Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Алгебра

Методичний посібник
для практичних занять
студентів факультету радіофізики,
електроніки та комп'ютерних систем

Київ – 2015

УДК 512.64+514.742

ББК В152.2я73-1
ББК В181.13я73-1

Рецензент: доц., канд. фіз.-мат. наук Зайцева Л.Л.

Алгебра. Методичний посібник для практичних занять студентів радіофізичного факультету університету. / С.В.Єфіменко, Т.М. Жеребко – К.: КНУ, 2014 – 123 с.

Посібник призначений для практичних та самостійних занять студентів факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем. Він містить короткий виклад нормативного курсу «Алгебра» у відповідності до навчального плану. Кожний розділ містить велику кількість прикладів, в також задачі для аудиторних та домашніх робіт. Всі задачі поділені на три рівні складності, тому охоплюють можливості робіт, як для широкого загалу студентів, так і для індивідуального поглибленого опанування курсом. Наявність відповідей в кінці кожного розділу (які відповідають темі окремого практичного заняття) дає можливість студентам контролювати рівень засвоєння матеріалу.

Затверджено
Вченою Радою факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем.

Протокол № 7 від 2 березня 2015 року

Вступ. Матриці та визначники. Системи лінійних рівнянь. Теорема Крамера.

Означення 1. Квадратну таблицю чисел будемо називати квадратною ***матрицею***. Кількість її рядків та стовпчиків називається ***порядком*** матриці. Наприклад, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ - матриця другого порядку, $\mathbf{B}=(100)$ - матриця першого порядку.

Матриці однакового порядку можна **додавати.** При цьому в результаті одержимо матрицю того ж порядку, кожен елемент якої буде сумою відповідних елементів матриць доданків.

Приклад 1. Якщо $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, а $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$, то $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ - ***нуль-матриця***.

Будь-яку матрицю $\mathbf{A}$ можна **множити на число** λ**.** Результуюча матриця $\lambda\mathbf{A}$ складатиметься з елементів матриці $\mathbf{A}$, помножених на число λ. Приклад, для $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\cos\alpha\\ 2\cos\alpha & 1\end{pmatrix}$ та $\lambda=\sin\alpha$ одержимо $\lambda\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}$.

З кожною матрицею $\mathbf{A}$ пов'язують число, яке називають ***визначником*** (***детермінантом***) матриці і позначають $|\mathbf{A}|$. Для його обчислення використовують наступне ***правило*** (поки що розглядаються матриці порядків, що не перевищують 3)**:**

1. Якщо $\mathbf{A}=(a)$ – матриця першого порядку, то визначник матриці, рівний значенню її єдиного елементу: $|\mathbf{A}|=a$;
2. Якщо $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1\\ a_1^2 & a_2^2\end{pmatrix}$ – матриця другого порядку (зверніть увагу, верхній індекс елементу матриці означає номер рядка, а нижній – номер стовпчика, в якому знаходиться елемент), то визначник матриці, обчислюється за правилом «хреста»: $|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}a_1^1 & a_2^1\\ a_1^2 & a_2^2\end{vmatrix}=a_1^1a_2^2-a_1^2a_2^1$;
3. Якщо $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{pmatrix}$ – матриця третього порядку, то визначник матриці, обчислюється за правилом «зірочка»:
$|\mathbf{A}|=a_1^1a_2^2a_3^3+a_3^1a_1^2a_2^3+a_2^1a_3^2a_1^3-a_3^1a_2^2a_1^3-a_2^1a_1^2a_3^3-a_1^1a_3^2a_2^3$

Якщо у матриці рівні нулю всі елементи, крім елементів з однаковими індексами (говорять, що вони знаходяться на ***головній діагоналі*** матриці), то матриця називається ***діагональною***.

Зауважимо, що *визначник діагональної матриці рівний добутку елементів головної діагоналі*. Якщо діагональна матриця має на діагоналі лише одиниці, то вона називається ***одиничною*** матрицею.

Приклад 2. Нехай $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Тоді $|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=-2$

Приклад 3. Нехай $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & x\\ 1 & y\end{pmatrix}$. Тоді $|\mathbf{A}|=1\cdot y-1\cdot x=y-x$

Приклад 4. Нехай $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ \sqrt{6} & 3\end{pmatrix}$. Тоді $|\mathbf{A}|=3\sqrt{2}-\sqrt{18}=0$

Приклад 5. Нехай $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Маємо: $|\mathbf{A}|=1-0+2-0+1-0=4$

Приклад 6. Нехай $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{pmatrix}$. Обчислимо визначник цієї матриці:

$|\mathbf{A}|=\omega^2+\omega^2+\omega^2-\omega-\omega-\omega^4=-\omega\left(\omega^3-3\omega+2\right)=-\omega(\omega-1)^2(\omega+2)$.

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера.

Із шкільної програми вам знайомі ***системи лінійних рівнянь***. Наприклад, $\begin{cases}a_1^1x^1+a_2^1x^2=b^1\\ a_1^2x^1+a_2^2x^2=b^2\end{cases}$ – є системою двох лінійних рівнянь з двома невідомими x^1 та x^2. Матриця $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1\\ a_1^2 & a_2^2\end{pmatrix}$ називається ***матрицею цієї системи***, а стовпчик $\begin{pmatrix}b^1\\ b^2\end{pmatrix}$ називається ***стовпчиком вільних*** членів.

Нехай маємо систему із n лінійних рівнянь, де $n=2$ або $n=3$. Якщо існує такий набір чисел $x^k=\alpha^k$, $k=\overline{1,n}$, який перетворює систему на n вірних рівностей, то він називається ***розв'язком*** системи лінійних рівнянь. Сама система тоді є ***сумісною***. Для розв'язків системи справедлива наступна теорема:

> **Теорема Крамера**. Якщо визначник $\Delta=|\mathbf{A}|$ системи n лінійних рівнянь відмінний від нуля, то існує **єдиний** розв'язок системи, який визначається ***формулами Крамера***: $x^k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta}, k=1,2,\ldots,n$. (Тут через Δ_k позначений визначник, одержаний заміною k-го стовпчика у визначнику системи Δ на стовпчик вільних членів.) Якщо ж $\Delta=0$, то система може бути ***несумісною*** (тобто не мати розв'язків) або мати нескінченно багато розв'язків (якщо для кожного k всі $\Delta_k=\Delta=0$).

Приклад 7. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases}3x+5y=2\\ 5x+9y=4\end{cases}$.

Обчислимо визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2$. Застосуємо формули Крамера, оскільки розв'язок єдиний. Для цього обчислимо визначники $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -2$ та $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$. Отже, розв'язком системи є числа $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1$ та $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$.

Приклад 8. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \alpha x + y + z = 4 \\ x + \beta y + z = 3 \\ x + 2\beta y + z = 4 \end{cases}$ для всіх значень дійсних параметрів α та β.

Обчислимо визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 2\beta & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta + 2\beta + 1 - \beta - 2\alpha\beta - 1 = \beta(1-\alpha)$.

