
- 9.4. Нехай ξ, η – незалежні випадкові величини, кожна з яких має розподіл Пуассона з параметром λ . Обчислити: а) $M \frac{\xi}{1+\eta}$; б) $M \xi \eta$; в) $D \xi \eta$; г) $D(\xi + \eta)$.

10. Абсолютно неперервні випадкові величини

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – ймовірнісний простір, ξ - випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$.

Δ Кажуть, що випадкова величина ξ має **щільність розподілу**, якщо існує інтегровна функція $f(x)$, така, що $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$. Тоді випадкову величину ξ відносять до **абсолютно неперервного типу**.

Властивості щільності розподілу

- 8) Якщо $f(x)$ неперервна, то $F'(x) = f(x)$.
- 9) $f(x) \geq 0$.
- 10) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (**Умова нормування**).
- 11) Для будь-яких $a < b$ ймовірність потрапляння в.в. ξ в півінтервал $[a, b)$ дорівнює $P\{a \leq \xi < b\} = \int_a^b f(x) dx$.
- 12) Для абсолютно неперервної випадкової величини ξ :
 $P\{\xi = x_1\} = 0$, де x_1 – деяке можливе значення ξ .
- 13) $P\{\xi \in B\} = \int_B f(x) dx$ для будь-якої події $B \in \mathcal{F}$.

Нехай ξ - випадкова величина зі щільністю $f(x)$.

Числові характеристики ξ (**математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення**) можна знайти таким чином (якщо написані інтеграли існують):

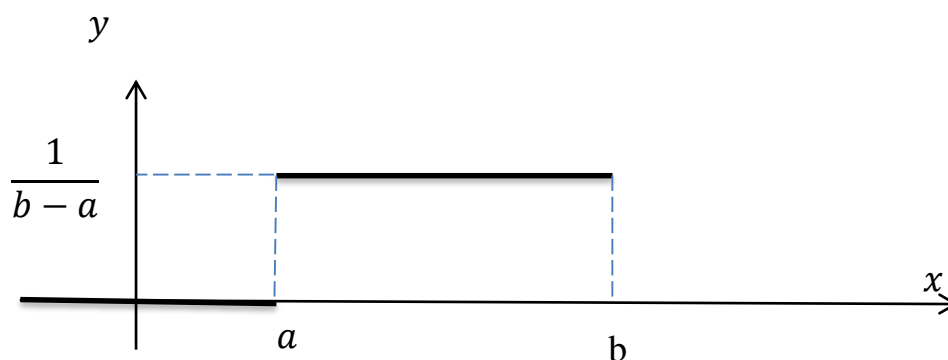
- 1) $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.
- 2) $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M\xi)^2$.
- 3) $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$.

Зауваження 10.1 Можна довести, що властивості математичного сподівання і дисперсії дискретних випадкових величин зберігаються і для абсолютно неперервних.

Δ **Рівномірним** називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини ξ , який описується щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

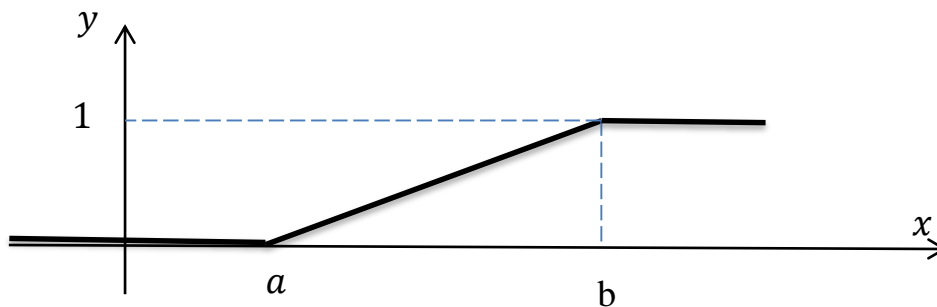
(тут a, b – параметри).



Графік щільності $f(x)$

Функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



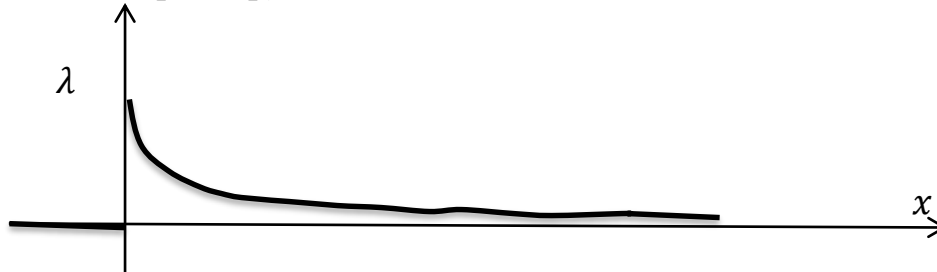
Графік функції розподілу $F(x)$

Числові характеристики: $M\xi = \frac{a+b}{2}$, $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Δ Показниковий(експоненціальний) розподіл - це розподіл випадкової величини ξ зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

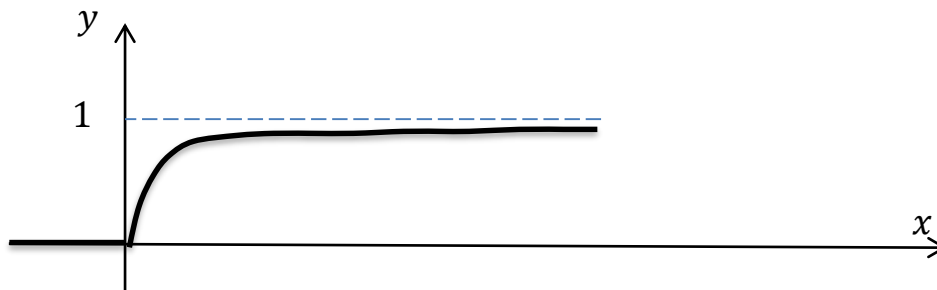
(тут $\lambda > 0$ – параметр).



Графік щільності $f(x)$

Функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$



Графік функції розподілу $F(x)$

Числові характеристики: $M\xi = \frac{1}{\lambda}$, $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$.

Нормальний розподіл

Δ Нормальним (гаусовим) називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини ξ , який описується щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

на всій прямій (тут a , σ – параметри, $\sigma > 0$). Функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du.$$

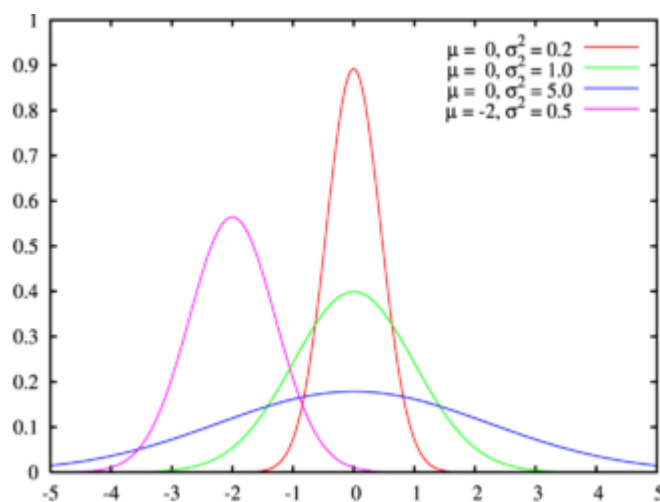
Числові характеристики: $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$.

Δ **Загальним** називають нормальний розподіл з довільними параметрами a і σ . **Нормованим** називають нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$. Прийняте наступне позначення: $\xi \sim N(a, \sigma^2)$. Щільність $\varphi(x)$ і функція розподілу $\Phi(x)$ нормованої нормальної величини табульовані і знаходяться в Додатках 1,2.

Ймовірність попадання нормальної випадкової величини в інтервал:

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Нормальна крива – графік щільності нормального розподілу – симетрична відносно прямої $x = a$ і має єдиний максимум в цій точці. Зміна параметра a призводить до зсуву нормальної кривої вздовж вісі. Зі зростанням параметру σ крива стає більш пологою, при спаданні – більш „гостровершинною” (На рисунку параметр a позначений як μ).



Правило трьох сігм: $P\{|\xi - a| < 3\sigma\} \approx 0,9973$.

Приклад 10.1. Випадкова величина ξ задана щільністю

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^4}, & x \leq -1; \\ 0, & -1 < x \leq 1; \\ \frac{A}{x^4}, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти: а) сталу A ; б) $M\xi$, $D\xi$; в) $F(x)$; г) $P\left\{\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$.

Розв’язок. а) Знайдемо сталу A з умови нормування: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{A}{x^4} dx + \int_1^{\infty} \frac{A}{x^4} dx = 2A \frac{x^{-3}}{-3} = 1 \Rightarrow A = \frac{3}{2}.$$

$$\text{б) } M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx + \frac{3}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = 0.$$

$$D\xi = M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \frac{3}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2 \frac{3}{2} (-x^{-1}) \Big|_1^{\infty} = 3.$$

в) Для знаходження функції розподілу використаємо формулу $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$. Розглянемо окремо інтервали, на яких щільність задається по-різному.

$$1) \text{ Нехай } x \leq -1. \text{ Тоді } F(x) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^x u^{-4} du = -\frac{1}{2x^3}.$$

$$2) \text{ Тепер } -1 < x \leq 1. F(x) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{-1} u^{-4} du + \frac{3}{2} \int_{-1}^x u^{-4} du = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3} u^{-3} \right) \Big|_{-1}^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^{-3} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2x^3}.$$

$$3) x > 1. F(x) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{-1} u^{-4} du + \frac{3}{2} \int_1^x u^{-4} du = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3} u^{-3} \right) \Big|_1^x = 1 - \frac{1}{2x^3}.$$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x^3}, & x \leq -1; \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^3}, & -1 < x \leq 1; \\ 1 - \frac{1}{2x^3}, & x > 1. \end{cases}$$

$$\text{г) } P \left\{ \xi \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \right\} = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Приклад 10.2. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу (показниковий розподіл):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти: а) $P \left\{ \xi < 1/\xi > \frac{1}{2} \right\}$; б) $P \{ \xi^2 + \xi > 6 \}$.

Розв'язок. а) Розпишемо умовну ймовірність за означенням $P \left\{ \xi < 1/\xi > \frac{1}{2} \right\}$

$$\frac{1}{2} \left. \right\} = \frac{P \left\{ \xi < 1 \right\} \cap \left\{ \xi > \frac{1}{2} \right\}}{P \left\{ \xi > \frac{1}{2} \right\}} = \frac{P \left\{ \frac{1}{2} < \xi < 1 \right\}}{P \left\{ \xi > \frac{1}{2} \right\}} = \frac{F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - F\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - e^{-1} - (1 - e^{-\frac{1}{2}})}{e^{-\frac{1}{2}}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$$

б) Розв'язуємо нерівність, яка описує подію.

$$\begin{aligned} P \{ \xi^2 + \xi > 6 \} &= P \{ (\xi + 3)(\xi - 2) > 0 \} = P \{ \xi \in (-\infty, -3) \} + P \{ \xi \in (2, \infty) \} \\ &= \\ &= F(-3) + 1 - F(2) = 1 - e^{-2}. \end{aligned}$$

Задачі

10.1. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x \leq \frac{1}{3}; \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти а) щільність розподілу $f(x)$; б) $P \left\{ -\frac{1}{2} < \xi < 8 \right\}$; в) $P \left\{ \xi > -\frac{1}{2} \right\}$;

г) $M\xi$; $D\xi$.

10.2. Задана щільність розподілу неперервної випадкової величини

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2; \\ 2, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

10.3. Задана щільність розподілу неперервної випадкової величини

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{4-x^2}}, & x \in [-2, 2]; \\ 0, & x \notin [-2, 2]. \end{cases}$$

Знайти сталу c , функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$.

10.4. Які умови треба накласти на параметри наступних функцій $p(x)$ для того, щоб вони були щільностями розподілу?

$$\text{а) } p(x) = \begin{cases} a \sin x, & x \in [0, b]; \\ 0, & x \notin [0, b]. \end{cases} \quad \text{б) } p(x) = \begin{cases} 0, & x < c; \\ ax^b, & x \geq c. \end{cases}$$

$$\text{в) } p(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}.$$

10.5. Точка P рівномірно розподілена всередині круга радіуса R . Нехай ξ - відстань від точки P до центра круга. Знайти а) щільність розподілу випадкової величини ξ ; б) $P\{\xi > \frac{R}{2}\}$; в) $M\xi$, $D\xi$.

10.6. Випадкова величина ξ має щільність Коші: $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Обчислити ймовірності: а) $P\{\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$; б) $P\{\xi^2 + \xi > 0\}$; в) $P\{\xi^2 - \xi > 2/\xi > 0\}$.

10.7. Нехай на декартовій площині задані точки $O(0,0)$; $T(0,1)$. Випадкова точка P лежить на вісі OX , і розташована таким чином, що $\angle OTP$ рівномірно розподілений на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання абсциси точки P .

10.8. Випадкова величина ξ має щільність $p(x) = e^{-2|x|}$. Обчислити а) $P\{\xi < 1\}$; б) $P\{\xi < 3/\xi \geq 2\}$; в) $M\xi$, $D\xi$.

11. Функції від абсолютно неперервних величин.

Математичне сподівання функції

від абсолютно неперервної випадкової величини

Нехай ξ – випадкова величина, розподіл якої заданий щільністю $f(x)$; $g(x)$ – не випадкова функція. Тоді математичне сподівання від $g(\xi)$ можна обчислити за формулою

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Приклад 11.1. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу випадкових величин а) $\eta_1 = |\xi|$ б) $\eta_2 = \frac{1}{\xi^2}$.

Розв'язок. а) Спершу знайдемо функцію розподілу η_1 .

$F_{\eta_1}(x) = P\{\eta_1 < x\} = P\{|\xi| < x\}$. Очевидно, що $F_{\eta_1}(x) = 0$, якщо $x \leq 0$.

Нехай $x > 0$. Тоді $F_{\eta_1}(x) = P\{|\xi| < x\} = P\{-x < \xi < x\} = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$.

$$F_{\eta_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 2\Phi(x) - 1, & x > 0. \end{cases}$$

Диференціюючи функцію розподілу, знаходимо щільність.

$$f_{\eta_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0. \end{cases}$$

б) $F_{\eta_2}(x) = 0$, якщо $x \leq 0$. Нехай $x > 0$. $F_{\eta_2}(x) = P\{\eta_2 < x\} = P\left\{\frac{1}{\xi^2} < x\right\} = P\left\{|\xi| > \frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = P\left\{\xi > \frac{1}{\sqrt{x}}\right\} + P\left\{\xi < -\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

$$F_{\eta_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 2 - 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), & x > 0. \end{cases}$$

Оскільки $\left(\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2x}} \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{2\pi}x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2x}}$,

то

$$f_{\eta_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Приклад 11.2. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[0,1]$. Знайти $M(\cos\xi)^2$.

Розв'язок. Щільність ξ має вигляд $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ За формулою

математичного сподівання функції від випадкової величини

$$M(\cos\xi)^2 = \int_0^1 \cos^2 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos 2x) dx = \frac{2 + \sin 2}{4}.$$

Задачі

11.1. Колесо вагону має тріщину на зовнішньому краю. Нехай ξ – висота тріщини над землею при випадковій зупинці вагона. Знайти $M\xi$, $D\xi$.

11.2. Тривалість безвідмовної роботи приладу вимірюється в роках і є випадковою величиною зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{2}{x^3}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Через 4 роки прилад міняють, навіть якщо він не вийшов з ладу. Обчислити математичне сподівання тривалості роботи приладу.

11.3. Випадкова величина ξ має щільність Коші: $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Знайти а) $M \frac{\xi}{1+\xi^2}$; б) $M(\arctg \xi)^2$.

11.4. Випадкова величина ξ має рівномірний на $[0,1]$ розподіл. Знайти щільність і математичне сподівання випадкових величин а) $\eta_1 = 3\xi - 2$; б) $\eta_2 = |2\xi - 1|$; в) $\eta_3 = -\ln \xi$.

11.5. Випадкова величина ξ має щільність $p(x) = e^{-2|x|}$. Визначити 1) $M \max(\xi, 2)$; 2) Розподіл та математичне сподівання випадкових величин а) $\eta_1 = \xi^2$; б) $\eta_2 = [\xi]$; в) $\eta_3 = e^{-|\xi|}$.