Отже, якщо $\beta(1-\alpha) \neq 0$, то існує єдиний розв'язок. Для його знаходження обчислимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & \beta & 1 \\ 4 & 2\beta & 1 \end{vmatrix} = 4\beta + 6\beta + 4 - 4\beta - 8\beta - 3 = 1 - 2\beta,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha + 4 + 4 - 3 - 4 - 4\alpha = 1 - \alpha,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 4 \\ 1 & \beta & 3 \\ 1 & 2\beta & 4 \end{vmatrix} = 4\alpha\beta + 8\beta + 3 - 4\beta - 6\alpha\beta - 4 = 4\beta - 2\alpha\beta - 1.$$

Таким чином при $\beta(1-\alpha) \neq 0$ розв'язком системи є числа $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1-2\beta}{\beta(1-\alpha)}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\beta}$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4\beta - 2\alpha\beta - 1}{\beta(1-\alpha)}$. Необхідно дослідити сумісність системи, коли $\beta(1-\alpha) = 0$. Припустимо спочатку, що $\beta = 0$. Тоді друге та третє рівняння стають суперечними: $x + z = 3$ та $x + z = 4$. Тому при $\beta = 0$ система несумісна. Нехай тепер $\alpha = 1$. Тоді одержимо систему $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + \beta y + z = 3 \\ x + 2\beta y + z = 4 \end{cases}$. Перше її рівняння помножимо на -1 та додамо по черзі до другого та третього рівнянь. Одержимо: $\begin{cases} (\beta - 1)y = -1 \\ (2\beta - 1)y = 0 \end{cases}$. Оскільки рівність $y = 0$ неможлива, з другого рівняння тепер одержимо, що $\beta = \frac{1}{2}$. Тоді з першого випливає, що $y = 2$.

Остаточно одержимо, що при $\alpha=1,\ \beta=\frac{1}{2}$ розв'язки системи визначаються рівностями: $x=2-z,\ y=2$. В усіх інших випадках система є несумісною.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1. Обчислити визначники 2-го порядку

а) $A=\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -23 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 2-i & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$

2. Обчислити визначники 3-го порядку

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 11 & 4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -2 & 37 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему методом Крамера: $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=\sqrt{6} \\ \sqrt{3}x+3\sqrt{2}y=2 \end{cases}$.

4. Розв'язати систему методом Крамера: $\begin{cases} 2x+3y-4z=3 \\ 5x+2y+3z=0 \\ 3x-y+2z=1 \end{cases}$.

II.

1. Дослідити при яких значеннях параметра a система має єдиний розв'язок (знайти його), має безліч розв'язків, немає розв'язків

$$\begin{cases} 2x+3y=1, \\ (a-1)x-2y=a \end{cases}.$$

2. Дослідити при яких значеннях параметрів a і b система має єдиний розв'язок (знайти його), має безліч розв'язків, немає розв'язків

$$\begin{cases} ax+by=2, \\ 3x-2y=-b \end{cases}.$$

3. Дослідити при яких значеннях параметра a система має єдиний розв'язок (знайти його), має безліч розв'язків, немає розв'язків

$$\begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=1,. \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

III.

1. Матриця 3-го порядку містить три елемента рівні 1, а решта – 0. Чому може дорівнювати визначник?
2. Знайти найбільше значення визначника 3-го порядку, якщо всі його елементи рівні ± 1.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1. Обчислити визначники 2-го порядку

а) $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-1 & 2+\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3} & 1+2\sqrt{3}\end{pmatrix}$; в)
$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-i & 3\\ -4 & \sqrt{2}+i\end{pmatrix}$

2. Обчислити визначники 3-го порядку

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -17 & 21\\ 0 & 4 & -35\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ -3 & 1 & -4\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}-26 & 8 & 0\\ 71 & 17 & -2\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему методом Крамера: $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-2\right)x-y=\sqrt{5}+2\\ 2x+\left(\sqrt{5}+2\right)y=2\end{cases}$.

4. Розв'язати систему методом Крамера: $\begin{cases}x-2y+2z=1\\ 2x-y+2z=2\\ 2x+2y-z=3\end{cases}$.

II.

1. Дослідити при яких значеннях параметра a система має єдиний розв'язок (знайти його), має безліч розв'язків, немає розв'язків

$\begin{cases}a^2x+2y=a+1,\\ (a-1)x-y=2\end{cases}$.

2. Дослідити при яких значеннях параметрів a і b система має єдиний розв'язок (знайти його), має безліч розв'язків, немає розв'язків

$\begin{cases}(a-2)x+3y=2,\\ 2x+(a+2b)y=-1\end{cases}$.

3. Дослідити при яких значеннях параметра a система має єдиний розв'язок (знайти його), має безліч розв'язків, немає розв'язків

$\begin{cases}4x+y+2z=2a-1,\\ x-2y+az=-a,\\ 8x-5y-2z=23\end{cases}$.

III.

1. Матриця 3-го порядку містить три елемента рівні 0, а решта – 1. Знайти максимальне значення визначника.

2.Знайти всі можливі значення визначника, якщо всі його елементи рівні ± 1.

Відповіді.

Ауд. І. 1) а)-1. б)3. в) $5-i$. 2) а) -10. б) 19. в) 0. 3) $\vec{x}=\left(\frac{4}{\sqrt{3}};-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. 4) $\vec{x}=\left(\frac{38}{55};-\frac{29}{55};-\frac{4}{5}\right)$.

II. 1) Система несумісна, якщо $a=-\frac{1}{3}$; розв'язок єдиний $\vec{x}=\left(\frac{3a+2}{1+3a};-\frac{1+a}{1+3a}\right)$, $a\neq-\frac{1}{3}$. 2) Система несумісна, якщо $a\neq\mp3,\ b\neq\pm2$ і $2a=-3b$; система має єдиний розв'язок, якщо $a\neq\mp3,\ b\neq\pm2$ і $2a\neq-3b$, $\vec{x}=\left(\frac{4-b^2}{2a+3b};\frac{6+ab}{2a+3b}\right)$; система має безліч розв'язок, якщо $a\neq\mp3,\ b\neq\pm2$. 3) Система несумісна, якщо $a=-2$; система має єдиний розв'язок $\vec{x}=\left(\frac{1}{a+2};\frac{1}{a+2};\frac{1}{a+2}\right)$, якщо $a\neq1,\ a\neq-2$; система має безліч розв'язків, якщо $a=1$.

III. 1) 0; ±1. 2) 4.

Дом. І. 1) а) $\cos2\varphi$. б) 10. в) 15 2) а) 64. б) 43. в) 24 . 3) $\vec{x}=\left(\frac{11+4\sqrt{5}}{3};-\frac{8}{3}\right)$. 4) $\vec{x}=\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$.

II. 1) Система несумісна, якщо $a=-1\pm\sqrt{3}$; розв\`язок єдиний $\vec{x}=\left(-\frac{a+5}{2-a^2-2a};\frac{1+a^2}{2-a^2-2a}\right)$, $a\neq-1\pm\sqrt{3}$. 2) Система несумісна, якщо $a\neq-2$, $a^2-2a-4b+2ab-6=0$; система має єдиний розв\`язок, якщо $a^2-2a-4b+2ab-6\neq0$, $\vec{x}=\left(\frac{2a+4b+3}{a^2-2a-4b+2ab-6};\frac{-a-2}{a^2-2a-4b+2ab-6}\right)$; система має безліч розв\`язок, якщо $a=-2,\ b=\frac{1}{4}$. 3) Система несумісна, якщо $a=-\frac{10}{7}$; Система має єдиний розв\`язок $\vec{x}=\left(\frac{5a^2+11a+48}{20+14a};\frac{4a^2-24a+12}{10+7a};\frac{-3a-109}{20+14a}\right)$, якщо $a\neq-\frac{10}{7}$.