11.6. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Знайти щільність розподілу величин а) $\eta_1 = \xi^2$; б) $\eta_2 = |\xi|$. Знайти $M\eta_2$.

11.7. Випадкова величина ξ має щільність (розподіл арксинуса):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Знайти щільність і математичне сподівання а) $\eta_1 = \arcsin \xi$; б) $\eta_2 = 1 + \xi^2$.

11.8. Випадкова величина ξ має експоненціальний розподіл з параметром λ . а) Довести, що при $\alpha > 0$ величина $\xi^{1/\alpha}$ має розподіл Вейбула з параметрами α, λ (Функція розподілу Вейбула має вигляд $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x^\alpha}, & x \geq 0 \end{cases}$). б) Знайти розподіл випадкової величини $[\xi]$.

11.9. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання випадкової величини $|\sin \xi|$.

11.10. Нехай $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ . Записати функції розподілу випадкових величин $\eta_1 = a\xi + b$; $\eta_2 = e^\xi$; $\eta_3 = F(\xi)$.

11.11. Випадкова величина ξ має експоненціальний розподіл з параметром λ . (Функція розподілу експоненціального розподілу має вигляд $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$). Знайти щільність розподілу і математичне сподівання випадкових величин а) $\eta_1 = \xi^2$; б) $\eta_2 = e^{-\xi}$; в) $\eta_3 = \{\lambda\xi\}$.

11.12. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Знайти щільність розподілу величин а) $\eta_1 = a\xi + b$; б) $\eta_2 = \frac{1}{\xi^2}$. Знайти розподіл величини $\eta = \text{sign}(\xi)$.

12. Випадкові вектори(або багатовимірні випадкові величини).

Незалежність випадкових величин

(Ω, \mathcal{F}, P) - ймовірнісний простір; $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - випадкові величини на ньому.

Δ Функцію $\zeta(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ називатимемо **випадковим вектором**. Якщо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - випадкові величини, то $\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} \in \mathcal{F}$ для $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$.

Δ Функція

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\},$$

визначена на R^n , називається **функцією розподілу випадкового вектора** $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

Властивості функції розподілу випадкового вектора

- 1) $0 \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$.
- 2) $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неспадна по кожному з аргументів.
- 3) $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неперервна зліва.
- 4) $\lim_{x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow \infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$.
- 5) $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i$.
- 6) $\lim_{x_1 \rightarrow \infty, \dots, x_{i-1} \rightarrow \infty, x_{i+1} \rightarrow \infty, \dots, x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = F_{\xi_i}(x_i)$.

Δ Випадковий вектор $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ має **щільність розподілу** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо існує представлення

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} du_1 \int_{-\infty}^{x_2} du_2 \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n.$$

Властивості щільності розподілу випадкового вектора

- 1) Якщо $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неперервна на R^n , то
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n = 1$.
- 3) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$.
- 4) $P\{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in B\} = \int \dots \int_B f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

Δ Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ називаються **незалежними**, якщо для всіх $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^n$

$$P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} = P\{\xi_1 < x_1\}P\{\xi_2 < x_2\} \dots P\{\xi_n < x_n\} \text{ або} \\ F_{\zeta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2) \dots F_{\xi_n}(x_n).$$

Очевидно, що у випадку існування щільностей остання рівність буде рівносильна

$$f_{\zeta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2) \dots f_{\xi_n}(x_n),$$

де справа стоїть добуток щільностей окремих компонент.

Двовимірна випадкова величина (Система двох випадкових величин)

Δ Кажуть, що заданий закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$, якщо задані можливі значення випадкової величини $(x_i, y_j); i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$ і їх ймовірності: $p(x_i, y_j) = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$.

$\xi \backslash \eta$	x_1	...	x_i	...	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$...	$p(x_i, y_1)$...	$p(x_n, y_1)$
...
y_j	$p(x_1, y_j)$...	$p(x_i, y_j)$...	$p(x_n, y_j)$
...
y_m	$p(x_1, y_m)$...	$p(x_i, y_m)$...	$p(x_n, y_m)$

Оскільки події $\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$ утворюють повну групу, то сума ймовірностей з усіх клітинок дорівнює 1: $\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1$.

Для того, щоб знайти закон розподілу ξ , треба підсумувати ймовірності „по стовпчиках”, щоб знайти закон розподілу η – „по рядочках”.

Приклад 12.1. Розподіл двовимірної випадкової величини (X, Y) задається за допомогою таблиці.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Знайти а)одновимірні закони розподілу X та Y;

б)умовну ймовірність $P\{Y = 1 / X = 1\}$;

в)Чи залежні X та Y?

Розв’язок. а)Для знаходження закону розподілу X підсумовуємо ймовірності «по стовпчиках».

X	-1	0	1
p_i	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

Для знаходження закону розподілу Y - «по рядках».

Y	-1	1
p_i	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{б) } P\{Y = 1/X = 1\} = \frac{P\{\{Y=1\} \cap \{X=1\}\}}{P\{X=1\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

в) Для незалежних випадкових величин повинно виконуватись $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$ для всіх можливих x_i, y_j . Очевидно, що не виконується рівність $P\{X = -1; Y = -1\} \neq P\{X = -1\}P\{Y = -1\}$, бо $\frac{1}{2} \neq \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{4}$. Отже, X та Y залежні.

Припустимо, що розподіл системи $\zeta = (\xi, \eta)$ заданий своєю функцією розподілу $F_\zeta(x, y) = P\{\xi < x; \eta < y\}$. Якщо в системи (ξ, η) існує неперервна щільність, то її можна знайти таким чином $f_\zeta(x, y) = \frac{\partial^2 F_\zeta(x, y)}{\partial x \partial y}$.

Функцію розподілу кожної окремої компоненти можна знайти так:

$$F_\xi(x) = F_\zeta(x, \infty); \quad F_\eta(y) = F_\zeta(\infty, y).$$

А окремі (маргінальні) щільності через щільність пари (ξ, η) можна отримати так:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x, y) dy; \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x, y) dx.$$

Приклад 12.2. Щільність випадкового вектора $\zeta = (\xi, \eta)$ дорівнює

$$f_{(\xi, \eta)}(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Знайти окремо щільності ξ, η . Довести, що ξ, η залежні.

Розв'язок. Знайдемо формули окремих компонент системи.

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x, y) dy = \int_0^{\infty} xe^{-x(1+y)} dy = -e^{-x(1+y)} \Big|_0^{\infty} = e^{-x}; \quad x > 0.$$

$$\begin{aligned} f_\eta(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x, y) dx = \int_0^{\infty} xe^{-x(1+y)} dx \\ &= -\frac{1}{1+y} \left(xe^{-x(1+y)} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x(1+y)} dx \right) = \\ &= \frac{1}{(1+y)^2} (-e^{-x(1+y)}) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(1+y)^2}; \quad y > 0. \end{aligned}$$

Оскільки $f_\zeta(x, y) \neq f_\xi(x)f_\eta(y)$, то ξ, η залежні.

Числові характеристики випадкового вектора

1) Δ **Коваріацією** двох випадкових величин ξ і η називають величину

$$Cov(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta.$$

Якщо ξ і η незалежні, то $Cov(\xi, \eta) = 0$.

2) Δ **Коефіцієнтом кореляції** випадкових величин ξ і η називають

$$r(\xi, \eta) = \frac{Cov(\xi, \eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} = \frac{M\xi\eta - M\xi M\eta}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}.$$

Властивості коефіцієнта кореляції

а) Якщо ξ і η незалежні, то $r(\xi, \eta) = 0$. Обернене твердження невірне.

б) $|r(\xi, \eta)| \leq 1$.

Можна сказати, що коефіцієнт кореляції характеризує ступінь лінійного зв'язку між величинами

3) Δ **Математичним сподіванням випадкового вектора** $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ називається вектор, складений з математичних сподівань компонент:

$$M\zeta = \begin{pmatrix} M\xi_1 \\ \vdots \\ M\xi_n \end{pmatrix}.$$

4) Δ **Коваріаційна матриця** визначається рівністю

$$\begin{aligned} V(\zeta) &= M[(\zeta - M\zeta)(\zeta - M\zeta)^T] = \\ &= \begin{pmatrix} D\xi_1 & Cov(\xi_1, \xi_2) & \dots & Cov(\xi_1, \xi_n) \\ Cov(\xi_1, \xi_2) & D\xi_2 & \dots & Cov(\xi_2, \xi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov(\xi_1, \xi_n) & Cov(\xi_2, \xi_n) & \dots & D\xi_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Коваріаційна матриця має розмірність $n \times n$ і є симетричною, а також невід'ємно визначеною. Якщо квадратна матриця симетрична і невід'ємно визначена, то вона може бути коваріаційною для деякого вектора.

Приклад 12.3. Задана щільність сумісного розподілу випадкових величин (X, Y) :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + 2y), & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

де $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$ – квадрат.

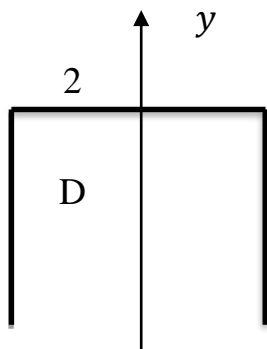
а) Знайти сталу C .

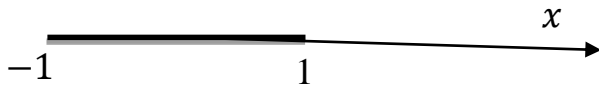
б) $P\{X \leq 0; Y \geq 1\}$

в) Знайти одновимірні щільності розподілу X і Y .

г) Знайти $Cov(X, Y)$

Розв'язок. Намалюємо область D .





а) Маємо з умови нормування: $\iint_D C(x^2 + 2y) dx dy = 1$.

$$\iint_D C(x^2 + 2y) dx dy = C \left(\int_0^2 dy \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_0^2 2y dy \int_{-1}^1 dx \right) = C \left(\frac{4}{3} + 8 \right) = \frac{28C}{3}$$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{28}$$

б) $P\{X \leq 0; Y \geq 1\} = \iint_{\substack{-1 \leq x \leq 0; \\ 1 \leq y \leq 2}} \frac{3}{28} (x^2 + 2y) dx dy = \frac{3}{28} \frac{10}{3} = \frac{5}{14}$.

в) $f_X(x) = \int_0^2 \frac{3}{28} (x^2 + 2y) dy = \frac{3}{28} (2x^2 + 4) = \frac{3}{14} (x^2 + 2)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{14} (x^2 + 2), & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

$f_Y(y) = \int_{-1}^1 \frac{3}{28} (x^2 + 2y) dx = \frac{3}{28} \left(\frac{2}{3} + 4y \right) = \frac{1}{14} (1 + 6y)$.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{14} (1 + 6y), & y \in [0, 2]; \\ 0, & y \notin [0, 2]. \end{cases}$$

г) $Cov(X, Y) = MXY - MXMY = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 xy \frac{3}{28} (x^2 + 2y) dy = \frac{3}{28} \int_{-1}^1 x^3 dx \int_0^2 y dy + \frac{3}{14} \int_{-1}^1 x dx \int_0^2 y^2 dy = \frac{3}{14} 2 \frac{8}{3} = \frac{8}{7}$.

Задачі

12.1. Випадковий вектор (ξ, η) має сумісну щільність $p(x, y)$. Записати в інтегральному вигляді: а) $P\{|\xi| < 1, \eta > 0\}$; б) $P\{\xi < \eta\}$; в) $P\{\xi < x\}$; г) $P\{[\xi] = [\eta]\}$.

12.2. Нехай з круга $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ навмання обирається випадкова точка. Така точка має на цьому крузі рівномірний розподіл. Знайти сумісний розподіл полярних координат r та φ цієї точки. Чи будуть вони незалежними?

12.3. Нехай з квадрата $\{(x, y): -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$ навмання обирається випадкова точка (X, Y) . Знайти сумісний розподіл її прямокутних декартових координат (X, Y) . Чи будуть вони незалежними?

12.4. Нехай випадкова величина ξ , яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0, 1]$, записана у вигляді нескінченного десяткового дробу

$$\xi = 0, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots = \frac{\xi_1}{10} + \frac{\xi_2}{10^2} + \dots + \frac{\xi_n}{10^n} \dots,$$

де $\xi_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Знайти розподіл випадкових величин та їх сумісний розподіл. Чи є ці випадкові величини незалежними?

12.5. Точка (ξ, η) рівномірно розподілена всередині трикутника з вершинами $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 0)$. Знайти $Cov(\xi, \eta)$.

12.6. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[-1, 1]$. При яких дійсних значеннях параметра a величини ξ і $|\xi - a|$ некорельовані? Знайти коваріації випадкових величин а) ξ і ξ^2 ; б) ξ і ξ^3 ; в) $\sin \pi \xi$ і $\cos \pi \xi$.

12.7. Нехай ξ_1 і ξ_2 – незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподілені стандартно нормально. Довести, що випадковий вектор

$$(\eta_1, \eta_2), \text{ де } \begin{cases} \eta_1 = e^{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}}; \\ \eta_2 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right), \end{cases} \text{ має рівномірний розподіл в квадраті}$$

$$[0, 1] \times [0, 1].$$

12.8. Точка (ξ, η) рівномірно розподілена в області $|x| + |y| \leq a$, a – деякий параметр. а) Знайти щільність вектора (ξ, η) ; б) $M(\xi + \eta)$.

12.9. Нехай (ξ, η) – координати випадкової точки, яка має рівномірний розподіл в чверті одиничного круга $\{x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0, y \geq 0\}$. Знайти $Cov(\xi, \eta)$.

12.10. Щільність розподілу випадкового вектора має вигляд:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{\pi(1+x^2)}, & y \in [0, 1]; \\ 0, & y \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Знайти щільності ξ і η окремо. Довести, що вони незалежні. Знайти $P\{\xi\eta < 1\}$

12.11. Нехай ξ, η незалежні і рівномірно розподілені на $[0, 1]$. Знайти щільності розподілу а) $\xi\eta$; б) $\xi - \eta$.

12.12. Нехай ξ, η незалежні, ξ розподілена стандартно нормально, а η має рівномірний розподіл на відрізку $[0, 1]$. Знайти $Cov(a\xi + b\eta, a\xi - b\eta)$.

12.13. Випадковий вектор (ξ, η) має щільність розподілу

$$p(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{при } x \in [0, 1]; y \in [0, 1], \\ 0, & \text{якщо інакше.} \end{cases}$$

Знайти щільність випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

12.14. Випадкові величини ξ, η незалежні, однаково розподілені і мають щільність $p(x, y) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Знайти щільність випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

12.15. Знайти щільність випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$, де ξ, η незалежні і мають гама-розподіл з параметрами (α, ν) і (α, μ) відповідно. (Гама-розподіл з параметрами (α, ν) задається щільністю $p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$).

12.16. Щільність розподілу системи випадкових величин (ξ, η) дорівнює

$$f(x, y) = \begin{cases} ae^{-x} + y & \text{в середині квадрата} \\ (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1), \\ 0 & \text{зовні квадрата.} \end{cases}$$

Визначити сталу a , функцію розподілу (ξ, η) , щільності окремих компонент $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$; $M\xi$, $M\eta$, коваріацію $Cov(\xi, \eta)$. Вказати, чи є випадкові величини ξ , η незалежними.

12.17. В кубі $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ навмання взято точку (ξ, η, ζ) . Знайти $P\{\xi\eta^{1/2}\zeta^{1/4} < t\}$ (t - параметр).

12.18. Нехай ξ , η і ζ – незалежні випадкові величини, які мають однаковий показниковий розподіл з параметром α . Знайти сумісну щільність розподілу випадкового вектора $(\eta - \xi, \zeta - \xi)$.

12.19. Щільність випадкового вектора (ξ, η) дорівнює

$$f_{(\xi, \eta)}(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Знайти окремо щільності ξ , η . Довести, що ξ , η залежні.

12.20. Випадкові величини ξ, η незалежні і мають показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що відношення $\frac{\xi}{\xi + \eta}$ розподілено рівномірно на $[0,1]$.

12.21. Сумісний розподіл випадкових величин (X, Y) має щільність

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(x^2 + y^2)^3} & \text{при } x^2 + y^2 \geq 1; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти щільність випадкової величини $\sqrt{X^2 + Y^2}$.