III. 1) 2. 2)0, ±4.

Розділ 1. Вектори, операції з ними, базиси та розклади по ним. Ділення відрізку у заданому відношенні.

Основні відомості про вектори та операції з ними відомі зі шкільної програми. Відновити знання по цій темі можна з допомогою посібника [1]. Нижче наведені основні властивості векторів.

Геометричним (вільним) вектором називається напрямлений відрізок (тобто вектор характеризується довжиною та напрямком). Вектори вважаються ***рівними***, якщо їх довжини та напрямки однакові.

Прямокутною декартовою системою координат (ПДСК) в просторі називають трійку взаємно перпендикулярних векторів одиничної довжини, які мають спеціальні позначення: $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ ($\mathbf{i}$ - орт осі абсцис, $\mathbf{j}$ - орт осі ординат, $\mathbf{k}$ - орт осі аплікат).

Координати довільного вектора у ПДСК фактично є проекціями цього вектора на координатні вісі: $\mathbf{a}=\{a^1,a^2,a^3\}=a^1\mathbf{i}+a^2\mathbf{j}+a^3\mathbf{k}$.

Довжина вектора **a** (позначається $|\mathbf{a}|$) визначається через координати вектора в ПДСК як $|\mathbf{a}|=\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2}$.

Ортом вектора **a** називається вектор $\mathbf{e_a}$, який має одиничну довжину і співнапрямлений з вектором **a** (при цьому нульовий вектор не має напрямку, а отже, і орта).

Приклад 1.1. Визначити орт вектора $a=(-2;2;1)$. Довжина вектора $|a|=\sqrt{4+4+1}=3$, отже, орт $e_a=\frac{1}{3}(-2;2;1)=\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Напрямними косинусами вектора **a** називаються косинуси кутів, утворених вектором **a** з координатними осями ПДСК (при цьому α – кут між вектором **a** і віссю абсцис, β – кут між вектором **a** і віссю ординат, γ – кут між вектором **a** і віссю аплікат). Для напрямних косинусів довільного вектора виконується тотожність:

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\equiv 1$.

Для прикладу 1.1 напрямними косинусами вектора **a** відповідно будуть $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

Два вектора називаються ***колінеарними***, якщо їх напрямки співпадають або протилежні. Координати колінеарних векторів пропорційні.

Три вектора називаються ***компланарними***, якщо вони лежать на одній або паралельних площинах.

Відстань між двома точками $A(x_1,y_1,z_1)$ та $B(x_2,y_2,z_2)$ в просторі – це довжина вектора $\mathbf{AB}$, отже, вона знаходиться за формулою:

$$d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Тобто координати вектора AB визначені таким чином: $\mathbf{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

Приклад 1.2. Довести, що координати точки M, що ділить відрізок AB з кінцями $A(x_1,y_1,z_1)$ та $B(x_2,y_2,z_2)$ у відношенні α, визначаються формулами:

$$x_M=\frac{x_1+\alpha x_2}{1+\alpha};\ \ y_M=\frac{y_1+\alpha y_2}{1+\alpha};\ \ z_M=\frac{z_1+\alpha z_2}{1+\alpha}. \qquad \textbf{(1.1)}$$

Дійсно, за умовою вектори **AM** та **MB** пов’язані співвідношенням: $\mathbf{AM}=\alpha\mathbf{MB}$, тому аналогічне співвідношення справедливе і для всіх трьох координат цих векторів. Отже, $x_M-x_1=\alpha(x_2-x_M)$, звідки й випливає перша з формул **(1.1)**. Аналогічно можуть бути одержані й дві інші.

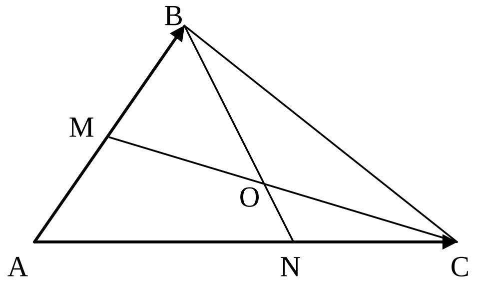
Приклад 1.3. Знайти координати A і B кінців відрізку, який точками $M(1,2,3)$ та $N(-5,0,-1)$ поділений на 3 рівних частини.

Очевидно, що точка M є серединою відрізку AN, тому $x_M = \dfrac{x_A + x_N}{2}$, звідки $x_A = 2x_M - x_N = 2 + 5 = 7$, $y_A = 2y_M - y_N = 4$, $z_A = 2z_M - z_N = 7$. Аналогічно знаходимо $x_B = 2x_N - x_M = -11$, $y_B = -3$, $z_B = -5$.

Приклад 1.4. Знайти центр ваги трикутника з вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ і $C(x_3, y_3, z_3)$.

Як відомо, центром ваги трикутника є точка $M(x_0, y_0, z_0)$ перетину її медіан, яка ділить кожну з медіан у відношенні 2:1, відраховуючи з вершини. Позначимо через $E\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ середину відрізку AB. Тепер координати точки M знайдемо за формулами **(1.1)**: $x_0 = \dfrac{x_3 + 2x_E}{1+2} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$; $z_0 = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

Приклад 1.5. На сторонах AB та AC трикутника ABC вибрані відповідно точки M і N таким чином, що |AM|:|BM|=$m_1 : n_1$, |AN|:|CN|=$m_2 : n_2$. Точку перетину відрізків BN і CM позначимо через O. Знайти відношення |BO|:|ON| та |CO|:|OM|.



Позначимо відповідно вектори $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$ та $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$. Тоді, очевидно, $\mathbf{AM} = \dfrac{m_1}{m_1 + n_1}\mathbf{a}$, $\mathbf{MB} = \dfrac{n_1}{m_1 + n_1}\mathbf{a}$, $\mathbf{AN} = \dfrac{m_2}{m_2 + n_2}\mathbf{b}$. Вектор $\mathbf{MC}$ може бути виражений таким чином: $\mathbf{MC} = \mathbf{AC} - \mathbf{AM} = \mathbf{b} - \dfrac{m_1}{m_1 + n_1}\mathbf{a}$. Позначимо відношення $|MO|:|MC| = \alpha$. Тоді $\mathbf{MO} = \alpha\mathbf{MC} = \alpha\mathbf{b} - \dfrac{\alpha m_1}{m_1 + n_1}\mathbf{a}$. Аналогічно із $\mathbf{BN} = \mathbf{AN} - \mathbf{NB} = \dfrac{m_2}{m_2 + n_2}\mathbf{b} - \mathbf{a}$ та $|BO|:|BN| = \beta$ випливає: $\mathbf{BO} = \beta\mathbf{BN} = \dfrac{\beta m_2}{m_2 + n_2}\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}$.