12.22. Нехай ξ_1, ξ_2, ξ_3 – незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподілені рівномірно на $[0,1]$. Знайти щільність сумісного розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1$; $\eta_2 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$; $\eta_3 = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3}$.

13. Нерівність Чебишова. Теорема Чебишова

Нехай ξ має дисперсію $D\xi$. Тоді для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\{|\xi - M\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Ця нерівність носить назву **нерівність Чебишова**.

Приклад 13.1. Відомо, що $M\xi = 1$; $D\xi = 0,04$ Оцінити $P\{-0,5 < \xi < 0,5\}$.

Розв'язок. $P\{-0,5 \leq \xi \leq 1,5\} = P\{|\xi - 1| \leq 0,5\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| > 0,5\}$. Застосовуємо нерівність Чебишова.

$$P\{|\xi - M\xi| > 0,5\} \leq \frac{D\xi}{(0,5)^2} = \frac{0,04}{0,25} = 0,16.$$

$$P\{-0,5 \leq \xi \leq 1,5\} \geq 1 - 0,16 = 0,84.$$

Узагальнена нерівність Чебишова

Нехай для функції $g(x): R \rightarrow R$ виконуються умови

1) $g(x) \geq 0$.

2) $g(x)$ неспадна на множині значень в.в. ξ .

3) $\exists Mg(\xi) < \infty$.

Тоді для $\forall \varepsilon > 0$:
$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{Mg(\xi)}{g(\varepsilon)}.$$

Задачі

13.1. Нехай випадкова величина X має стандартний нормальний розподіл: $X \sim N(0,1)$. За допомогою нерівності Чебишова оцінити знизу ймовірність події $A = \{-3 < X < 3\}$.

13.2. Нехай відомі числові характеристики випадкової величини X : $MX = 0,5$; $DX = 0,1$. Оцінити ймовірність події $A = \{0,1 < X < 0,9\}$.

13.3. Послідовність незалежних випадкових величин задана законом розподілу

ξ_n	$-100n$	0	$100n$
p_i	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Довести, що для неї виконується закон великих чисел і сформулювати його.

13.4. Послідовність незалежних випадкових величин задана законом розподілу

ξ_n	$-\sqrt{n}$	0	\sqrt{n}
p_i	$\frac{1}{n}$	$1 - \frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

Довести, що для неї виконується закон великих чисел і сформулювати його.

Індивідуальна домашня робота № 1

«Випадкові величини та їх характеристики»

Варіант 1

1. Ймовірність того, що виріб, виготовлений на автоматичному станку, виявиться якісним, дорівнює $0,7$. Для контролю якості регулювання станка робочий час від часу перевіряє одне за одним вироби до першої появи браку, але не більше 5-ти штук кожен раз. Скласти закон розподілу

випадкової величини X - кількості перевірок виробів в одній серії випробувань і знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. Розподіл випадкової величини X має вигляд

$$P\{X = k\} = \frac{C}{k(k+1)}; \quad k=1,2,\dots$$

Знайти а) сталу C ; б) $P\{5 \leq X \leq 8\}$ в) Що можна сказати про MX ?

3. Випадкова величина X задається щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -h; \\ \frac{c}{h}(h+x), & -h \leq x < 0; \\ \frac{c}{h}(h-x), & 0 \leq x < h; \\ 0, & x \geq h, \end{cases}$$

де $h = 10$. Знайти параметр c , функцію розподілу, числові характеристики, $P\{0 < X < h/2\}$. Побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$.

4. Випадкова величина X розподілена показниково з параметром λ . Знайти щільність розподілу випадкових величин $Y = \frac{1}{1-X}$; $Z = e^X$.

5. Розподіл двовимірної випадкової величини задається за допомогою таблиці

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	1/2	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

Чи залежні X та Y ? Знайти

а) одновимірні закони розподілу X та Y ;

б) $r_{X,Y}$;

в) умовну ймовірність $P\{Y = 1 / X = 0\}$;

г) розподіл XU

д) сумісний розподіл $\max(X, Y)$; $\min(X, Y)$.

Варіант 2

1. За деякий проміжок часу амеба може загинути з ймовірністю $1/4$, вижити з ймовірністю $1/4$ і розділитись на дві з ймовірністю $1/2$. В наступний такий самий проміжок часу з кожною амебою незалежно від її "походження" може відбутись те саме з тими ж ймовірностями. Скільки амеб і з якими

ймовірностями може існувати після другого проміжку часу? Скласти закон розподілу X - кількості амеб після другого проміжку часу.

2. Нехай ξ_1, ξ_2 - незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1, λ_2 відповідно. Довести, що умовний розподіл величини ξ_1 при умові, що $\xi_1 + \xi_2 = n$, є біноміальним розподілом з параметрами n і

$$p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

3. Задана функція, яка залежить від параметрів b, c :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & x^2 + bx + c \geq 0, \\ 0, & x^2 + bx + c < 0 \end{cases}$$

Визначити, для яких параметрів ця функція є щільністю розподілу.

4. Щільність розподілу вектора (ξ, η) дорівнює

$$f_{\xi}(x, y) = \begin{cases} 8xy(1 - x^2), & \text{якщо } x \in [0, 1]; y \in [0, 1], \\ 0, & \text{якщо інакше.} \end{cases}$$

Довести, що ξ і η незалежні.

5. Нехай ξ, η - незалежні випадкові величини. Розподіл ξ задається таким

чином: $P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}$. Випадкова величина η є рівномірно розподіленою на $[0, 1]$. Знайти функцію розподілу випадкових величин

а) $\xi + \eta$; б) $\xi\eta$; в) η^ξ .

Варіант 3

1. Серед 10-ти годинників, які поступили в ремонтну майстерню, 6 потребують загальної чистки механізму. Майстер хоче знайти годинник, який потребує загальної чистки механізму. Він розглядає годинники по черзі і, знайшовши, припиняє подальший огляд. Скласти закон розподілу X - кількості оглянутих годинників і знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. Випадкова величина ξ набуває цілих невід'ємних значень з ймовірностями:

$$P\{\xi = n\} = \frac{a^n}{(a+1)^{n+1}}, \quad a > 0. \text{ Знайти } M\xi, D\xi.$$

3. Задана щільність ймовірності випадкової величини X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^4}, & x \leq -1; \\ 0, & -1 < x < 1; \\ \frac{A}{x^4}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Знайти сталу A , $M(X)$, $D(X)$, $P\{3 < X < 4\}$.

4. Нехай випадкова величина X розподілена за законом Коші, тобто має щільність

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Знайти щільність випадкової величини $Y = \frac{X^2}{1+X^2}$.

5. Маємо урну з двома чорними і двома білими кулями. З урни послідовно виймаємо кулі (без повернення) до першої появи білої кулі; ξ - число вийнятих куль. Далі виймання куль продовжується до першої появи чорної кулі або до того моменту, коли всі кулі закінчаться, η - число куль, вийнятих в другій серії. Скласти закон розподілу (ξ, η) , а також ξ і η окремо. Знайти $Cov(\xi, \eta)$.

Варіант 4

1. В урні 6 білих і 4 чорних кулі. З урни виймають кулю 5 разів поспіль, причому кожен раз вийняту кулю повертають в урну. Скласти закон розподілу числа вийнятих білих куль. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
2. Нехай X і Y мають однаковий геометричний розподіл з параметром p , крім того вони незалежні. Знайти а) $P\{X = Y\}$; б) $P\{X \geq 2Y\}$.
3. Випадкова величина ξ має розподіл Парето з параметрами (λ, θ) , якщо її щільність має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta \lambda^\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{якщо } x > \lambda; \\ 0, & \text{якщо } x \leq \lambda \end{cases}$$

Тут $\lambda > 0, \theta > 2$. Записати функцію розподілу ξ , знайти $M\xi, D\xi$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $[0, \lambda + 1)$.

4. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні і розподілені експоненціально з однаковим параметром λ . Знайти щільність розподілу випадкової величини $X = \max\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.
5. Сумісний розподіл випадкових величин (X, Y) має щільність

$$f_{x,y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(x^2 + y^2)^3} \text{ при } x^2 + y^2 \geq 1; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти щільність випадкової величини $\sqrt{X^2 + Y^2}$.

Варіант 5

- 3 урни, в якій лежать 2 білих і 8 чорних куль, виймають 3 кулі. Знайти закон розподілу ймовірностей числа X – вийнятих білих куль. Обчислити $M(X)$, $D(X)$.
- Нехай випадкова величина ξ приймає скінчене число невід'ємних значень x_1, x_2, \dots, x_k . Довести, що при $n \rightarrow \infty$

$$\text{а) } \frac{M\xi^{n+1}}{M\xi^n} \rightarrow \max\{x_1, x_2, \dots, x_k\}; \quad \text{б) } \sqrt[n]{M\xi^n} \rightarrow \max\{x_1, x_2, \dots, x_k\}.$$

- Випадкова величина ξ задається своєю щільністю

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0$$

Записати функцію розподілу ξ , знайти $M\xi, D\xi$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $[3, 7)$.

- Випадкова величина X має щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-2} e^{-\frac{1}{2x^2}}$ на всій прямій. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\frac{1}{X}$.
- Сумісний розподіл випадкових величин ξ, η має щільність

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)}{2}}$$

Знайти щільність вектора $(\xi - \eta, \xi + \eta)$.

Варіант 6

- В партії деталей 20% нестандартних. Відібрано 5 деталей. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед п'яти відібраних, знайти $D(X)$. Побудувати багатокутник розподілу.
- Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	-2	-1	2
p	0,5	0,25	0,25

Обчислити а) $M 2^{|X|} \cos^2\left(\frac{\pi}{12} X\right)$; б) $M(X 2^{|X|})$.

- За відомим «правилом трьох сігм» ймовірність відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання більше, ніж на 3 кореня з дисперсії, мала. Знайти $P\{|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi}\}$, якщо ξ має показниковий розподіл.
- Випадкові величини ξ і η незалежні, причому

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & \text{якщо } x \in (0,1) \\ 0, & \text{якщо інакше.} \end{cases} \quad f_{\eta}(x) = \begin{cases} 2y, & \text{якщо } y \in (0,1) \\ 0, & \text{якщо інакше.} \end{cases}$$

Обчислити розподіл добутку $\xi\eta$.

5. Випадкова точка (X, Y) розподілена рівномірно всередині трикутника з вершинами в точках $(0,0)$; $(2,0)$; $(2,1)$. Знайти MX , MY , DX , DY , $Cov(X, Y)$.

Варіант 7

1. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірності їх відмов відповідно дорівнюють $p_1=0,2$; $p_2=0,5$; $p_3=0,1$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа елементів, які відмовили в одному досліді і знайти її числові характеристики.
2. Розподіл дискретної випадкової величини ξ визначається формулами $P\{\xi = k\} = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$; $k=1,2,3,\dots$. Перевірити виконання умови нормування для ξ . Знайти $M\xi$. Що можна сказати про дисперсію цієї випадкової величини?
3. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1 - \frac{1}{x^3}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$, $M(X)$, $P\{0 < X < 3\}$. Побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$. Що можна сказати про $D(X)$?

4. Випадкові величини X, Y незалежні і мають один і той самий експоненціальний розподіл $P\{X < x\} = P\{Y < x\} = 1 - e^{-x}, x \geq 0$. Знайти $P\{|X - Y| \leq 1\}$.

5. Закон розподілу системи (ξ, η) заданий таблицею

	ξ	-1	0	1
η	-1	1/8	1/12	7/24
	1	5/24	1/6	1/8

Скласти закони розподілу ξ і η окремо. Знайти

а) $M\xi, D\xi, M\eta, D\eta$; б) $Cov(\xi, \eta)$; в) $M(\xi - 2\eta)$; $D(\xi - 2\eta)$.

Варіант 8

1. Стрілець стріляє по мішені до першого влучення, але робить не більше шести пострілів. Ймовірність поцілити при одному пострілі дорівнює 0,6. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа пострілів, які зробив стрілець. Знайти $M(X)$, $D(X)$.
2. Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	1	3	5	7	9
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Скласти закони розподілу випадкових величин $Z = \min\{X, 4\}$; $U = \max\{X, 4\}$. Знайти функцію розподілу Z , побудувати її графік, знайти MZ , DZ .

3. Випадкова величина ξ має гама-розподіл з параметрами (ν, θ) , якщо її щільність має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\theta x}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0 \end{cases}$$

Записати функцію розподілу ξ , знайти $M\xi$, $D\xi$.

4. Нехай X, Y - незалежні однаково розподілені випадкові величини з щільностями розподілу $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $X + Y$.
5. Випадкові величини X та Y незалежні і мають рівномірний розподіл на $[0, 2]$. Знайти функцію розподілу і щільність величин а) $\max(2X, Y^2)$; б) $\max(3X, Y^3)$.

Варіант 9

1. Відбувається ряд незалежних спроб запустити двигун автомобіля. Ймовірність запустити двигун при кожній спробі дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа спроб, яких потребує запуск двигуна. Знайти $M(X)$.
2. Дискретна випадкова величина ξ приймає лише такі значення: -2, -1, 0, 1, 2. Скласти закон розподілу ξ , якщо відомо, що $M\xi = M\xi^3 = 0$; $M\xi^2 = 2$; $M\xi^4 = 6$.
3. Випадкова величина X задана своєю щільністю розподілу $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ e^{-x+1}, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)$. Знайти ймовірність того, що X прийме значення з інтервала $(-2,3)$.

4. Випадкові величини ξ і η незалежні, причому

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{якщо } |x| < 1; \\ 0, & \text{якщо інакше.} \end{cases} \quad f_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Довести, що випадкова величина $\xi\eta$ має нормальний розподіл.

5. Випадкові величини ξ, η незалежні і мають показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що відношення $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ розподілено рівномірно на $[0,1]$.

Варіант 10

1. На базу поступає продукція трьох фабрик, співвідношення продуктивності яких 2:1:2. Відбувається випадковий відбір чотирьох виробів. Розглядаючи число можливих виробів, виготовлених першою фабрикою з числа відібраних, як випадкову величину, скласти для неї закон розподілу, побудувати багатокутник розподілу і знайти числові характеристики.
2. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 - незалежні і мають один і той самий геометричний розподіл $P\{\xi_1 = k\} = P\{\xi_2 = k\} = pq^k$; $k = 0, 1, 2, \dots$ Довести, що

$$P\{\xi_1 = k / \xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{1}{n+1}; \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

3. Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ 1+x, & -1 < x \leq 0; \\ 1-x, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Треба: знайти функцію розподілу, побудувати графіки функції розподілу і щільності, обчислити математичне сподівання і дисперсію, знайти ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

4. Нехай випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = e^{\xi}$. Знайти $M\eta, D\eta$.
5. Сумісний розподіл випадкових величин X і Y має щільність

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x+y), & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти: а) сталу c ; б) щільність випадкової величини X ; в) $MX, DX, Cov(X, Y)$.

Варіант 11

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	1	2,5	3	4
p	?	0,2	0,1	0,4

Побудувати багатокутник розподілу X . Знайти функцію розподілу $F(x)$, побудувати графік $F(x)$. Знайти $M(X), D(X)$.

2. Нехай ξ набуває значень $\pm 1, \pm 2$, кожне з ймовірністю $\frac{1}{4}$, а $\eta = \xi^2$. а) Знайти сумісний розподіл ξ, η . б) Знайти $Cov(\xi, \eta)$. в) Довести, що ξ, η залежні.
3. Чи можна підібрати сталу c так, щоб функція cx^{-4} була щільністю розподілу на множині: а) $[1, \infty)$; б) $[0, \infty)$; в) $[-2, -1]$; г) $[-3, 0)$?
4. Випадкова величина X розподілена рівномірно на $[0, 1]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $X - \frac{1}{X}$.