Тепер зв'яжемо знайдені вектори через трикутник MBO: $\mathbf{MO} = \mathbf{MB} + \mathbf{BO}$, в отже, $\alpha\mathbf{b} - \dfrac{\alpha m_1}{m_1 + n_1}\mathbf{a} = \dfrac{n_1}{m_1 + n_1}\mathbf{a} + \dfrac{\beta m_2}{m_2 + n_2}\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}$. Звідси маємо, що $\left(\dfrac{n_1}{m_1 + n_1} + \dfrac{\alpha m_1}{m_1 + n_1} - \beta\right)\mathbf{a} + \left(\dfrac{\beta m_2}{m_2 + n_2} - \alpha\right)\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Таким чином, нуль-вектор розкладений по базису $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, тому його координати рівні 0, і отже, $\alpha = \dfrac{\beta m_2}{m_2 + n_2}$ і $\beta = \dfrac{n_1}{m_1 + n_1} + \dfrac{\alpha m_1}{m_1 + n_1} = \dfrac{n_1}{m_1 + n_1} + \dfrac{\beta m_2}{m_2 + n_2} \cdot \dfrac{m_1}{m_1 + n_1}$. Звідси $\beta = \dfrac{n_1(m_2 + n_2)}{m_1 n_2 + m_2 n_1 + n_1 n_2}$, $\alpha = \dfrac{n_1 m_2}{m_1 n_2 + m_2 n_1 + n_1 n_2}$. Тепер можемо знайти $|CO|:|OM| = \dfrac{1-\alpha}{\alpha} = \dfrac{n_2(m_1 + n_1)}{m_2 n_1}$.

Аналогічно, $|BO|:|ON| = \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{n_1(m_2+n_2)}{m_1 n_2}$.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1. Перевірити, чи є трикутник з вершинами $L(-3;2;1)$, $M(0;4;-2)$ та $N(3;-1;2)$ – рівнобедреним.

2. Відомо, що вектор $\mathbf{x}$ утворює з віссю OX кут, рівний $2\pi/3$, з віссю OY – кут рівний $\pi/4$. Знайти координати вектора $\mathbf{x}$, якщо його довжина 6.

3. На осі ординат знайти точку, відстань якої від точки $P(5;-2;-1)$ рівна 6.

4. Чи задають точки $A_1(1;1;1)$, $A_2(2;1;-2)$, $A_3(4;5;-6)$ та $A_4(2;3;-1)$ вершини трапеції?

5. Переконатись, що вектори $\mathbf{a} = (1,2,0), \mathbf{b} = (2,0,-1), \mathbf{c} = (0,0,-1)$ – утворюють базис та знайти в цьому базисі координати вектора $\mathbf{d} = (3,2,1)$.

II.

1. Однорідний дріт зігнутий у вигляді кута AOB зі сторонами $|\mathbf{OA}| = a$, $|\mathbf{OB}| = b$. Знайти координати центра ваги цього дроту у системі координат O, $\mathbf{OA}/a$, $\mathbf{OB}/b$.

2. У площині трикутника ABC знайти таку точку O, для якої $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = \mathbf{0}$. Чи існують такі точки зовні трикутника ABC.

3. З однієї точки відкладені вектори $\mathbf{a}(0,-3,4), \mathbf{b}(4,1,-8)$ та $\mathbf{c}$. Вектор $\mathbf{c}$ має довжину 1 та ділить навпіл кут між $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Знайти координати вектора $\mathbf{c}$.

III.

1. Вершина D паралелограму ABCD з’єднана із точкою K на стороні BC такою, що |BK|:|KC|=2:3. Вершина B з’єднана із точкою L на стороні CD такою, що |CL|:|LD|=5:3. У якому відношенні точка M перетину прямих DK та BL ділить відрізки DK та BL ?

2. Довести, що три відрізки, які з’єднують середини мимобіжних ребер довільного тетраедра перетинаються у одній точці та діляться в ній навпіл.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1. Довести, що трикутник з вершинами $A(1;-3;2)$, $B(3;-1;6)$ та $C(-1;7;-2)$ – прямокутний.

2. Відомо, що вектор $\mathbf{x}$ утворює з віссю OY кут, рівний $3\pi/4$,з віссю OZ – кут рівний $\pi/3$. Знайти координати вектора $\mathbf{x}$, якщо його довжина 4.

3. На осі аплікат знайти точку, яка рівновіддалена від точок $R(1;2;3)$ та $S(0;2;-1)$.

4. Перевірити, чи точки $A(1;0;-1)$, $B(3;4;-3)$, $C(0;1;3)$ та $D(2;5;1)$ є вершинами паралелограма.

5. Переконатись, що вектори $\mathbf{a}=(0,-1,3),\mathbf{b}=(2,0,0),\mathbf{c}=(1,2,-1)$ – утворюють базис та знайти в цьому базисі координати вектора $\mathbf{d}=(-1,0,5)$.

II.

1. Дано 2 точки: A (x_1,y_1,z_1) і B (x_2,y_2,z_2) . Знайти координати точки N, що лежить на прямій AB зовні відрізку AB, такої, що |AN|:|BN|=m:n.

2. У паралелограмі $ABCD$ точка L – середина сторони BC, точка E – точка перетину діагоналей. Знайти координати векторів $\mathbf{BD}$, $\mathbf{CE}$ та $\mathbf{LD}$ в базисі $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AD}$.

3. Дано трикутник ABC з висотою AH. Знайти координати вектора $\mathbf{AH}$ в базисі $\mathbf{b}=\mathbf{AB}$ і $\mathbf{c}=\mathbf{AC}$.

III.

1. Знайти координати центра ваги однорідної пластинки у формі чотирикутника ABCD з вершинами A(3,1); B(7,3); C(0,4); D(-1;2).

2. На бічних сторонах AB і BC рівнобічного трикутника ABC розташовані відповідно точки M і N так, що |AM|:|BM|=m:1, |CN|:|BN|=n:1. Пряма MN перетинає висоту BD трикутника в точці O. Знайти відношення |DO|:|BO|

3. Довести, що чотири відрізки, які з'єднують вершини довільного тетраедра з точками перетину медіан протилежних граней, перетинаються в одній точці та діляться в ній у відношенні 3:1, відраховуючи від вершини.

Відповіді.

Ауд. I. 2) $\left(-3;3\sqrt{2};\pm 3\right)$. 3) $\left(0;-2\pm\sqrt{10};0\right)$. 4)Так. 5.) $\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}$.

II. 1) $\left(\frac{a^2}{2(a+b)},\frac{b^2}{2(a+b)}\right)$. 2) 3) $\left(\frac{10}{15},-\frac{11}{15},-\frac{2}{15}\right)$.

III. 1) 3:2 та 16:9 .

Дом. I. 2) $\left(\pm 2;-2\sqrt{2};2\right)$. 3) $\left(0;0;9/8\right)$. 5) $\mathbf{d}=2\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

II. 1) $N\left(\frac{nx_1-mx_2}{m-n},\frac{ny_1-my_2}{m-n},\frac{nz_1-mz_2}{m-n}\right)$. 2) $\mathbf{BD}=\{-1;1\},\mathbf{CE}=\{-1/2;-1/2\},\mathbf{LD}=\{-1;1/2\}$.

3) $\frac{|\mathbf{c}|^2-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}$; $\frac{|\mathbf{b}|^2-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}$

III. 1)$\left(\frac{22}{9},\frac{23}{9}\right)$. 2) (m+n):2.

Розділ 2. Добутки векторів.
2.1. Скалярний добуток векторів.

Скалярним добутком векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ з R^3 називається число, яке позначається $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (інколи $(\mathbf{a},\mathbf{b})$). При цьому $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Очевидно, що скалярний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ може дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з трьох умов: $|\mathbf{a}|=0$, $|\mathbf{b}|=0$, або $\cos\varphi=0$ (тобто $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$).