5. Розподіл двовимірної випадкової величини задається за допомогою таблиці

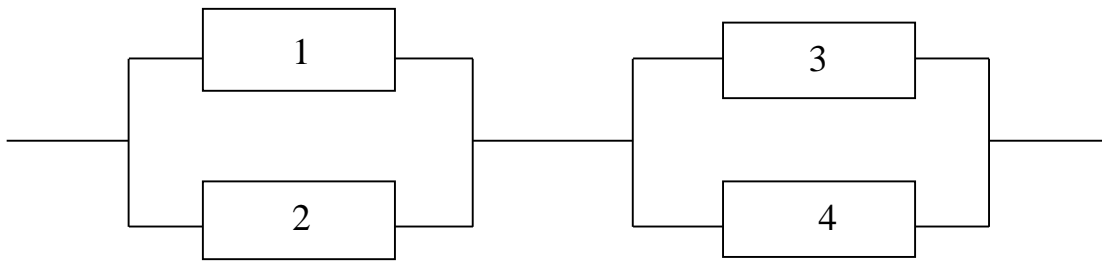
X \ Y	-2	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Чи залежні X та Y ? Знайти

- а) одновимірні закони розподілу X та Y ;
 б) коваріаційну матрицю (X, Y) ;
 в) умовні ймовірності $P\{Y = 1 / X = 0\}; P\{X = 1 / Y = -1\}$.
 г) розподіл $X + Y$
 д) сумісний розподіл $|X|; |X - Y|$.

Варіант 12

1. В задачі наведена схема з'єднання елементів, які утворюють електричну мережу з одним входом і одним виходом.



Вважаємо, що відмови елементів є подіями, незалежними в сукупності. Відомі надійності (ймовірності безвідмовної роботи) p_1, p_2, p_3, p_4 кожного з чотирьох елементів. Відмова будь-якого елемента призводить до переривання сигналу в тій гілці мережі, де знаходиться даний елемент. Нехай випадкова величина X приймає значення 1, якщо в мережі є струм, і 0, якщо струму немає. Скласти закон розподілу X . Знайти $M(X), D(X), \sigma(X)$.

2. Розподіл випадкової величини X має вигляд

$$P\{X = k\} = \frac{C}{e^k}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Знайти а) сталу C ; б) $P\{-6 \leq X \leq 3\}$; $M(X)$.

3. Випадкова величина X має щільність розподілу $f(x) = \frac{c}{1+x^4}$. Знайти сталу c і записати функцію розподілу $F(x)$. Обчислити $M(X)$.
4. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-2, 1]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \frac{1}{X^2}$.
5. Знайти коефіцієнт кореляції між X та $Y = e^{-X}$, якщо а) X має стандартний нормальний розподіл; б) X має нормальний розподіл з параметрами a і σ^2 .

Варіант 13

1. Партія містить 20% нестандартних деталей. Відібрано 6 деталей. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед шести відібраних, знайти $M(X), D(X)$. Побудувати багатокутник розподілу функцію розподілу.

- Нехай ξ_1, ξ_2 - незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1, λ_2 відповідно. Довести, що випадкова величина $\xi_1 + \xi_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.
- Випадкова величина X має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}, & 0 < x \leq \frac{3}{2}\pi; \\ 0, & x > \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, а також ймовірність, що X прийме значення з інтервала $(0, \frac{\pi}{2})$.

- Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-2, 1]$. Знайти щільність розподілу випадкових величин $Y = X^5$; $Z = |X - 5|$.
- З урни, в якій 4 білих, 6 чорних і 10 червоних куль, виймаємо одну кулю. Випадкові величини X, Y, Z визначаються умовами:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{якщо з'явиться біла куля;} \\ 0, & \text{якщо з'явиться чорна або червона куля.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{якщо з'явиться чорна куля;} \\ 0, & \text{якщо з'явиться біла або червона куля.} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{якщо з'явиться червона куля;} \\ 0, & \text{якщо з'явиться чорна або біла куля.} \end{cases}$$

а) Скласти сумісні закони розподілу (X, Y) і (Y, Z) .

б) Знайти коефіцієнт кореляції $r(X, Z)$.

в) Знайти умовну ймовірність $P\{Y = 1 / X = 0\}$.

г) Знайти сумісний закон розподілу величин $\min(X, Y)$ і $\max(Y, Z)$.

Варіант 14

- Жюрі складається з трьох суддів. Перший і другий суддя приймають правильне рішення незалежно одне від одного з ймовірністю 0,9, а третій суддя для прийняття рішення кидає монету. Кінцеве рішення жюрі приймає, виходячи з більшості голосів. Нехай випадкова величина X приймає значення 1, якщо жюрі винесло правильне рішення, і 0, якщо неправильне. Скласти закон розподілу X , знайти $M(X)$, $D(X)$.
- Знайти розподіл суми $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, незалежних випадкових величин, кожна з яких має геометричний розподіл з параметром p .

3. За відомим «правилом трьох сігм» ймовірність відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання більше, ніж на 3 кореня з дисперсії, мала. Знайти $P\{|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi}\}$, якщо ξ має: а) рівномірний розподіл на $[-1,1]$; б) $P\{\xi = -1\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{18}$; $P\{\xi = 0\} = \frac{8}{9}$.

4. Випадкова величина ξ розподілена за законом Релея зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти щільність випадкової величини $\eta = e^{-\xi^2}$.

5. Сумісний розподіл випадкових величин ξ, η має щільність

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)}{2}}.$$

Знайти щільності а) η ; б) $\xi + \eta$.

Варіант 15

1. Стрілець стріляє по мішені до першого влучення, але робить не більше шести пострілів. Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі – 0,6. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа пострілів, зроблених стрільцем. Знайти $M(X)$, $D(X)$. Побудувати функцію розподілу X .
2. Нехай ξ, η – незалежні випадкові величини. Випадкова величина ξ має розподіл $P\{\xi = 1\} = P\{\xi = -1\} = 1/2$, η має функцію розподілу $F(x) = P\{\eta < x\}$. Записати функцію розподілу величин а) $\zeta = \xi + \eta$; б) $\zeta = \xi\eta$; в) $\zeta = \xi^2\eta$.
3. Випадкова величина X має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 < x < \pi; \\ 0, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, а також ймовірність, що X прийме значення з інтервалу $(0, \frac{\pi}{2})$.

4. Випадкова величина ξ розподілена зі щільністю $f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}}$; $b > 0$.

Знайти функцію розподілу ξ . Знайти $M\xi, D\xi$.

5. Щільність випадкового вектора (ξ, η) дорівнює

$$f_{(\xi, \eta)}(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Знайти окремо щільності ξ, η . Довести, що ξ, η залежні.

Варіант 16

1. В кошику лежать 4 яблука і 6 помаранчів. Випадковим чином з нього беруть 3 фрукти. Нехай X – кількість яблук серед відібраних. Знайти закон розподілу X і функцію розподілу. Обчислити $MX, DX, P\{X > 1\}$. Також знайти MY, DY випадкової величини $Y = 4X + 3$.
2. Чи можуть функції а) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$; б) $f(x) = e^{-x}$; в) $f(x) = \cos x$; г) $f(x) = 1$ бути щільностями розподілу деякої випадкової величини?
3. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти сталу K , функцію розподілу $F(x)$, $M\xi, D\xi, P\left\{\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)\right\}$.

$$f(x) = \begin{cases} K \cos x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right); \\ 0, & x \notin \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

4. Нехай ξ і η - незалежні випадкові величини; ξ розподілена рівномірно на $[0,1]$, η має своїм розподілом $P\{\eta = 0\} = P\{\eta = 1\} = 1/2$. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.
5. Нехай ξ, η – незалежні стандартні нормальні випадкові величини. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$.

Варіант 17

1. Два гральних кубики кидають одночасно 3 рази. Нехай ξ – число випадань парної кількості на обох кубиках – i на першому, i на другому. Знайти закон розподілу ξ і функцію розподілу. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi > 1\}$.
2. Нехай ξ і η незалежні, ξ має геометричний розподіл з параметром $\frac{1}{2}$, η має геометричний розподіл з параметром $\frac{2}{3}$. Знайти розподіл випадкової величини $\min(\xi, \eta)$.
3. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\left\{\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ 1+x, & -1 < x \leq 0; \\ 1-x, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$
4. Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини, розподілені рівномірно на $[0,1]$ і $[0,2]$ відповідно. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.
5. В урні 5 однакових куль з номерами від 1 до 5. Здійснюється вибірка з поверненням доти, поки не з'явиться куля з парним номером. Нехай випадкова величина X – це парний номер кулі, на якій завершується вибірка. Y – число виймань кулі. Знайти сумісний закон розподілу пари (X, Y) , одновимірні закони розподілу X та Y . Знайти $MX, DX, MY, DY, Cov(X, Y)$. Чи є X та Y незалежними?

Варіант 18

1. В трьох урнах знаходяться кулі, що відрізняються лише кольором. В першій урні 1 біла і 3 чорних кулі, в другій – 2 білих і 2 чорних, в третій – 2 білих і 3 чорних. З кожної урни навмання виймають по одній кулі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа вийнятих білих куль серед цих трьох. Знайти закон розподілу X і функцію розподілу. Обчислити MX , DX , $P\{X \leq 1\}$.
2. Випадкова величина X має від'ємний біноміальний розподіл з параметрами (r, p) , $(r > 0$ – ціле, $0 < p < 1)$, якщо вона приймає значення $k = 0, 1, \dots$ з ймовірностями $P\{X = k\} = C_{r+k-1}^k p^r (1-p)^k$. Знайти найбільш вірогідне значення k .
3. Випадкова величина ξ розподілена зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 1; \\ Cx^{-\frac{3}{2}}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Знайти сталу C ; $M\xi$, $D\xi$, функцію розподілу $F(x)$, $P\{0,1 < \xi < 0,2\}$.

4. Випадкова величина X розподілена рівномірно на $[0,4]$. Знайти а) функцію розподілу випадкової величини $Y_1 = 2X - 3$; б) щільність розподілу випадкової величини $Y_2 = 9X^2$; в) функцію розподілу випадкової величини $Y_3 = e^{-2X}$.

5. Задана щільність сумісного розподілу випадкових величин (X, Y) :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + 2y), & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

де $D = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 5\}$ – прямокутник. Знайти сталу C , $P\{X \leq 0; Y \geq 2\}$, одновимірні щільності розподілу X і Y . Знайти $MX, DX, MY, DY, Cov(X, Y)$.

Варіант 19

1. В зв'язці 7 ключів, з яких лише 2 підходять до замка. Послідовно перебираючи ключі, намагаємось відкрити замок. Кожний ключ обирається випадковим чином і використовується лише 1 раз. Знайти закон розподілу X – числа намагань відкрити замок. Побудувати функцію розподілу X і її графік. Обчислити $MX, DX, P\{X \leq 2\}$.
2. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 - незалежні і мають один і той самий геометричний розподіл $P\{\xi_1 = k\} = P\{\xi_2 = k\} = pq^k$; $k = 0, 1, 2, \dots$ Довести, що

$$P\{\xi_1 = k / \xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{1}{n+1}; \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

3. Випадкова величина ξ задається своєю щільністю

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0$$

Записати функцію розподілу ξ , знайти $M\xi, D\xi$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $(0,6]$.

4. Випадкові величини X_1, X_2, \dots, X_n незалежні і мають однаковий розподіл зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 8 - 2x, & x \in [3,4]; \\ 0, & x \notin [3,4]. \end{cases}$$

Знайти щільність випадкової величини $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

5. Нехай випадкові величини ξ, η незалежні, причому ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$, а η – на відрізку $[1,2]$. Знайти математичні сподівання і дисперсії наступних величин а) $\zeta = \xi\eta$; б) $\zeta = \max(\xi, \eta)$.

Варіант 20

1. В телевікторині гравцю послідовно задають питання до першої неправильної відповіді. При цьому гравець повинний вибрати одну з чотирьох запропонованих версій відповіді, одна з них правильна, інші – хибні. Максимальне число питань дорівнює 4. Припустимо, що гравець обирає відповідь на кожне питання навмання. Випадкова величина X – число питань, що були задані гравцю. Який закон розподілу X ? Побудувати функцію розподілу X і її графік. Обчислити MX , DX . Знайти K_* - найбільш ймовірне число заданих гравцю питань.
2. Випадкова величина X має від'ємний біноміальний розподіл з параметрами (r, p) , ($r > 0$ – ціле, $0 < p < 1$), якщо вона приймає значення $k = 0, 1, \dots$ з ймовірностями $P\{X = k\} = C_{r+k-1}^k p^r (1-p)^k$. Довести, що $MX = \frac{r(1-p)}{p}$.
3. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\left\{\xi \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)\right\}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 2\cos 2x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

4. Випадкова величина X розподілена рівномірно на відрізку а) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; б) $[0, \pi]$. Знайти щільність розподілу випадкових величин $Y = \sin X$.
5. Сумісний розподіл випадкових величин ξ і η має щільність $f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$
Знайти $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $Cov(\xi, \eta)$.

Варіант 21

1. Дискретна випадкова величина X має закон розподілу

X	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Побудувати закони розподілу наступних величин

а) $\eta_1 = 2^X$;

б) $\eta_2 = X^2 + 1$;

в) $\eta_3 = \min(X, 1)$;

г) $\eta_4 = \frac{1}{3-X}$. Знайти $M\eta_4$, $D\eta_4$.

2. Розподіл випадкової величини X має вигляд

$$P\{X = k\} = \frac{C}{k(k+1)}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Знайти а) сталу C ; б) $P\{5 \leq X \leq 8\}$ в) Що можна сказати про MX ?

3. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi \in (-2, 2)\}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{25}x, & 0 < x \leq 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

4. Нехай випадкові величини X , Y незалежні і кожна має рівномірний розподіл на $[0, 2]$. Знайти функції розподілу і щільності наступних величин а) $\max(2X, Y^2)$; б) $X - Y^2$.
5. Випадкові величини ξ, η незалежні і нормально розподілені з параметрами α і σ^2 . Знайти коефіцієнт кореляції величин $\alpha\xi + \beta\eta$ і $\alpha\xi - \beta\eta$, а також розписати знаходження їх сумісного розподілу.

Варіант 22

1. Відбувається ряд незалежних випробувань, в результаті яких відбувається «УСПІХ» з ймовірністю 0,9 і «НЕВДАЧА» з ймовірністю 0,1. Випробування проводяться до першої появи «УСПІХу» Скласти закон розподілу випадкової величини X - кількості випробувань до першої появи «УСПІХу» і знайти $M(X)$, $D(X)$. Як називається розподіл X ?
2. Дискретна випадкова величина X має закон розподілу

X	-2	-1	1	2
p_i	1/4	1/4	1/4	1/4

Побудувати закони розподілу наступних величин

а) $\eta_1 = \sin \frac{\pi}{X}$;

б) $\eta_2 = X2^{|X|}$;

в) $\eta_3 = X \sin \left(\frac{\pi}{3} X \right)$. Знайти $M\eta_1$, $M\eta_2$, $M\eta_3$.

3. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P \left\{ \xi \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right) \right\}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

4. Нехай випадкові величини X , Y незалежні і кожна має рівномірний розподіл на $[0,2]$. Знайти функції розподілу і щільності наступних величин а) $|X - Y|$; б) $\min(X, Y^2)$; в) $X - 3Y$.
5. Нехай ξ, η і ζ – незалежні випадкові величини, які мають однаковий показниковий розподіл з параметром α . Знайти сумісну щільність розподілу випадкового вектора $(\eta - \xi, \zeta - \xi)$.

Варіант 23

1. З урни, в якій лежать 5 жовтих і 5 блакитних куль, виймають 3 кулі. Знайти закон розподілу ймовірностей числа X – вийнятих блакитних куль. Обчислити $M(X)$, $D(X)$. Побудувати функцію розподілу X .

- Довести, що якщо кожна з випадкових величин ξ, η приймає лише 2 значення, то з рівності $M\xi\eta = M\xi M\eta$ випливає незалежність ξ і η .
- Випадкова величина X має розподіл Релея, її щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} Axe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , MX , DX . Побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$.

- Нехай ξ_1, ξ_2, ξ_3 – незалежні однаково розподілені випадкові величини, які мають щільність $f(x) = \begin{cases} cx^{-4}, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [1; 2]. \end{cases}$ Знайти сталу c і функцію розподілу величини $\max\{\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3\}$.
- Випадковий вектор (X, Y) рівномірно розподілений в трикутнику з вершинами $A_1(0,0)$; $A_2(0,4)$; $A_3(-2,0)$. Записати сумісну щільність вектора (X, Y) , $P\{X \leq -1; Y \geq 1\}$, одновимірні щільності і функції розподілу випадкових величин X і Y . Знайти $MX, DX, MY, DY, r(X, Y)$.

Варіант 24

- Заданий закон розподілу випадкової величини X .

X	-2	0	1	3
p	0,1	0,5	0,3	0,1

Скласти закони розподілу випадкових величин $Y=X^2$ і $Z=3X$. Знайти $M(Y)$, $D(Y)$. Побудувати функцію розподілу Y .

- Випадкова величина X приймає лише два значення. Відомо, що $MX = 0$; $MX^2 = 1$; $MX^3 = 0$. Скласти закон розподілу X .
- Випадкова величина X задається функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, & x \in [0,1); \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Знайти щільність $f(x)$, $M\xi$, $P\{\xi \in (0,1/3)\}$.

- Випадкові величини X і Y незалежні, причому X має абсолютно неперервний розподіл зі щільністю $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, а дискретна випадкова

величина Y приймає лише 2 значення: $P\{Y = 1\} = \frac{1}{4}$; $P\{Y = 2\} = \frac{3}{4}$.
Знайти щільність розподілу випадкової величини $X + Y$.

5. Розподіл двовимірної випадкової величини задається за допомогою таблиці

X \ Y	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
0	2/24	1/12	1/16
1	3/24	1/12	1/16

Чи залежні X та Y ? Знайти

- одновимірні закони розподілу X та Y ;
- умовні ймовірності $P\{Y = 1 / X = 0\}$; $P\{X = 1 / Y = -1\}$;
- сумісний розподіл $X + Y$, XY ;
- розподіл XY .

Варіант 25

- Пару симетричних монет підкидають тричі, X – число тих випадків, коли на обох монетах випав герб. Скласти закон розподілу випадкової величини X , функцію розподілу $F(x)$ і знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
- Гральну кістку підкидають n разів. Нехай X - число появ одиниці, Y – число появ шістки при цих n підкиданнях. Знайти коефіцієнт кореляції між X та Y .
- Випадкова величина ξ задається щільністю(розподіл Коші):

$$f(x) = \frac{C}{2\pi \left(\frac{1}{4} + (x - 1)^2 \right)}$$

Знайти параметр c , функцію розподілу $F(x)$, $P\{\xi \in [5,10]\}$. Чи можна знайти $M\xi$? Чому?

4. Нехай випадкові величини X і Y незалежні і мають розподіл:

X	-1	1
p_i	1/2	1/2

Y	-1	0	1
p_i	1/4	1/2	1/4

Чи будуть величини XY та Y а) незалежні; б) некорельовані?

5. Сумісний розподіл випадкових величин ξ і η має щільність

$$f(x, y) = \frac{c}{1 + x^2 + x^2 y^2 + y^2}.$$

- а) Знайти сталу c .
 б) Встановити, чи залежні величини ξ і η .
 в) Знайти щільність розподілу ξ .
 г) Знайти ймовірність $P\{|\xi| < 1, |\eta| \leq 1\}$.

14. Характеристичні функції

Δ **Характеристичною функцією** $\varphi(z)$ випадкової величини ξ називається комплекснозначна функція дійсної змінної $z \in R$, заданої співвідношенням

$$\varphi(z) = M e^{iz\xi} = M(\cos z\xi + i \sin z\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x).$$

Отже, для дискретних випадкових величин означення набуває вигляду

$$\varphi(z) = \sum_k e^{izx_k} p_k$$

для абсолютно неперервних

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f_{\xi}(x) dx$$

Характеристична функція однозначно визначає розподіл випадкової величини.

Приклад 14.1. Нехай випадкова величина ξ має розподіл

ξ	-1	1
p_i	1/2	1/2

Знайти характеристичну функцію ξ .

Розв'язок. $\varphi(z) = M e^{iz\xi} = e^{iz} \frac{1}{2} + e^{-iz} \frac{1}{2} = \cos z.$

Приклад 14.2. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ , розподіленої за законом Пуассона: $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad k = 0, 1, \dots, n, \dots$

Розв'язок. $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{izk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{iz}\lambda)^k}{k!}.$

Застосуємо стандартний розклад $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Тоді

$$\varphi(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{iz}} = e^{\lambda(e^{iz}-1)}.$$

Приклад 14.3. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ , розподіленої рівномірно на $[a, b]$.

Розв'язок. Щільність рівномірного на $[a, b]$ розподілу має вигляд $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$. Тому
$$\varphi(z) = M e^{iz\xi} = \int_a^b e^{izx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{e^{izx}}{iz} \Big|_a^b = \frac{e^{izb} - e^{iza}}{iz(b-a)}.$$

Деякі властивості характеристичних функцій

1. $\varphi(0) = 1$. $|\varphi(z)| \leq 1$ для всіх $z \in R$.

2. $\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \varphi_{\xi_1}(z) \cdot \varphi_{\xi_2}(z)$, де ξ_1, ξ_2 незалежні. (Характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх характеристичних функцій).

3. Якщо $M|\xi|^n < \infty$, то справедлива тотожність $\varphi^{(n)}(0) = i^n M\xi^n$; $n \geq 1$.

4. Справедливий розклад за формулою Тейлора характеристичної функції

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^n \frac{i^k z^k}{k!} M\xi^k + o(z^n),$$

якщо існують відповідні математичні сподівання.

Твердження. Характеристична функція нормального розподілу з параметрами a, σ^2 має вигляд $\varphi(z) = e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}$.

Приклад 14.4. Знайти математичне сподівання і дисперсію нормальної випадкової величини ξ , розподіленої з параметрами a і σ^2 , за допомогою характеристичної функції.

Розв'язок. За властивістю (3) характеристичних функцій $\varphi'(0) = iM\xi$; $\varphi''(0) = i^2 M\xi^2 = -M\xi^2$. Використовуючи твердження про характеристичну функцію нормального розподілу, маємо: $\varphi'(0) = \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \right)' \Big|_{z=0} = \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \right) (ia - \sigma^2 z) \Big|_{z=0} = ia = iM\xi \Rightarrow M\xi = a$.

$$\varphi''(0) = \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \right)'' \Big|_{z=0} = \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \right) (ia - \sigma^2 z)^2 + \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \right) (-\sigma^2) \Big|_{z=0} = -a^2 - \sigma^2 = -M\xi^2 \Rightarrow M\xi^2 = a^2 + \sigma^2; D\xi = M\xi^2 - a^2 = \sigma^2.$$

Слабка збіжність розподілів

Δ Кажуть що послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}$ з функціями розподілу $F_n(x) = P\{\xi_n < x\}$ збігається слабо до випадкової величини ξ з функцією розподілу $F(x) = P\{\xi < x\}$ (позначення $\xi_n \Rightarrow \xi$), якщо $F_n(x) \rightarrow F(x)$ для всіх значень x , які є точками неперервності функції $F(x)$.

Теорема Леві. Для того, щоб мала місце слабка збіжність ξ_n до ξ необхідно і достатньо, щоб $\varphi_{\xi_n}(z) \rightarrow \varphi_{\xi}(z)$, $n \rightarrow \infty$.

Приклад 1.5. (Теорема Пуассона) Нехай ξ_n - біноміальна випадкова величина, розподілена з параметрами n, p_n . Довести, що якщо $np_n \rightarrow \lambda, n \rightarrow \infty$, то розподіл ξ_n збігається до Пуассонівського з параметром λ .

Розв'язок. Спочатку знайдемо характеристичну функцію ξ_n . Як відомо, біноміальну випадкову величину можна представити за допомогою суми випадкових однаково розподілених незалежних індикаторів:

$$\xi_n = \sum_{i=1}^n I_k, \text{ де } I_k = \begin{cases} 1 \text{ з ймовірністю } p_n, & \text{"успіх"}, \\ 0 \text{ з ймовірністю } 1 - p_n, & \text{"невдача"} \end{cases}$$

Відмітимо, що характеристична функція індикатора:

$$\varphi_{I_k}(z) = M e^{izI_k} = e^{iz} p_n + (1 - p_n).$$

Скориставшись властивістю (2) характеристичних функцій, можемо зробити такі перетворення: $\varphi_{\xi_n}(z) = M e^{iz \sum_{i=1}^n I_k} = \left| \begin{array}{l} \text{Х. ф. суми} \\ \text{незалежних в. в.} \end{array} \right| = \prod_{k=1}^n M e^{izI_k} = (e^{iz} p_n + (1 - p_n))^n = e^{n \ln(1 + p_n(e^{iz} - 1))}$.

Зробимо заміну $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$, де $\lambda_n \rightarrow \lambda, n \rightarrow \infty$ і розкладемо за формулою Тейлора логарифм: $\ln(1 + x) = x + o(x)$.

$$\varphi_{\xi_n}(z) = e^{n \ln\left(1 + \frac{\lambda_n}{n}(e^{iz} - 1)\right)} = e^{n\left(\frac{\lambda_n}{n}(e^{iz} - 1) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\lambda_n(e^{iz} - 1) + o(1)} \rightarrow e^{\lambda(e^{iz} - 1)}.$$

Теорема доведена.

Задачі

14.1. Нехай випадкова величина ξ розподілена наступним чином

ξ	-1	0	1
p_i	1/3	1/3	1/3

Знайти характеристичну функцію ξ .

14.2. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподіл яких має вигляд

ξ	-1	1
p_i	1/2	1/2

Знайти характеристичну функцію величини $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$.

14.3. Обчислити характеристичну функцію а) розподілу Пуассона з параметром λ ; б) біноміального розподілу з параметрами p і m ; в) геометричного розподілу з параметром p .

14.4. Нехай ξ – рівномірно розподілена випадкова величина на відрізку $[a, b]$. Знайти характеристичну функцію ξ .

14.5. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ . Обчислити характеристичну функцію ξ . За допомогою характеристичної функції знайти математичне сподівання і дисперсію ξ .

14.6. Довести, що якщо $\varphi(z)$ – характеристична функція ξ , то $\eta = a + b\xi$ має характеристичну функцію $e^{iaz}\varphi(bz)$.

14.7. Нехай ξ_1 і ξ_2 – незалежні однаково розподілені випадкові величини з характеристичною функцією $\varphi(z)$. Записати характеристичну функцію випадкової величини $\eta = \xi_1 - \xi_2$.

14.8. Випадкова величина ξ має двосторонній показниковий розподіл зі щільністю $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in R$. Знайти характеристичну функцію ξ .

14.9. Випадкова величина ξ має розподіл Коші зі щільністю $p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$, $a > 0$. Знайти характеристичну функцію ξ .

14.10. Випадкова величина ξ має щільність розподілу $p(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a; \\ \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| < a. \end{cases}$ Знайти характеристичну функцію ξ .

14.11. Використовуючи апарат характеристичних функцій, довести: якщо ξ_1 і ξ_2 незалежні, розподілені нормально з параметрами: $\xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$; $\xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$, то випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ теж розподілена нормально $\eta \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

14.12. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1 та λ_2 відповідно. Довести, що випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

14.13. а) Випадкова величина ξ має гама-розподіл з параметрами (α, β) . Довести, що характеристична функція ξ дорівнює $\varphi(z) = \left(\frac{\beta}{\beta - iz}\right)^\alpha$.

- б) Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і мають гама-розподіл з параметрами (α_1, β) та (α_2, β) відповідно. Довести, що випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має гама-розподіл з параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.
- 14.14. Нехай $\xi_{p,n}$ – випадкова величина, розподілена за біноміальним законом з параметрами p і n . Довести, що коли $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $pn \rightarrow \lambda < \infty$, то розподіл величини $\xi_{p,n}$ слабо збігається до розподілу випадкової величини ξ_λ , розподіленої за законом Пуассона з параметром λ .
- 14.15. Нехай ξ – випадкова величина з характеристичною функцією $\varphi(z)$; η – рівномірно розподілена на $[0,1]$ величина. Крім того, ξ і η незалежні. Записати характеристичну функцію $\xi\eta$.
- 14.16. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні випадкові величини, що мають стандартний нормальний розподіл. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини $\eta = \frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_2^2)$.
- 14.17. Нехай ξ_λ – випадкова величина, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda < \infty$. Довести, що при $\lambda \rightarrow \infty$ розподіл випадкової величини $\eta = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ збігається слабо до розподілу випадкової величини, що має стандартний нормальний розподіл.
- 14.18. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, причому $M\xi_n = a > 0$. Нехай ν_p – незалежна від $\{\xi_n\}$ випадкова величина, розподілена за геометричним законом з параметром $p > 0$. Розглянемо випадкову величину $\zeta_p = \sum_{k=1}^{\nu_p} \xi_k$.
- а) Довести, що при $p \rightarrow 0$ розподіл випадкової величини $p\zeta_p$ збігається слабо до розподілу випадкової величини ζ , розподіленої за показниковим законом з параметром $\frac{1}{a}$.
- б) Нехай $M\xi_1 = 0$; $D\xi_1 = \sigma^2 > 0$. Довести, що розподіл випадкової величини $\sqrt{p}\zeta_p$ при $p \rightarrow 0$ збігається слабо до розподілу випадкової величини з характеристичною функцією $\left(1 + \frac{1}{2}z^2\sigma^2\right)^{-1}$.
- 14.19. Випадкова величина ξ називається **симетричною**, якщо ξ та $-\xi$ мають однакові функції розподілу. Довести, що симетричність ξ еквівалентна дійснозначності характеристичної функції.
- 14.20. Нехай ξ, τ – незалежні випадкові величини, причому ξ розподілена нормально $N(0, \sigma^2)$, а випадкова величина τ розподілена за показниковим законом з параметром λ . Знайти характеристичну функцію величини $\eta = \sqrt{\tau}\xi + a\tau$.

- 14.21. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ , характеристична функція якої дорівнює а) $\varphi(z) = \frac{1}{az} \sin az$; б) $\varphi(z) = \frac{4}{z^2} \cos z \sin^2 \frac{z}{2}$.
- 14.22. Нехай послідовність випадкових величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ розподілена нормально: $\xi_n \sim N(a_n, \sigma_n^2)$, і нехай $a_n \rightarrow a$, $\sigma_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Довести: розподіл випадкової величини ξ_n збігається при $n \rightarrow \infty$ до розподілу, зосередженому в т. а, тобто до розподілу випадкової величини $\eta = a$ з ймовірністю 1.
- 14.23. Випадкова величина ξ_n задана розподілом: $P\{\xi_n = x_k\} = \frac{1}{n+1}$; $x_k = \frac{k}{n}$; $k = \overline{0, n}$.
- а) Знайти характеристичну функцію ξ_n ;
 б) Довести, що при $n \rightarrow \infty$ ξ_n збігається до рівномірного розподілу на $[0, 1]$.
- 14.24. Випадкова величина $\xi_{\lambda\alpha}$ має гама-розподіл з параметрами (λ, α) . Довести слабку збіжність при $\alpha \rightarrow \infty$ випадкової величини $\zeta_n = \frac{\lambda \zeta_{\lambda\alpha} - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$ до випадкової величини ζ , розподіленої стандартно нормально.
- 14.25. Характеристична функція випадкової величини зі щільністю Коші $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ дорівнює $\varphi(z) = e^{-|z|}$. Довести, що випадкова величина $\zeta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$, де ξ_k розподілені за законом Коші і незалежні, теж розподілена зі щільністю Коші.

15. Елементи теорії випадкових процесів

(Ω, \mathcal{F}, P) - ймовірнісний простір, $T \subset R$.

Δ **Випадковим процесом** називається функція $\xi(t, \omega)$; $\xi: T \times \Omega \rightarrow R$, така, що при кожному значенні $t \in T$ випадковою величиною, заданою на ймовірнісному просторі (Ω, \mathcal{F}, P) . Позначення: $\xi(t)$.

При фіксованому значенні ω маємо не випадкову функцію змінної t , яку називають **реалізацією** або **траєкторією** випадкового процесу

Деякі характеристики випадкового процесу

1. Одновимірний розподіл $F(x, t) = P\{\xi(t) < x\}$.
2. Скінченновимірний розподіл

$$F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1; \dots; \xi(t_n) < x_n\}$$

Це функція розподілу випадкового вектора $(\xi(t_1); \dots; \xi(t_n))$ для деякого $n \in N$ та $t_1, \dots, t_n \in T$.