Критерій ортогональності векторів. Скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори ортогональні.

Властивості скалярного добутку.

1) (комутативність) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
2) (асоціативність при множенні на число) $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;
3) (дистрибутивність) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$;
4) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2\geq 0\ \ \forall\mathbf{a}$, з чого випливає $|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$.

Приклад 2.1. Дано три вектори: $\mathbf{a}(1,-1,1),\mathbf{b}(5,1,1),\mathbf{c}(0,3,-2)$. Знайти $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

Знайдемо спочатку скалярні добутки $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=0-3-2=-5$ та $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=5-1+1=5$. Отже, $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=-5\mathbf{b}+5\mathbf{c}=(-25,10,-15)$.

Проекцією вектора $\mathbf{b}$ на напрямок вектора $\mathbf{a}$ називається число, яке позначають $np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, при цьому $np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{a}}$ (зауважте, що проекція не залежить від довжини вектора $\mathbf{a}$!)

З попереднього означення випливає, що, наприклад, $np_{\mathbf{i}}\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}=|\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha$, де α – перший напрямний косинус вектора $\mathbf{b}$. Аналогічні співвідношення будуть справедливі для решти координатних осей.

Вираз скалярного добутку через координати векторів (в ПДСК).

Нехай $\mathbf{a}=a^1\mathbf{i}+a^2\mathbf{j}+a^3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{i}+b^2\mathbf{j}+b^3\mathbf{k}$. Тоді

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Визначення кута між векторами через скалярний добуток векторів.

Нехай $\mathbf{a}=a^1\mathbf{i}+a^2\mathbf{j}+a^3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{i}+b^2\mathbf{j}+b^3\mathbf{k}$, і φ – кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2}\cdot\sqrt{(b^1)^2+(b^2)^2+(b^3)^2}}. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Приклад 2.2. Дано трикутник ABC. Виразити через $\mathbf{b}=\mathbf{AB}$ та $\mathbf{c}=\mathbf{AC}$:
1) довжину сторони BC; 2) довжину медіани AM; 3) площу трикутника.

Очевидно, що $\mathbf{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$, отже, $|\mathbf{BC}|=|\mathbf{c}-\mathbf{b}|=\sqrt{(\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})}=$ $=\sqrt{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}$. Далі, $\mathbf{AM}=\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2}=\frac{\mathbf{c}+\mathbf{b}}{2}$, тому $|\mathbf{AM}|=\frac{|\mathbf{c}+\mathbf{b}|}{2}=$

$= \dfrac{\sqrt{(\mathbf{c}+\mathbf{b})^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}}{2}$. І нарешті, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot\sin(\mathbf{b}\hat{,}\mathbf{c})$. Знайдемо $\cos(\mathbf{b}\hat{,}\mathbf{c}) = \dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|}$, тому $\sin(\mathbf{b}\hat{,}\mathbf{c}) = \sqrt{1-\left(\dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|}\right)^2} = = \dfrac{\sqrt{|\mathbf{b}|^2\cdot|\mathbf{c}|^2-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2}}{|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|}$.

Остаточно одержимо: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{b}|^2\cdot|\mathbf{c}|^2-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2}$.

Фізичний зміст скалярного добутку.

Скалярний добуток сили $\mathbf{F}$ на переміщення $\mathbf{s}$ дорівнює *роботі* сили $\mathbf{F}$ по переміщенню матеріальної точки уздовж шляху $\mathbf{s}$:
$\boxed{A=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}}$.

2.2. Векторний добуток векторів.

Трійка векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ називається ***правою***, якщо їх можна розташувати у вказаному порядку відповідно за великим, вказівним та середнім пальцями правої руки, і ***лівою***, якщо – за пальцями лівої руки.

Векторним добутком векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ з R^3 називається вектор $\mathbf{c}$, який позначається $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (інколи $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$) і визначається трьома наступними вимогами ($\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$): 1) $\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\perp\mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ - права трійка; 3) $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Очевидно, що векторний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ може дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з трьох умов: $|\mathbf{a}|=0$, $|\mathbf{b}|=0$, або $\sin\varphi=0$ (тобто $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ – колінеарні вектори).

Критерій колінеарності векторів. Векторний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.

Властивості векторного добутку.

1) (антикомутативність) $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$;
2) (асоціативність при множенні на число) $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$;
3) (дистрибутивність) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

Визначення векторного добутку через координати векторів.

Нехай $\mathbf{a}=a^1\mathbf{i}+a^2\mathbf{j}+a^3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{i}+b^2\mathbf{j}+b^3\mathbf{k}$. Тоді

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\end{vmatrix}. \qquad \mathbf{(2.3)}$$

Геометричний зміст модуля векторного добутку.

Модуль векторного добутку векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ визначає площу паралелограма, побудованого на цих двох векторах (або подвоєну площу трикутника, сторонами якого є ці два вектори).

Приклад 2.3. Довжини базисних векторів $\mathbf{e_1}$ та $\mathbf{e_2}$ загальної декартової системи координат на площині рівні відповідно 3 та 2, в кут між ними складає 30^0. В цій системі координат дані три послідовні вершини паралелограма: (1,3), (1,0) і (-1,2). Знайти площу цього паралелограма.
Позначимо задані вершини паралелограма як A, B, C. Тоді площа паралелограма рівна величині векторного добутку: $S=|\mathbf{BA}\times\mathbf{BC}|$. Неважко обчислити, що $\mathbf{BA}=3\mathbf{e_2}$, $\mathbf{BC}=-2\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2}$. Отже, $\mathbf{BA}\times\mathbf{BC}=3\mathbf{e_2}\times(-2\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2})=$ $=-6\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_1}$. Тому $S=|-6\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_1}|=6|\mathbf{e_2}|\cdot|\mathbf{e_1}|\cdot\sin 30^0=18$.

Фізичний зміст векторного добутку.

Нехай сила $\mathbf{F}$ прикладена до деякої точки P. Тоді момент цієї сили $\mathbf{M}$ відносно деякої іншої точки O буде визначатися як $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$, де $\mathbf{r}$ - вектор напрямлений із точки O в точку P.

2.3. Мішаний добуток векторів.

Мішаний добуток трьох векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (позначається $\mathbf{abc}$) являє собою число і визначається як $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ або $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

Отримане число буде додатнім у випадку, коли трійка векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – права, і від'ємним, коли трійка векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – ліва.

Очевидно, що $\mathbf{abc}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot\mathbf{c}\cdot\cos\varphi=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot\cos\varphi\cdot\sin\alpha$, де φ – кут між векторами $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, α – кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Геометричний зміст мішаного добутку.

Модуль мішаного добутку векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих трьох векторах.

Властивості мішаного добутку.

1) (циклічні перестановки) $\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-\mathbf{bac}=-\mathbf{acb}=-\mathbf{cba}$;
2) (асоціативність при множенні на число) $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc}=\lambda(\mathbf{abc})=\mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{ab}(\lambda\mathbf{c})$;
3) (дистрибутивність) $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{bc}=\mathbf{a}_1\mathbf{bc}+\mathbf{a}_2\mathbf{bc}$.

Вираз мішаного добутку через координати векторів.

Нехай $\mathbf{a}=a^1\mathbf{i}+a^2\mathbf{j}+a^3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{i}+b^2\mathbf{j}+b^3\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=c^1\mathbf{i}+c^2\mathbf{j}+c^3\mathbf{k}$. Тоді

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Критерій компланарності векторів. Мішаний добуток трьох ненульових векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори компланарні.

Приклад 2.4. Визначити при якому значенні параметра λ вектори $a=(2;-1;\lambda)$, $b=(0;1;-1)$, $c=(1,2,1)$ компланарні, утворюють праву трійку, утворюють ліву трійку.

Обчислимо мішаний добуток цих векторів $abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7-\lambda$. Вектори компланарні, якщо $7-\lambda=0$, отже $\lambda=7$. Вектори утворюють праву трійку, якщо $\lambda<7$ і, якщо $\lambda>7$ – трійка ліва.

Завдання для аудиторної роботи.

І.

1. Для векторів $\mathbf{a}=\{1;\ 1;0\}$, $\mathbf{b}=\{-2;1;2\}$, $\mathbf{c}=\{-1;-1;1\}$ обчислити а) $(2a+b,c)-|a-c|^2$; б) $(a-c,a+c)$; в) $Пр_{a-c}b$.
2. Вершини трикутника $A=(1;2;-1)$, $B=(0;1;5)$, $C=(-1;2;1)$. Знайти внутрішні кути трикутника.
3. Три сили $F_1=(1;-3;2)$, $F_2=(-4;2;-3)$ і $F_3=(2;1;0)$ прикладені до однієї точки $M_1=(2;-3;-5)$. Обчислити роботу їх рівнодійної сили, якщо точка її прикладення рухається від точки M_1 до точки $M_2=(1;2;-1)$.
3. Для векторів $a=(-1;2;1)$, $b=(0;-1;2)$ обчислити

а) $[a-b,a+b]$; б) $[[a-b,a],b]$; в) $([a-b,a],b)$.

4. На векторах $a=(2;3;1)$, $b=(-1;1;2)$ побудовано трикутник. Знайти площу трикутника і довжини всіх його висот.
5. Для сил $F_1=(1;-3;2)$, $F_2=(-4;2;-3)$ і $F_3=(2;1;0)$, прикладених до однієї точки $M_1=(2;-3;-5)$, знайти момент їх рівнодійної сили відносно початку координат.
6. Визначити при якому значенні параметра λ три вектора $a=(2;3;0)$, $b=(1;-1;3)$, $c=(1;9-\lambda;0)$ є компланарними, утворюють праву чи ліву трійку.
7. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $a=(-2;1;1)$, $b=(0;-3;0)$, $c=(1;3;2)$.

ІІ.

1. Довести, що вектори a і $c=b-\dfrac{a(a,b)}{a^2}$ ортогональні.
2. Довжини базисних векторів $|e_1|=\sqrt{2}$ та $|e_2|=1$, кут між ними $\dfrac{\pi}{4}$. $ABCD$ – паралелограм, побудований на векторах $AB=2e_1+2e_2$, $BC=-e_1+4e_2$. Знайти довжини сторін паралелограма, кут між сторонами і площу паралелограма $ABCD$.
3. Вектор x ортогональний до векторів $a=3i+4j-k$ та $b=5i+6j-2k$. Довжина вектора $|x|=9$ і кут між вектором х та віссю 0z – тупий. Знайти вектор x.

4. Вершини тетраедра $A=(2;3;1)$, $B=(4;1;-2)$, $C=(6;3;7)$, $D=(-5;-4;8)$. Знайти висоту опущену з вершини D.

III.

1. Пояснити геометричний зміст всіх розв'язків векторного рівняння $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=p$, та також його частинного розв'язку, колінеарного вектору $\mathbf{a}$: 1) на площині; 2) у просторі.
2. Пояснити геометричний зміст всіх розв'язків системи векторних рівнянь:

1) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=p$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}=q$ на площині (вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ неколінеарні);

2) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=p$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}=q$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=s$ у просторі (вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ некомпланарні).

3. При якій умові виконується рівність $[[a,b],c]=[a,[b,c]]$.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1. Для векторів $a=(3;-4;2)$, $b=(-2;5;-1)$, $c=(5;0;6)$ обчислити

а) $(a,b)(c-a)+b|c-a|$; б) $(a-b+c,a+b-c)$; в) $Пр_{b-c}(a-c)$.

2. Вершини трапеції $A=(1;14;-11)$, $B=(4;5;1)$, $C=(6;4;7)$, $D=(5;7;3)$. Знайти внутрішні кути трапеції.

3. Три сили $F_1=(2;4;-3)$, $F_2=(-5;3;5)$ і $F_3=(4;-7;2)$ прикладені до однієї точки $M_1=(17;5;4)$. Обчислити роботу їх рівнодійної сили, якщо точка її прикладення рухається від точки M_1 до точки $M_2=(8;15;6)$.

4. Для векторів $a=(5;-3;1)$, $b=(1;-4;2)$, $c=(-3;2;1)$ обчислити а) $[a-3b,3a-b]$; б) $([a,b],[c,b])$.

5. Довести, що $ABCDA_1B_1C_1D_1$ -- куб і знайти третій вектор, який може бути його ребром, якщо вектори $AB=(1;-2;2)$, $AD=(2;2;1)$.

6. Для сил $F_1=(2;4;-3)$, $F_2=(-5;3;5)$ і $F_3=(4;-7;2)$ прикладених до однієї точки $M_1=(7;-5;4)$. Знайти момент їх рівнодійної сили відносно початку відліку.

7. Визначити при якому значенні параметра λ три вектора $a=(1;-2;1)$, $b=(3;1;\lambda)$, $c=(-2;2;3)$ є компланарними, утворюють праву чи ліву трійку.

8. Обчислити обєм паралелепіпеда побудованого на векторах $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо його вершини $A=(-2;5;3)$, $B=(8;7;3)$, $C=(-6;1;4)$, $A_1=(-6,1,2)$.

II.

1. Визначити при якому значенні параметра λ вектори a і $c=b+\lambda a(a,b)$ ортогональні.

2. Довжини базисних векторів $|e_1|=\sqrt{3}$ та $|e_2|=2$, кут між ними $\frac{\pi}{6}$. $ABCD$ – паралелограм, побудований на векторах $AB=e_1+2e_2$, $BC=-e_1+e_2$. Знайти

довжини сторін паралелограма, кут між сторонами і площу паралелограма $ABCD$.

3. Вектор x ортогональний до векторів $a = e_1 + 3e_2 - e_3$ та $b = -2e_1 - 8e_2 + 3e_3$. Знайти вектор x, якщо $(x, 2e_1 - e_2 + e_3) = 5$.

4. Визначити при якому значенні параметра λ вектори $a = (-2; \lambda^2; -3)$, $b = (\lambda - 1; 2; 1)$, $c = (3; -4; 0)$ компланарні.

5. $ABCA_1B_1C_1$ – призма. Знайти висоту опущену з вершини A, якщо відомо, що $AB = (2; -1; 4)$, $AC = (3; -2; 1)$, $AA_1 = (-3; 0; 11)$.

III.

1. Якщо виконується рівність $[a,b] + [b,c] + [c,a] = 0$ довести, що вектори a, b, c компланарні.
2. Перевірити, що точки $A = (-2; 3; 2)$, $B = (1; -2; 5)$, $C = (3; -1; -2)$, $D = (1; 9; -8)$ лежать в одній площині.

Відповіді.