Щільність скінченновимірної розподілу (якщо така існує)

$$f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

3. Математичне сподівання і дисперсія випадкового процесу

$$m(t) = M\xi(t); \quad D(t) = D\xi(t)$$

4. Коваріаційна функція

$$\begin{aligned} B(t, s) &= \text{Cov}(\xi(t), \xi(s)) = M(\xi(t) - m(t))(\xi(s) - m(s)) = \\ &= M\xi(t)\xi(s) - m(t)m(s) \end{aligned}$$

5. Кореляційна функція

$$r(t, s) = r(\xi(t), \xi(s)) = \frac{\text{Cov}(\xi(t), \xi(s))}{\sqrt{D\xi(t)D\xi(s)}} = \frac{B(t, s)}{\sqrt{D(t)D(s)}}$$

6. Скінченновимірна характеристична функція випадкового процесу $\xi(t), t \in T$, яка відповідає значенню процесу в точках t_1, \dots, t_n :

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}^{\xi(t)}(z_1, \dots, z_n) = M e^{i \sum_{k=1}^n z_k \xi(t_k)}$$

Δ Процес $\xi(t), t \in T$ називається **процесом з незалежними приростами**, якщо для $\forall n \in N, \forall t_1, \dots, t_n \in T: t_1 < t_2 < \dots < t_n$ випадкові величини

$$\xi(t_1), \quad \xi(t_2) - \xi(t_1), \quad \xi(t_3) - \xi(t_2), \quad \dots, \quad \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

є незалежними.

Δ Процес з незалежними приростами називається **однорідним**, якщо розподіл $\xi(t+h) - \xi(t)$ не залежить від t , а лише від h .

Δ Випадковий процес називається **стаціонарним** (в широкому сенсі), якщо коваріаційна функція процесу $B(t, s)$ залежить лише від різниці $t - s$.

Δ **Процесом Пуассона з параметром λ** називається однорідний процес з незалежними приростами $N(t)$, такий, що:

$$1) N(0) = 0;$$

$$2) N(t) - N(s) \text{ має розподіл Пуассона з параметром } \lambda(t-s) \quad \forall t, s: t > s.$$

λ називається **інтенсивністю** процесу Пуассона.

Δ **Процесом Вінера** називається однорідний процес з незалежними приростами, такий, що :

$$1) W(0) = 0;$$

2) $W(t) - W(s)$ розподілені за нормальним законом $N(0, t - s)$ для $\forall t > s$

Задачі

15.1. Нехай η - випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. знайти одновимірні розподіли процесу $X(t)$:

а) $X(t) = \eta t$;

б) $X(t) = \min(\eta, t)$;

в) $X(t) = \max(\eta, t^2)$;

г) $X(t) = \text{sign}(\eta + t)$.

15.2. Нехай τ - випадкова величина, рівномірно розподілена на $[0,1]$, а $\{X(t), t \in [0,1]\}$ - процес очікування, пов'язаний з цією величиною, тобто $X(t) = I\{\tau \leq t\}, t \in [0,1]$. Знайти всі а) одновимірні; б) двовимірні розподіли процесу.

15.3. Знайти коваріаційну функцію процесу $X(t) = \xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t) + \dots + \xi_n f_n(t), t \in R$, де $f_1(t), \dots, f_n(t)$ - невідповідні функції, а ξ_1, \dots, ξ_n - некорельовані випадкові величини з дисперсіями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

15.4. Нехай випадковий процес представлений зображенням

$$X(t) = m + \sum_{k=1}^n (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t),$$

де m, ω_k - сталі; U_k, V_k - випадкові величини з нульовими математичними сподіваннями і некорельовані; $DU_k = DV_k = D_k$. $MX(t), DX(t), B(t, s)$.

15.5. Чи можуть дані функції бути коваріаційними? (Перевірити їх на невід'ємновизначеність).

а) $B(t, s) = \sin t \sin s$; б) $B(t, s) = \sin(t + s)$; в) $B(t, s) = t^2 + s^2$.

15.6. Нехай випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами a і σ^2 ; $b \in R$. Знайти всі скінченновимірні розподіли випадкового процесу $\xi(t) = \xi t + b$, а також $m(t), B(t, s)$.

15.7. Нехай ξ, η - некорельовані випадкові величини з нульовими середніми і одиничними дисперсіями. Знайти математичне сподівання $m(t)$ і коваріаційну функцію $B(t, s)$ випадкового процесу $\xi(t) = t + \xi \cos \gamma t + \eta \sin \gamma t$.

15.8. Нехай $\xi(t) = \eta \cos(\gamma t - \theta)$, де η - випадкова величина з нульовим середнім і дисперсією σ^2 ; θ - випадкова величина, розподілена рівномірно на $[0, 2\pi]$; γ - невідповідний параметр. Випадкові величини η і θ незалежні. Знайти коваріаційну функцію процесу $\xi(t)$. Чи є він стаціонарним?

- 15.9. Нехай $\xi(t) = \sigma \cos 2\pi(\xi t + \eta)$, де $\sigma > 0$ – стала; ξ – випадкова величини зі щільністю $f(x)$, причому $0 \leq \xi \leq 1/2$; η – випадкова величина, розподілена рівномірно на $[-1/2, 1/2]$. Випадкові величини ξ і η незалежні. Довести, що $\xi(t)$ – стаціонарний процес. Записати його коваріаційну функцію.
- 15.10. Випадковий процес має вигляд $X(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$, де $A > 0$ – випадкова амплітуда; існує $MA^2 < \infty$; Φ – незалежна від A випадкова величина, розподілена рівномірно на $[0, 2\pi]$; ω – деяка стала. Знайти $m(t)$, $DX(t)$, $B(t, s)$.
- 15.11. Нехай $N(t)$ – процес Пуассона з інтенсивністю λ . Знайти
- $P\{N(1) \leq 2; N(2) = 3; N(3) \geq 5\}$;
 - характеристичну функцію $N(2) + 2N(1)$.
- 15.12. Записати коваріаційну функцію процесу $X(t) = e^{-at}(1 + b)^{N(t)}$.
- 15.13. Нехай $W(t)$ – вінерівський процес. Знайти
- $M(W(t))^n$, $n > 1$;
 - характеристичну функцію величини $W(2) + 2W(1)$;
 - $Me^{2W(1)+W(2)}$;
 - $M \sin(2W(1) + W(2))$.
- 15.14. Довести (за допомогою нерівності Чебишова), що процес Пуассона є стохастично неперервним, тобто для всіх $t \geq 0$: $N(t+h) - N(t) \xrightarrow{p} 0$ при $h \rightarrow 0$.
- 15.15. Нехай $W(t)$ – вінерівський процес. Виявляється, що дані перетворення вінерівського процесу
- $X(t) = \frac{W(c^2 t)}{c}$, $c > 0$;
 - $X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ tW\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0 \end{cases}$
 - $X(t) = \sqrt{c}W\left(\frac{t}{c}\right)$;
 - $X(t) = W(t+c) - W(c)$
- також є вінерівськими. Довести це частково: що прирости даних процесів є некорельованими і розподілені так само, як у вінерівського.
- 15.16. Знайти розподіл величин а) $W(t) + W(s)$; б) $\int_0^1 W(s) ds$.
- 15.17. Нехай $W(t)$ – вінерівський процес. Знайти коваріаційну функцію випадкового процесу $W(t) - tW(1)$ на відрізку часу $t \in [0, 1]$.
- 15.18. Знайти середнє і коваріаційну функцію процесу $X(t) = W^2(t)$, $t \geq 0$.

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

16. Методи моментів і максимальної вірогідності

Первинна обробка даних

Нехай ми вимірюємо дискретну випадкову величину ξ , маємо вибірку з n значень. **Статистичним розподілом вибірки** називається перелік **варіант**(значень) з вибірки x_i і відповідних їм частот n_i або відносних частот $W_i = \frac{n_i}{n}$.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
W_i	W_1	W_2	...	W_k

$n = \sum_{i=1}^k n_i$; n_i – частота i -ї варіанти. Статистичний розподіл вибірки є оцінкою закону розподілу ξ .

У випадку абсолютно неперервної випадкової величини статистичний розподіл вибірки задається у вигляді послідовності інтервалів і відповідних їм частот (підраховують, скільки значень потрапило в частковий інтервал).

інтервал	$[a, x_1]$	$(x_1, x_2]$	$(x_2, x_3]$...	$(x_{k-1}, b]$
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

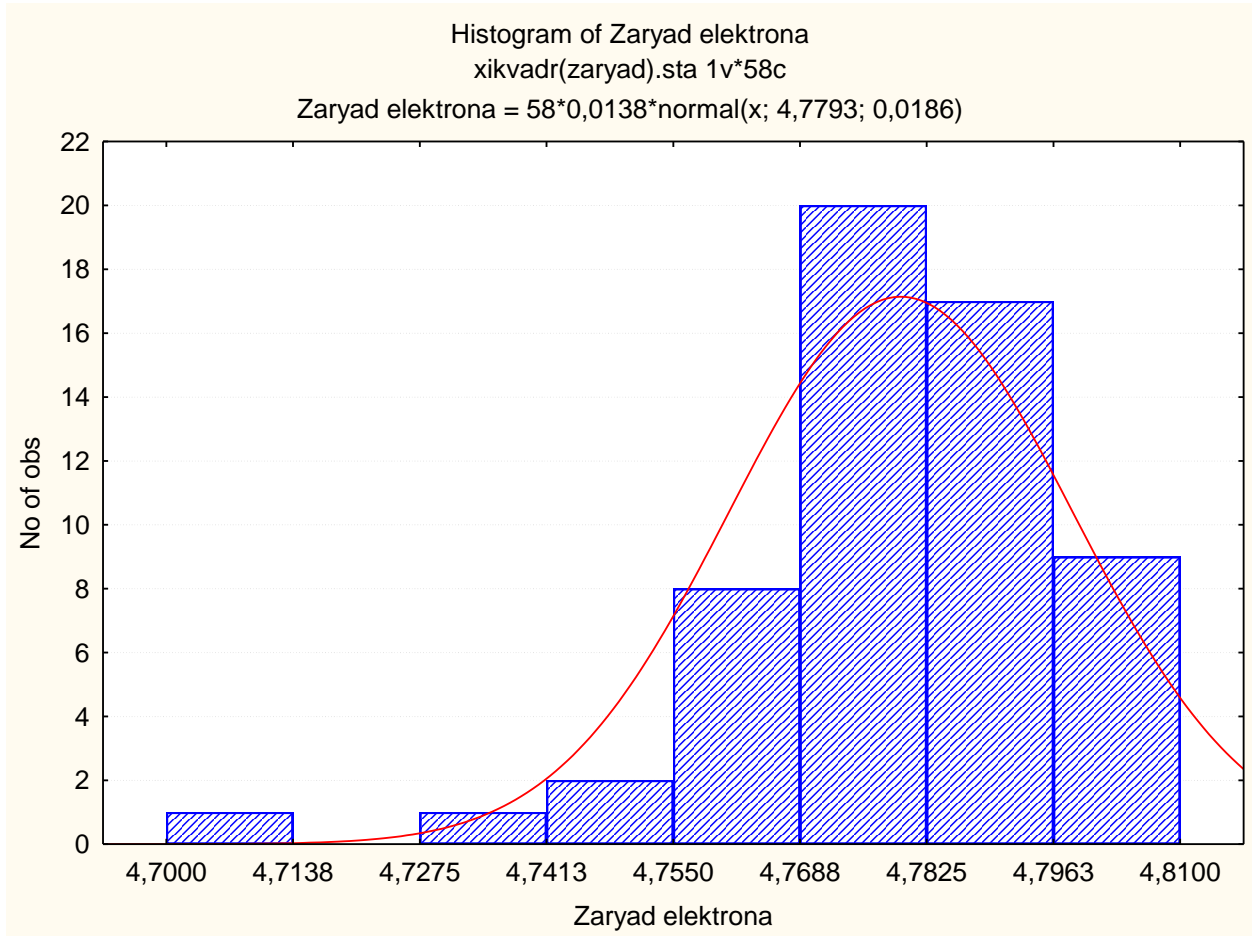
Гістограмою частот (відносних частот) називають східчасту фігуру, складену з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною h , а висоти дорівнюють n_i (для гістограми відносних частот $\frac{W_i}{h}$). Гістограма відносних частот слугує оцінкою щільності розподілу випадкової величини ξ .

Приклад 16.1. Наводимо величини e , знайдені Р. Міллікеном при визначенні заряду електрона, який дорівнює $e \cdot 10^{-10}$ од. СГСЕ. Обсяг вибірки – 58 значень.

4,7 4,74 4,747 4,749 4,758 4,761 4,764 4,764 4,764 4,765
 4,767 4,768 4,769 4,769 4,771 4,771 4,772 4,772 4,772 4,774
 4,775 4,775 4,776 4,777 4,777 4,778 4,779 4,779 4,779 4,781
 4,781 4,782 4,783 4,783 4,785 4,785 4,785 4,788 4,788 4,789
 4,789 4,79 4,79 4,791 4,791 4,791 4,792 4,792 4,795 4,797
 4,799 4,799 4,801 4,805 4,806 4,808 4,809 4,81

Гістограма частот побудована нижче за допомогою пакета Statistica 7. Всього взято 8 часткових інтервалів, кожний довжиною $h = 0,0138$. Висоти

прямокутників відображають частоти інтервалів. Наприклад, в інтервал [4,7688; 4,7825] потрапило 20 значень з вибірки.



Δ ξ - деяка випадкова величина. Нехай med таке число, що $P\{\xi \geq med\} = \frac{1}{2}$ та $P\{\xi \leq med\} = \frac{1}{2}$. Тоді med називається **медіаною розподілу ξ** . Можна сказати, що медіана – це таке число, що з ймовірністю 1/2 величина ξ менше його, і з ймовірністю 1/2 більше. Існують аналогічні означення для нижньої і верхньої кватилі.

Нижня кватиль $x_{1/4}$: $P\{\xi \leq x_{1/4}\} = \frac{1}{4}$; $P\{\xi \geq x_{1/4}\} = \frac{3}{4}$.

Верхня кватиль $x_{3/4}$: $P\{\xi \leq x_{3/4}\} = \frac{3}{4}$; $P\{\xi \geq x_{3/4}\} = \frac{1}{4}$.

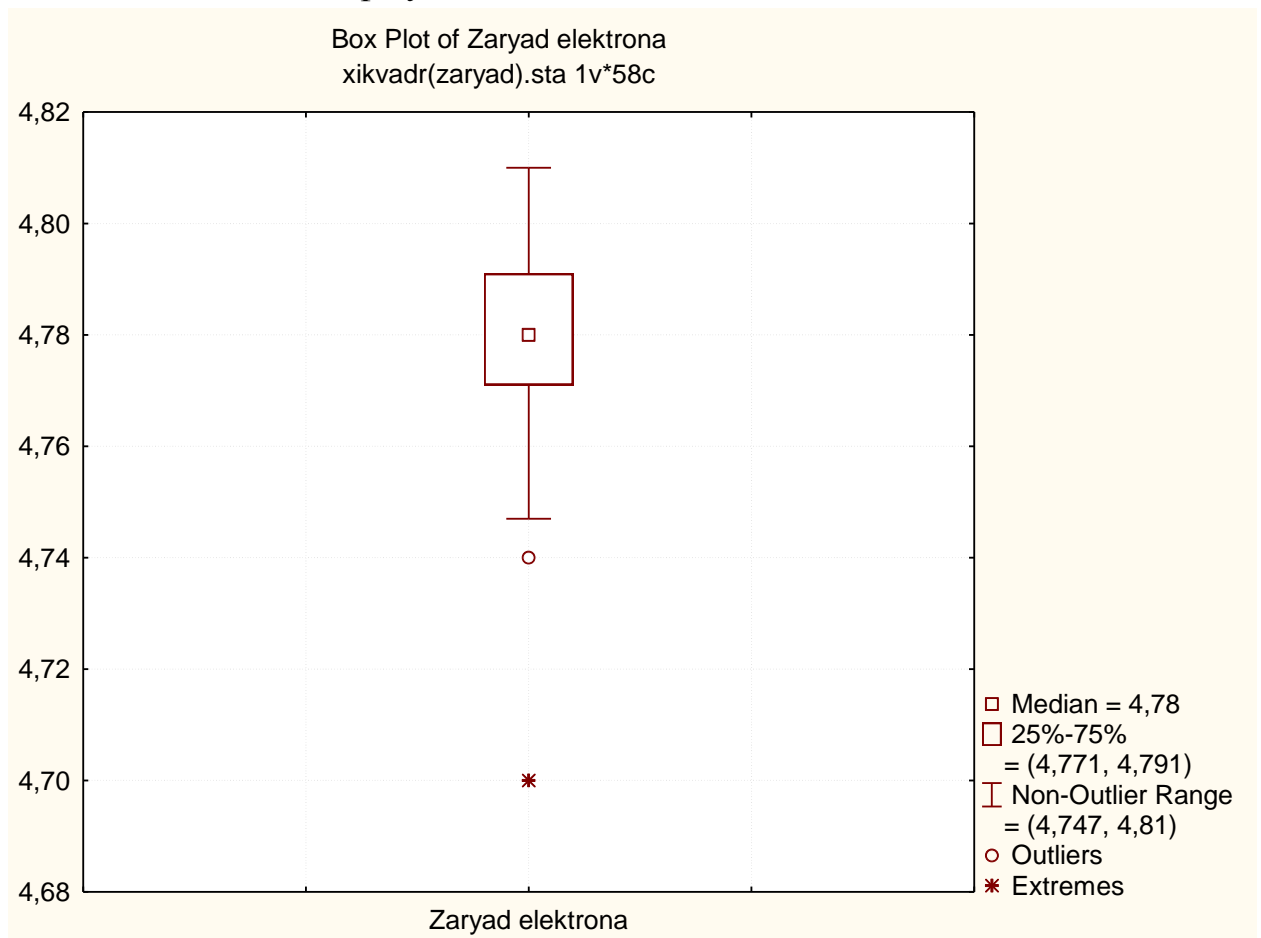
Розглянемо вибірку $\{x_i\}$ – результат вимірювань ξ n разів. Впорядкуємо цю вибірку за зростанням: $x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq x_{[3]} \leq \dots \leq x_{[n-1]} \leq x_{[n]}$ – це **варіаційний ряд**.