Ауд. I. 1) а)-10; б)-1; в)$-\frac{4}{3}$. 2) $\cos A = \frac{7}{2\sqrt{19}}$; $\cos B = \frac{4}{\sqrt{19}}$; $\cos C = -\frac{1}{2}$. 3)-3. 4) а) $(10; 4; 2)$, б) $(5; -10; -5)$; в)0. 5) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$ 6) $(3; 7; -3)$.7) $\lambda = 7{,}5$; $\lambda < 7{,}5$ – права трійка, $\lambda > 7{,}5$ – ліва трійка. 8)15.

II. 2) $\sqrt{20}, \sqrt{10}, \frac{\pi}{4}$;10. 3) $(-6; 3; -6)$. 4) 11.

III.

Дом. I. 1) а) $(-68; -82; -118)$; б) -94; в) $\frac{22}{\sqrt{123}}$. 2) $\cos A = \frac{27}{\sqrt{754}}$, $\cos B = \frac{29}{\sqrt{1066}}$. 3)-1. 4) а) $(-16; -72; -136)$; б) -1992. 5)$\pm(-2; 1; 2)$. 6)$(20; 24; -5)$. 7) $\lambda = -\frac{29}{2}$; $\lambda > -\frac{29}{2}$ – права трійка; $\lambda < -\frac{29}{2}$ – ліва трійка. 8) 64.

II. 1) $\lambda = -\frac{1}{a^2}$. 2)$\sqrt{31}$; 1; $\cos(a,b) = \frac{2}{\sqrt{31}}$. $3\sqrt{3}$. 3) $(5; -5; -10)$. 4) $\frac{-6 \pm \sqrt{42}}{3}$. 5) $\frac{32}{5\sqrt{6}}$

Розділ 3. Площина.

Розглянемо простір геометричних векторів та декартову систему координат із звичайними ортами $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Загальним рівнянням площини називають рівняння виду:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \qquad \textbf{(4.1)}$$

Тут $\mathbf{n} = (A, B, C)$ – нормаль, проведена до площини, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радіус-вектор довільної точки площини.

Рівняння площини, заданої деякою точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ній та нормаллю $\mathbf{n} = (A, B, C)$ до площини, матиме вигляд:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Приклад 3.1. Знайти рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\mathbf{n} = (1;-1;2)$.

Заданий вектор $\mathbf{n}$ є нормаллю даної площини, а оскільки початок координат належить площині, в загальному рівнянні **(4.1)** слід покласти $D = 0$. Таким чином, шукане рівняння має вигляд $x - y + 2z = 0$.

Приклад 3.2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(2,1,0)$ перпендикулярно до площин $x + y - 2z - 3 = 0$ та $2x - y - z + 4 = 0$.

Оскільки шукана площина перпендикулярна до площин з нормалями $\mathbf{n}_1 = (1,1,-2)$ та $\mathbf{n}_2 = (2,-1,-1)$, то її нормаль $\mathbf{n}$ є перпендикулярною до обох нормалей $\mathbf{n}_1$ та $\mathbf{n}_2$, а отже, колінеарна їх векторному добутку $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Визначимо $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \{-3;-3;-3\}$. Таким чином, можна вважати, що $\mathbf{n} = \{1;1;1\}$. Шукана площина тепер визначається рівнянням **(4.2)**: $(x - 2) + (y - 1) + z = 0$, або $x + y + z - 3 = 0$.

Рівняння площини, проведеної через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$ на ній, можна задати у вигляді

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Приклад 3.3. Скласти рівняння площини, що проходить через три дані точки $A(1,2,3)$, $B(0,-1,2)$ та $C(-2,1,0)$.

Запишемо рівняння площини у вигляді **(4.3)**: $\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$, або $8(x - 1) - 8(z - 3) = 0$, або нарешті $x - z + 2 = 0$.

Якщо площина **(4.1)** не проходить через початок координат, тобто коефіцієнт $D \neq 0$, то рівняння площини можна задати ***у відрізках на осях***:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}, \qquad \textbf{(4.4)}$$

де a, b, c – відповідно абсциса, ордината та апліката точок перетину площинами з координатними осями OX, OY та OZ.

Приклад 3.4. Знайти об'єм тетраедра, утвореного координатними осями та площиною $2x+3y+4z-12=0$.

Запишемо рівняння даної площини у вигляді рівняння **(4.4)**, перенісши вільний член у праву частину та поділивши обидві частини рівняння на -12. Одержимо рівняння $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$. Отже, прямокутний тетраедр має ребра з довжинами 6, 4 та 3. Його об'єм рівний 12 кубічним одиницям.

Приклад 3.5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3,-1,5)$ та відтинає рівні відрізки від координатних осей.

З умови випливає, що шукана площина може бути описана рівнянням виду (4), в якому $a=b=c$. Залишилось підставити в це рівняння координати точки M_1.Одержимо рівняння: $\frac{3}{a}-\frac{1}{a}+\frac{5}{a}=1$, звідки $a=7$. Отже шукана площина визначається рівнянням $x+y+z-7=0$.

Розглянемо нормаль $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, проведену із початку координат до площини. Якщо позначити через $p\geq 0$ -- відстань від початку координат до площини, то матимемо ***нормальне рівняння площини*** у вигляді:

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0} \tag{4.5}$$

Нехай $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – довільна точка простору. Її ***відстань*** від площини **(4.5)** визначається величиною $d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\right|$, а ***відхилення*** від площини **(4.5)** рівне $\delta=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p$, тобто є додатним, якщо точка M_0 та початок координат розташовані по різні боки від площини і від'ємним, якщо по один.

Приклад 3.6. Скласти рівняння площин, паралельних площині $4x-2y-4z-5=0$ та розташованих на відстані 2 одиниць від неї.

Довжина нормалі заданої площини дорівнює $\sqrt{4^2+2^2+4^2}=6$. Щоб записати нормальне рівняння цієї площини, досить поділити обидві частини заданого рівняння на коефіцієнт ± 6, причому знак треба вибрати так, щоб вільний член нормального рівняння був від'ємним. Отже, нормальне рівняння заданої матиме вигляд: $\frac{4x-2y-4z-5}{6}=0$. Тому рівняння паралельних площин, які розташовані від неї на відстані 2 одиниць від неї, матимуть вигляд: $\frac{4x-2y-4z-5}{6}\pm 2=0$. Отже, шуканими є площини $4x-2y-4z+7=0$ та $4x-2y-4z-17=0$.

Двогранний кут α між двома площинами, заданими рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ можна визначити як кут між їх нормалями $\mathbf{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ та $\mathbf{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2}\cdot\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2}}} \tag{4.6}$$

Зауваження. Зрозуміло, що таким чином буде визначений один з двох двогранних кутів, інший рівний $\pi-\alpha$.

З формули **(4.6)** випливає ***умова перпендикулярності двох площин***, а саме: дві площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Умова паралельності двох площин еквівалентна умові колінеарності їх нормалей: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. **(4.8)**

Приклад 3.7. Визначити кути між площинами $x-3y+7z-5=0$ та $2x-4y-2z+1=0$.