Δ **Вибірковою медіаною** називають середнє значення у варіаційному ряді:

$$\widehat{med} = \begin{cases} x_{[\frac{n+1}{2}]}, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ \frac{x_{[\frac{n}{2}]} + x_{[\frac{n}{2}+1]}}{2}, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Твердження. При $n \rightarrow \infty$ $\widehat{med} \rightarrow med$ за ймовірністю, тобто вибіркова медіана є оцінкою справжньої медіани. Аналогічно при $n \rightarrow \infty$ $x_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \rightarrow x_{1/4}$; $x_{\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor} \rightarrow x_{3/4}$. Тому $x_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$, $x_{\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor}$ називають емпіричними верхньою і нижньою квантилями.

Нижче побудована **вусата коробочка** для вибірки змінної Zaryad elektrona – це стисле зображення вибірки вцілому. Центральний маленький квадратик відмічає медіану вибірки, межі прямокутника відмічають верхню і нижню вибірккові квантилі; вуса відмічають найменше і найбільше значення вибірки. Два значення пакет ідентифікує як викиди.



Статистичні оцінки параметрів розподілу

Нехай ми вимірюємо випадкову величину ξ , розподіл якої залежить від невідомого параметра θ . В нашому розпорядженні є вибірка (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Δ **Статистичною оцінкою** невідомого параметру θ теоретичного розподілу називається функція від вибірки $\theta \approx \hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Δ **Незміщеною** називають таку оцінку $\hat{\theta}$, що $M\hat{\theta} = \theta$.

Δ **Ефективною** називають таку оцінку $\hat{\theta}$, яка є незміщеною і має найменшу дисперсію $D\hat{\theta}$ з усіх можливих.

Δ **Конзистентною (слухною)** називають статистичну оцінку $\hat{\theta}_n$:

$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta; n \rightarrow \infty$ (збіжність за ймовірністю означає, що $\forall \varepsilon > 0: P\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$).

Δ **Емпіричною функцією розподілу** називається функція

$$F^*(x) = \frac{\text{кількість } x_i, \text{ які менші за } x}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{x_i < x\}$$

Твердження. $F^*(x)$ – незміщена, конзистентна і асимптотично ефективна оцінка функції розподілу $F(x)$.

Метод моментів

Нехай (x_1, x_2, \dots, x_n) – вибірка, результат спостережень за випадковою величиною ξ , яка має функцію розподілу $F_\theta(x)$. Функція розподілу залежить від невідомого параметру θ . Нам треба оцінити цей параметр за вибіркою.

Підхід методу моментів полягає в наступному. Ми обираємо функцію $g(x)$, вона називається пробною. Обираємо її так, щоб

$$m(\theta) = Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_\theta(x) < \infty$$

і бажано, щоб $m(\theta)$ була монотонною і неперервною. Потім ми прирівнюємо відповідні теоретичні і емпіричні моменти. Згідно закону великих чисел вони повинні бути приблизно однаковими при великих обсягах вибірки.

Δ **Оцінкою методу моментів (ОММ)** називається корінь рівняння

$$m(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_\theta(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

Якщо $m(\theta)$ монотонна і неперервна, то такий корінь є єдиним.

Зауваження 16.1. Ми розглядали параметр θ як одновимірний. Якщо ж є декілька невідомих параметрів $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$, то обирають декілька пробних

функцій g_1, g_2, \dots, g_d і оцінюють одночасно параметри оцінками, які є розв'язками системи:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) dF_{\theta_1, \dots, \theta_d}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_1(x_i) \\ \dots \\ \int_{-\infty}^{\infty} g_d(x) dF_{\theta_1, \dots, \theta_d}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_d(x_i) \end{cases}$$

Зазначимо, що частіше за все обирають $g_k(x) = x^k$.

Зауваження 16.2. Метод моментів дає наступні оцінки математичного сподівання і дисперсії за вибіркою:

$$M\xi \approx \bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad D\xi \approx D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x}_B)^2;$$

$$D\xi \approx s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2$$

Приклад 16.2. Нехай (x_1, x_2, \dots, x_n) – вибірка з біноміального розподілу $P\{\xi = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$; $k = 0, 1, \dots, m$. Оцінити параметри m та p методом моментів.

Розв'язок. Невідомих параметрів 2. Тому нам треба 2 рівняння, прирівняємо емпіричні і теоретичні математичне сподівання і дисперсію. Як відомо, для біноміального розподілу $M\xi = mp$; $D\xi = mp(1-p)$. Отже,

$$\begin{cases} mp = \bar{x}_B \\ mp(1-p) = D_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{p} = \frac{\bar{x}_B - D_B}{\bar{x}_B} \\ \hat{m} = \frac{(\bar{x}_B)^2}{\bar{x}_B - D_B} \end{cases}$$

Оцінки методу моментів знайдені.

Метод максимальної вірогідності (правдоподібності)

Нехай (x_1, x_2, \dots, x_n) – вибірка, результат спостережень за випадковою величиною ξ , розподіл якої залежить від параметру θ . Нам треба оцінити цей параметр за вибіркою.

а) Випадок дискретної випадкової величини

Нехай ξ – дискретна випадкова величина з законом розподілу $p(m, \theta) = P\{\xi = m\}$, який залежить від невідомого параметра θ .

Δ Функція

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta)p(x_2, \theta) \times \dots \times p(x_n, \theta)$$

називається **функцією вірогідності(правдоподібності)**.

Оцінка методу максимальної вірогідності (ОММВ):

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta),$$

тобто те значення θ , при якому функція L набуває максимального значення.

б)Випадок абсолютно неперервної випадкової величини

Нехай ξ – абсолютно неперервна випадкова величина зі щільністю $f(x, \theta)$, що залежить від невідомого параметра θ .

Δ Функція

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta)f(x_2, \theta) \times \dots \times f(x_n, \theta)$$

називається **функцією вірогідності(правдоподібності)**.

Оцінка методу максимальної вірогідності (ОММВ):

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta).$$

Доведено, що при виконанні деяких умов регулярності, ОММВ є консистентною і асимптотично найбільш ефективною.

Зауваження 16.3. Оскільки максимум функцій L та $\ln L$ досягається в одній і тій самій точці, а аналізувати $\ln L$ легше, то дуже часто ОММВ шукають у вигляді $\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$.

Зауваження 16.4. Якщо розподіл містить декілька невідомих параметрів $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$, то ОММВ будується аналогічно. В цьому випадку вирішують задачу пошуку максимуму функції багатьох змінних.

Приклад 16.2. Нехай (x_1, x_2, \dots, x_n) – вибірка з показникового розподілу.

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Оцінити параметр λ методом максимальної вірогідності.

Розв'язок. Ми маємо справу з абсолютно неперервним розподілом, отже,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta)f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta) = \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} \dots \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}; \ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

Повинна виконуватись необхідна умова екстремуму:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$
$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}_B}. \quad \text{Це і є ОММВ.}$$

Індивідуальна домашня робота №2

«Методи моментів і максимальної вірогідності»

Варіант 1

1. За допомогою М.М. побудувати оцінку параметра $\theta > 0$, якщо розподіл вибірки (X_1, X_2, \dots, X_n) має щільність

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю Кейптана

$$f(x, \theta_1, \theta_2) = \frac{g'(x)}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left(-\frac{(g(x) - \theta_1)^2}{\theta_2}\right),$$

де $g(x)$ -монотонно зростаюча диференційовна функція. Побудувати О.М.В. параметра θ_2 , вважаючи параметр θ_1 відомим.

Варіант 2

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Знайти оцінки параметрів a і b за допомогою М.М.

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{1}{a}(x-b)\right), & x > b; \\ 0, & x \leq b. \end{cases} \quad \text{- зміщений показниковий розподіл.}$$

Знайти оцінку М.М.В. параметрів a та b .

Варіант 3

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка незалежних випадкових величин, розподілених нормально $N(\theta, \theta^2)$, $\theta > 0$. Побудувати оцінку М.М.В. параметру θ .
2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з «подвійного» розподілу Пуассона, що задається ймовірностями

$$P_{\theta}\{X_i = k\} = \frac{1}{2} \left(e^{-\theta_1} \frac{\theta_1^k}{k!} + e^{-\theta_2} \frac{\theta_2^k}{k!} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad \theta = (\theta_1, \theta_2), \quad 0 < \theta_1 < \theta_2, i = \overline{1, n}.$$

Знайти О.М.М. параметрів.

Варіант 4

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка незалежних випадкових величин, розподілених нормально $N(\theta, 4\theta^3)$, $\theta > 0$. Побудувати оцінку М.М.В. параметру θ .
2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, a, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}, & \text{якщо } x < 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} + \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти О.М.М. параметрів a , λ .

Варіант 5

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка незалежних випадкових величин, розподілених нормально $N(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$. Побудувати оцінку М.М.В. параметру θ .
2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу Пуассона з законом розподілу $P\{X_1 = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Знайти оцінку параметра λ за допомогою методу моментів.

Варіант 6

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю
- $$f(x, a, b) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{1}{a}|x-b|} \quad (a > 0 - \text{зміщений двобічний показниковий розподіл}).$$

Знайти оцінку М.М.В. параметрів a та b .

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, \theta, h) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3h}}, & \text{якщо } x \in [\theta - \sqrt{3h}, \theta + \sqrt{3h}] \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta - \sqrt{3h}, \theta + \sqrt{3h}] \end{cases}$$

Знайти оцінки параметрів θ, h методом моментів.

Варіант 7

1. В.в. ξ має від'ємний біноміальний розподіл :

$$P\{\xi = k\} = C_{r-1+k}^{r-1} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \quad k = 0, 1, \dots; \quad \theta > 0.$$

Відомо, що ξ можна подати у вигляді суми

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_r,$$

де $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ - незалежні випадкові величини, кожна з яких має геометричний розподіл з параметром $p = \frac{1}{1+\theta}$:

$$P\{\eta_1 = k\} = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з від'ємного біноміального, r - відомо.

Знайти О.М.М. параметру θ .

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, h) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & x \in [\theta_0 - h, \theta_0 + h] \\ 0, & x \notin [\theta_0 - h, \theta_0 + h] \end{cases}$$

Знайти оцінку М.М.В. параметра h .

Варіант 8

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з рівномірного на відріжку $[\theta - \sigma\sqrt{3}, \theta + \sigma\sqrt{3}]$ розподілу, $\sigma > 0$. Знайти О.М.М параметрів θ та σ .

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (\theta > 0) - \text{розподіл Релея.}$$

Знайти оцінку θ М.М.В.

Варіант 9

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу Ерланга з параметрами m та λ . Оцінити ці параметри методом моментів. Щільність розподілу Ерланга має вигляд

$$f(x, \lambda, m) = \begin{cases} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, a, p) = \begin{cases} \frac{p}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}, & \text{якщо } x < 0; \\ \frac{p}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} + (1-p)e^{-x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти О.М.М. параметрів a, p .

Варіант 10

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з оберненого гаусівського розподілу $INVN(\mu, \lambda)$, що задається щільністю

$$f(x, \mu, \lambda) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

де $\mu > 0, \lambda > 0$. Побудувати оцінку М.М.В. параметрів μ і λ .

2. В.в. ξ має від'ємний біноміальний розподіл з параметрами r, p :

$$P\{\xi = k\} = C_{r-1+k}^{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Відомо, що ξ можна подати у вигляді суми

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_r,$$

де $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ - незалежні випадкові величини, кожна з яких має геометричний розподіл з параметром p :

$$P\{\eta_1 = k\} = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з від'ємного біноміального розподілу з параметрами r, p , r - відомо. Знайти О.М.М. параметру p .

Варіант 11

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, \alpha, \nu) = \begin{cases} \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp(-\alpha x), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (\nu \geq 0, \alpha > 0) - \text{гама-розподіл.}$$

Знайти О.М.В. параметра α , вважаючи параметр ν відомим.

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з геометричного розподілу з параметром p :

$$p(k, p) = P\{X_1 = k\} = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Знайти О.М.М. параметра p .

Варіант 12

- Знайти О.М.В. параметра θ рівномірного розподілу на відрізку а) $[-\theta, 0]$, $\theta > 0$; б) $[\theta, \theta + 2]$, $\theta \in R$; в) $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$.
- Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу Ерланга з параметрами m та λ . Оцінити ці параметри методом моментів. Щільність розподілу Ерланга має вигляд

$$f(x, \lambda, m) = \begin{cases} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Варіант 13

- Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з показникового розподілу зі щільністю

$$f(x, \beta) = \begin{cases} e^{\beta-x} & \text{при } x \geq \beta; \\ 0 & \text{при } x < \beta. \end{cases}$$

Знайти О.М.В. параметра зсуву $\beta \in R$.

- Нехай X_1, \dots, X_n - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}|x|}.$$

Знайти оцінку параметра θ за допомогою методу моментів.

Варіант 14

- Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з двопараметричного показникового розподілу зі щільністю

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{(x-\beta)}{\alpha}} & \text{при } x \geq \beta; \\ 0 & \text{при } x < \beta. \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta \in R)$$

Знайти О.М.В. параметрів α і β .

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{2}{h^2} (h - x) & \text{при } x \in [0, h]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0, h]. \end{cases}$$

Знайти О.М.М. параметра $h > 0$.

Варіант 15

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка зі зрізаного геометричного розподілу з параметром $p \in (0, 1)$:

$$P\{X_1 = k\} = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1; \\ P\{X_1 = m\} = (1 - p)^m.$$

Знайти О.М.М.В. параметра p .

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю ($\theta > 0$):

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{(x - (a - \sqrt{\theta}))}{\theta}, & \text{якщо } x \in [a - \sqrt{\theta}, a]; \\ -\frac{(x - (a + \sqrt{\theta}))}{\theta}, & \text{якщо } x \in [a, a + \sqrt{\theta}]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a - \sqrt{\theta}, a + \sqrt{\theta}]. \end{cases}$$

Застосувавши метод моментів, побудувати оцінки параметрів a, θ .

Варіант 16

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з трьохточкового розподілу, який залежить від параметра $\theta \in (0, 1/3)$:

$$P\{X_1 = 1\} = \theta; \quad P\{X_1 = 2\} = 2\theta; \quad P\{X_1 = 3\} = 1 - 3\theta.$$

Знайти О.М.М.В. параметра θ .

2. Використовуючи метод моментів, оцінити параметр θ рівномірного розподілу на відрізку а) $[0, 2\theta]$, $\theta > 0$; б) $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$.

Варіант 17

1. Знайти О.М.М.В. параметра $\theta > 0$, якщо розподіл вибірки

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ має щільність а) } f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{при } x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 1] \end{cases},$$

$$\text{б) } f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & \text{при } x \in [0, \theta]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \theta] \end{cases}$$

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю ($\theta > 0$):

$$f(x, \theta, b) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}|x-b|}.$$

Знайти оцінки методу моментів параметрів θ , b .

Варіант 18

1. Знайти О.М.М.В. параметра $\theta > 0$, якщо розподіл вибірки

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ має щільність } f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta e^{-\frac{\theta^2}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases},$$

Застосувавши метод моментів, побудувати оцінку параметра $\alpha > 0$.

Варіант 19

1. За допомогою М.М. побудувати оцінку параметра $\theta > 0$, якщо розподіл вибірки (X_1, X_2, \dots, X_n) має щільність

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & x \in [0, \theta]; \\ 0, & x \notin [0, \theta]. \end{cases}$$

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з оберненого гаусівського розподілу $INVN(\mu, \lambda)$, що задається щільністю

$$f(x, \mu, \lambda) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

де $\mu > 0$, $\lambda > 0$. Побудувати оцінку М.М.В. параметрів μ і λ .

Варіант 20

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу

$$p(k, \theta) = P\{X_1 = k\} = C_{r-1+k}^{r-1} \left(\frac{1}{\theta}\right)^r \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

г відомо. Знайти О.М.М.В. параметра θ .

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, p, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ p\lambda e^{-\lambda x} + (1-p) \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти О.М.М. параметрів p , λ , вважаючи параметр ν відомим.

Варіант 21

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка незалежних випадкових величин, розподілених нормально $N(\theta, 9\theta)$, $\theta > 0$. Побудувати оцінку М.М.В. параметру θ .

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з суміші такого вигляду:

$$X_1 \text{ розподілена } \begin{cases} \text{рівномірно на } [0, b] \text{ з ймовірністю } p; \\ \text{рівномірно на } [0, 2b] \text{ з ймовірністю } 1 - p \end{cases}$$

Застосувавши метод моментів, записати систему оцінюючих рівнянь для знаходження параметрів p і b .

Варіант 22

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} 3 \frac{x^2}{\alpha^3} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Знайти О.М.М.В. параметра $\alpha > 0$.

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу Вейбулла з параметрами $\alpha > 0$ і $\theta > 0$:

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \theta \alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases},$$

причому значення α відоме. Застосувавши метод моментів, за допомогою пробної функції $g(x) = x^\alpha$ побудувати оцінку параметра θ .

Варіант 23

1. Знайти О.М.М.В. параметра $\theta > 0$, якщо розподіл вибірки

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ має щільність } f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{e^{-|x|}}{2(1-e^{-\theta})} & \text{при } x \in [-\theta, \theta]; \\ 0 & \text{при } x \notin [-\theta, \theta]. \end{cases}$$

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, p, \lambda) = \begin{cases} \frac{p}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{якщо } x < 0; \\ \frac{p}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + (1-p)\lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти О.М.М. параметрів a , σ .

Варіант 24

1. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з двох параметричного розподілу Лапласа зі щільністю

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}}{2\sigma},$$

де $\mu \in R$ і $\sigma \in R$. Знайти О.М.М.В. для параметрів μ і σ .

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, \lambda, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{якщо } x < 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти О.М.М. параметрів λ , σ .

Варіант 25

1. Знайти О.М.М.В. параметра $\theta > 0$, якщо розподіл вибірки

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ має щільність } f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta(\ln x)^{\theta-1}}{x} & \text{при } x \in [1, e]; \\ 0 & \text{при } x \notin [1, e]. \end{cases}$$

2. Нехай (X_1, X_2, \dots, X_n) - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, a, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, & \text{якщо } x < 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} + \frac{3}{2} e^{-3x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти О.М.М. параметрів a , σ .

17. Критерій χ^2

Перевірка статистичних гіпотез

Статистична гіпотеза – припущення щодо вигляду розподілу спостережень з вибірки (x_1, x_2, \dots, x_n) . Гіпотеза називається **простою**, якщо вона однозначно визначає розподіл випадкової величини, в протилежному випадку вона називається **складною**.

Гіпотезу, яку ми висуваємо, називаємо **нульовою, основною**, позначення: H_0 . **Конкуруючою, альтернативною** називаємо гіпотезу, яка суперечить нульовій, позначення: H_1 .

Помилка першого роду: $\alpha = P\{\text{відхиляємо } H_0, \text{ приймаємо } H_1 / H_0 \text{ вірна}\}$.

Рівень помилки першого роду обирає дослідник. Частіше за все покладають $\alpha = 0,05$ або $\alpha = 0,01$.

Помилка другого роду: $\beta = P\{\text{приймаємо } H_0/H_0 \text{ невірна}\}$.

Статистичним критерієм називають випадкову величину $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка служить для перевірки нульової гіпотези. При виконанні гіпотези розподіл K відомий або наближено відомий. Після вибору певного критерію множина його можливих значень розбивається на 2 підмножини: одна містить значення критерію, при яких H_0 відхиляється, інша – при яких приймається.

Принцип перевірки статистичних гіпотез. Якщо значення критерію K , яке ми спостерігаємо, належить області прийняття гіпотези - H_0 приймаємо; критичній області – відхиляємо.

Критерій χ^2

Розіб'ємо множину значень в.в. ξ на скінченну кількість l множин $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$, які не перетинаються. Якщо ξ - неперервна в.в., то це l інтервалів.

Якщо ξ - дискретна в.в., то природньо за Δ_i взяти різні значення, які приймає ξ .

Висуваємо гіпотезу $H_0 = \{\xi \text{ розподілена з функцією розподілу } F_{H_0}(x)\}$

Тоді, в припущенні гіпотези H_0 , ми можемо порахувати ймовірності потрапляння в певні Δ_k : $p_k = P\{\xi \in \Delta_k\}$; $\sum_{k=1}^l p_k = 1$; $p_k > 0$.

Теоретична частота множини Δ_k : $n'_k = np_k$

Далі працюємо з вибіркою, групуємо її, виписуємо емпіричні частоти.

ξ	Δ_1	Δ_2	...	Δ_l
n_k	n_1	n_2	...	n_l
n'_k	np_1	np_2	...	np_l

Звичайно, емпіричні і теоретичні частоти відрізняються. Можливо, їх розбіжність випадкова, незначуща, пояснюється або малим числом спостережень, або способом групування. А можливо, розбіжність частот не випадкова, значуща, і причина її в тому, що гіпотеза H_0 невірна. Критерій χ^2 не доводить справедливості гіпотези, а лише встановлює її відповідність або невідповідність даним.

Теорема Пірсона. При $n \rightarrow \infty$ розподіл в.в. $\chi_n^2 = \sum_{k=1}^l \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$ збігається до розподілу χ^2 з m степенями свободи, де $m = l - 1 - r$; r - кількість параметрів розподілу, які ми оцінювали за даними вибірки.

Отже, помилка першого роду:

$$\alpha = P\{\text{відхиляємо } H_0 / H_0 \text{ вірна}\} \approx P\{\chi^2 > \chi_{\text{крит}}^2\}.$$

Оскільки функція розподілу хі-квадрат відома, то з попередньої рівності можна знайти критичне значення $\chi_{\text{крит}}^2$. Існує таблиця критичних точок розподілу хі-квадрат (Додаток ??).

Алгоритм

1) Розбиваємо множину значень ξ на множини $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$. Знаходимо відповідні n_k .

2) Знаходимо p_k , виходячи з розподілу H_0 .

3) Обчислюємо $\chi_{\text{спос}}^2 = \sum_{k=1}^l \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$.

4) За таблицею критичних точок розподілу χ^2 знаходимо критичне значення $\chi_{\text{крит}}^2(\alpha, m)$.

5) Робимо висновок.

Якщо $\chi_{\text{спос}}^2 < \chi_{\text{крит}}^2(\alpha, m)$ - приймаємо H_0 ;

$\chi_{\text{спос}}^2 > \chi_{\text{крит}}^2(\alpha, m)$ - відхиляємо H_0 .

Приклад 17.1. Клінічною характеристикою серцевої функції слугує серцевий індекс X (л./хв. м²), який визначається як продуктивність серця, поділена на площу поверхні тіла. Маємо вибірку з $n = 110$ критично хворих пацієнтів, для кожного з яких виміряли серцевий індекс.

За вибіркою знайдене вибіркове середнє $\bar{x}_B = 2,32$ і вибіркова дисперсія $D_B = 0,305$; $\sigma_B = 0,552$. Побудований статистичний розподіл вибірки інтервального типу

інтервал	$(-\infty, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, \infty)$
n_i	10	40	30	20	10

Нам треба перевірити гіпотезу про нормальність вибірки з рівнем значущості $\alpha = 0,05$.

Розв'язок. Висуваємо гіпотезу $H_0 = \{X \text{ розподілена нормально}\}$.

Спершу треба знайти ймовірності p_k потрапляння в інтервали. Можна скористатись формулою, що відповідає нормальному розподілу:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Нажаль, нам невідомі параметри a, σ . Застосувавши метод моментів, можемо покласти: $a = \bar{x}_B = 2,32$; $\sigma = \sigma_B = 0,552$. Таблиця значень функції $\Phi(x)$ знаходиться в Додатку 2. Заносимо значення p_k в таблицю, далі обчислюємо теоретичні частоти і $\chi^2_{\text{спос}}$.

інтервал	n_i	p_k	np_k	$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$
$(-\infty, 1]$	10	0,008	0,88	94,52
$[1, 2]$	40	0,273	30,03	3,31
$[2, 3]$	30	0,612	67,32	20,69
$[3, 4]$	20	0,106	11,66	5,97
$[4, \infty)$	10	0,001	0,11	889,2
	$n=110$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 110$	$\Sigma = 1013,7$

За таблицею критичних точок знаходимо $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha = 0,05; m = l - 1 - r = 5 - 1 - 2 = 2) = 5,99$. Тут r – кількість параметрів, які ми оцінюємо за вибіркою. Таких параметрів два – це a і σ .

Оскільки $\chi^2_{\text{спос}} = 1013,7 > \chi^2_{\text{крит}} = 5,99$, то гіпотезу відхиляємо.

Індивідуальна домашня робота №3

«Критерій χ^2 »

1) Дані знаходяться в окремому файлі під номером варіанта. Для заданої вибірки побудувати інтервальний варіаційний ряд, розбивши інтервал, в якому розташована вибірка, на 5-10 часткових і виписавши їх емпіричні частоти (треба, щоб кожна емпірична частота була не менше 5). Кожна вибірка містить 1 викид, його треба вилучити.

2) Перевірити гіпотезу: $H_0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Вибірка розподілена за} \\ \text{нормальним законом} \end{array} \right\}$ за допомогою критерію χ^2 з рівнем значущості $\alpha = 0,05$.

3) (додаткове – оцінюється в 1 бал). Побудувати вусату коробочку і гістограму вибірки.

Додаток 1

Таблиця значень щільності нормального розподілу $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3994	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2. Таблиця значень функції розподілу

стандартного нормального розподілу $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Додаток 3

Таблиця значень функції Пуассона $P\{\xi=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0196
4	0	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030
5	0	0	0	0.0001	0.0002	0.0004
6	0	0	0	0	0	0

m \ λ	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.1353	0.0498
1	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679	0.2707	0.1494
2	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839	0.2707	0.2240
3	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613	0.1804	0.2240
4	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153	0.0902	0.1690
5	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031	0.0361	0.1008
6	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0120	0.0504
7	0	0	0	0.0001	0.0034	0.0216
8	0	0	0	0	0.0009	0.0081
9	0	0	0	0	0.0002	0.0027
10	0	0	0	0	0	0.0008
11	0	0	0	0	0	0

m \ λ	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0012	0.0000
1	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0573	0.0337	0.0189
5	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0997	0.1186	0.1251
11	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0	0	0.0003	0.0014	0.0045	0.0109	0.0217
17	0	0	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0	0	0	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0	0	0	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0	0	0	0	0.0002	0.0006	0.0019
21	0	0	0	0	0.0001	0.0003	0.0009
22	0	0	0	0	0	0.0001	0.0004
23	0	0	0	0	0	0	0.0002
24	0	0	0	0	0	0	0.0001

Додаток 4

Таблиця критичних точок розподілу χ^2
(ν - число ступенів вільності, α - рівень значущості.)

$\nu \backslash \alpha$	0,01	0,05	0,1	0,9	0,95	0,99
1	6,63489	3,8415	2,7055	0,0158	0,0039	0,0002
2	9,21035	5,9915	4,6052	0,2107	0,1026	0,0201
3	11,3449	7,8147	6,2514	0,5844	0,3518	0,1148
4	13,2767	9,4877	7,7794	1,0636	0,7107	0,2971
5	15,0863	11,07	9,2363	1,6103	1,1455	0,5543
6	16,8119	12,592	10,645	2,2041	1,6354	0,8721
7	18,4753	14,067	12,017	2,8331	2,1673	1,239
8	20,0902	15,507	13,362	3,4895	2,7326	1,6465
9	21,666	16,919	14,684	4,1682	3,3251	2,0879
10	23,2093	18,307	15,987	4,8652	3,9403	2,5582
11	24,725	19,675	17,275	5,5778	4,5748	3,0535
12	26,217	21,026	18,549	6,3038	5,226	3,5706
13	27,6882	22,362	19,812	7,0415	5,8919	4,1069
14	29,1412	23,685	21,064	7,7895	6,5706	4,6604
15	30,578	24,996	22,307	8,5468	7,2609	5,2294
16	31,9999	26,296	23,542	9,3122	7,9616	5,8122
17	33,4087	27,587	24,769	10,085	8,6718	6,4077
18	34,8052	28,869	25,989	10,865	9,3904	7,0149
19	36,1908	30,144	27,204	11,651	10,117	7,6327
20	37,5663	31,41	28,412	12,443	10,851	8,2604
21	38,9322	32,671	29,615	13,24	11,591	8,8972
22	40,2894	33,924	30,813	14,041	12,338	9,5425
23	41,6383	35,172	32,007	14,848	13,091	10,196
24	42,9798	36,415	33,196	15,659	13,848	10,856
25	44,314	37,652	34,382	16,473	14,611	11,524
26	45,6416	38,885	35,563	17,292	15,379	12,198
27	46,9628	40,113	36,741	18,114	16,151	12,878
28	48,2782	41,337	37,916	18,939	16,928	13,565
29	49,5878	42,557	39,087	19,768	17,708	14,256
30	50,8922	43,773	40,256	20,599	18,493	14,953

Література

1. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев, «Вища школа», 1979. – 408 с.
2. Карташов М.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К., «ТВиМС», 2004. – 304 с.
3. Коршунов Д.А., Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей: Учебное пособие. – Новосибирск, Издательство Новосибирского государственного университета, 2003. - 119 с.
4. Коршунов Д.А., Чернова Н.И. Сборник задач и упражнений по математической статистике. - Новосибирск, Издательство института математики, 2004 – 128с.
5. Майборода Р.Є. Регресія: Лінійні моделі. Навчальний посібник. – К.:ВПЦ «Київський університет», 2007. – 174 с.
6. Майборода Р.Є., Сугакова О.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник. – К., ЕКОМЕН, 1998. – 186 с.
7. Радченко О.М. Теорія ймовірностей. – К.: Вид.-поліг. Центр «Київський університет», 2010. – 135 с.
8. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. – М., Наука, 1980 – 222 с.
9. Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі: Підручник. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2006. – 476 с.
10. Турчин В.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Основные понятия, примеры и задачи. – Днепропетровск, ИМА-ПРЕСС., 2012. – 576 с.
11. Теорія ймовірностей: Методичні вказівки до лабораторних та самостійних робіт / Упорядники: О.І. Василик, М.В. Карташов, Г.М. Шевченко, Р.Є Ямненко. - К.: Вид.-поліг. Центр «Київський університет», 2008. – 60 с.

Навчальне видання

***ІВАНЕНКО** Дмитро Олександрович
СУГАКОВА Олена Володимирівна*

**САМОСТІЙНА РОБОТА СТУДЕНТІВ З
КУРСУ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»**

Підписано до друку 14.10.2014. Формат 60x80¹⁶.
Гарнітура Times. Папір офсетний. Друк офсетний.
Наклад 80 примірників. Ум. друк. арк. 6.

Видавнича лабораторія факультету радіофізики,
електроніки і комп'ютерних систем
Київського національного університету імені Тараса Шевченка