Нормалями до заданих площин є вектори $\mathbf{n}_1=(1,-3,7)$ та $\mathbf{n}_2=(2,-4,-2)$. Легко переконатись, що скалярний добуток цих векторів рівний нулю, тобто виконана умова **(4.7)**: $1\cdot 2+(-3)\cdot(-4)+7\cdot(-2)=0$ – площини перпендикулярні.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1. Написати рівняння площини, що містить точку $M_1=(-1;0;2)$ і перпендикулярна до M_1M_2, якщо точка $M_2=(3;-1;5)$.
2. Написати рівняння площини, що містить точку $M=(-2;1;3)$ паралельна до вектора$(-1;1;3)$ і перпендикулярна до площини $2y-3z+9=0$.
3. Написати рівняння площини, що проходить через три точки $M_1=(-1;2;3)$, $M_2=(1;0;-1)$ та $M_3=(2;-1;3)$.
4. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1=(-1;2;0)$ та $M_2=(-2;3;1)$ перпендикулярно до площини $x-2y+8=0$.
5. Визначити при яких значеннях параметрів m, n площини $2x-5y+mz-7=0,\ -3x+ny+9z-8=0$ паралельні.
6. Рівняння площини $2x-3y+4z-6=0$. Обчислити об’єм тетраедра, утворений перетином даної площини і координатних площин.
7. Обчислити відстань від точки $M=(3;-1;2)$ до площини $\alpha: x-2y+5=0$. Перевірити чи знаходиться точка M і початок координат в одній площині.

II.

1. Перевірити чи перетинає відрізок M_1M_2 площину α, якщо відомі точки $M_1=(-7;8;3)$, $M_2=(9;5;0)$ і рівняння площини $\alpha: 3x-2y-3z-15=0$.
2. Грані куба задані рівняннями: $2x-3y+z-5=0$, $2x-3y+z+2=0$. Обчислити об’єм куба.
3. Виписати рівняння бісекторної площини для площин $x-2y+4z-7=0$, $3x+y-2z+2=0$.
4. Написати рівняння площини α, яка перетинається з площинами $\beta: -x+2y-z-3=0$ і $\gamma: z-x+2=0$ по одній прямій. Ця площина паралельна до вектора M_1M_2, якщо точки $M_1=(4;-2;3)$ і $M_2=(2;-1;0)$.

III.

1. Визначити кут (гострий чи тупий) в якому знаходяться початок відліку і точка $M=(-1;2;-2)$ між площинами $\alpha: -7x+y-5z-13=0$ і $\beta: 2x-5y+7z+11=0$.
2. Визначити при яких значеннях параметрів a, b площини $x+2y-3z+1=0$, $ax-y+z-8=0$, $2x+3y-z+b=0$ перетинаються: а) в одній точці; б) по одній прямій; в) по трьох непаралельних прямих.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1. Написати рівняння площини, що містить точку $M_1=(-2;1;3)$, і паралельна до площини $4x-3z+2=0$.
2. Написати рівняння площини, що містить точку $M=(-1;0;2)$, і перпендикулярна до двох площини $3x-2y+5z-8=0$, $y-z=0$.
3. Написати рівняння площини, що проходить через три точки $M_1=(2;-5;-1)$, $M_2=(0;2;-3)$ та $M_3=(3;-1;5)$.
4. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1=(-2;3;1)$ та $M_2=(-5;7;4)$ паралельно до вектора $\vec{a}=(1;-4;3)$.
5. Визначити при яких значеннях параметра λ площини $x-\lambda y+5z+2=0$, $5x-3y-7z-3=0$ перпендикулярні.
6. Рівняння площини $x-5y+z+3=0$. Обчислити площі трикутників, що утворені перетином даної площини з координатними площинами.
7. Обчислити відстань від точки $M=(-2;1;4)$ до площини $\alpha: 3x-2y+5z-7=0$. Перевірити чи перетинає відрізок $M0$ площину α.

II.

1. Перевірити чи знаходиться точка $M=(-3;5;2)$ між площинами $\alpha: 2x+7y-z+16=0$ і $\beta: 2x+7y-z-3=0$.
2. Обчислити відстань між площинами $x-4y+5z-8=0$, $3x-12y+15z+3=0$.
3. Виписати рівняння бісекторної площини для площин $2x-y+2z+3=0$, $4x-3z-4=0$.
4. Написати рівняння площини α, яка перетинається з площинами $\beta: 3x-y+4z+5=0$ і $\gamma: x-3y-3z-7=0$ по одній прямій. Ця площина перпендикулярна до площини $2x-3y+z-8=0$

III.

1. Визначити кут (гострий чи тупий) в якому знаходяться початок відліку і точка $M=(-3;2;3)$ між площинами $\alpha: 3x-2y+5z-21=0$ і $\beta: x+4z+17=0$.
2. Визначити при яких значеннях параметрів a, b площини $-2x+y-1=0$, $-3y+4z-b=0$, $x+ya-2z+1=0$ перетинаються: а) в одній точці; б) по одній прямій; в) по трьох непаралельних прямих.

Відповіді.

Ауд. І. 1) $4x - y + 3z - 2 = 0$. 2) $9x + 3y + 2z + 9 = 0$. 3) $x + y - 1 = 0$. 4) $2x + y + z = 0$. 5) $m = -6;\ n = \frac{15}{2}$. 6) $\frac{1}{54}$. 7) $2\sqrt{5},\ так$.

ІІ. 1) Так. 2) $\frac{7\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. 3) $x\left(\sqrt{2} \pm 3\sqrt{3}\right) + y\left(-2\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right) + z\left(4\sqrt{2} \mp 2\sqrt{3}\right) - 7\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3} = 0$. 4) $-8x + 2y + 6z + 11 = 0$.

ІІІ. 1) Різні тупі кути. 2) а) $a \neq -\frac{4}{7}$, б) $\varnothing$, в) $a = -\frac{4}{7}$.

Дом. І. 1) $4x - 3z + 17 = 0$. 2) $-x + y + z - 3 = 0$. 3) $10x + 2y - 3z - 13 = 0$. 4) $6x + 3y + 2z + 1 = 0$. 5) $\lambda = 10$. 6) $\frac{5}{18}; \frac{5}{18}; \frac{1}{18}$. 7) $\frac{5}{\sqrt{38}}$.

ІІ. 1) Так. 2) $\frac{9}{\sqrt{42}}$. 3) $-22x + 5y - z - 3 = 0,\ 2x + 5y - 19z - 27 = 0$. 4) $11x + 31y + 71z + 131 = 0$.

ІІІ. 1) В одному гострому куті. 2) а) $a \neq 1$, б) $a = 1,\ b = 1$, в) $a = 1, b \neq 1$.

Розділ 4. Пряма. Задачі на взаємне розташування прямої та площини.

Задати пряму в просторі можна, визначивши її напрямок (***напрямний вектор***) $\mathbf{u} = \{l; m; n\}$ та деяку точку прямої $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тоді пряма описується ***параметричними рівняннями***: $\boxed{x = x_0 + tl;\ \ y = y_0 + tm;\ \ z = z_0 + tn.}$ **(4.1)**

Тут t – параметр, що може набувати всіх можливих дійсних значень, визначаючи трійку координат деякої точки прямої. Виключаючи параметр t із системи параметричних рівнянь, одержимо ***канонічні рівняння*** прямої:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Слід зауважити, що дані рівняння містять не результат ділення, а результат відношення двох величин, тому з'явлення в знаменнику нульових значень цілком можливе і означає просто рівність нулю відповідних координат напрямного вектора. Зрозуміло також, що кожна система канонічних рівнянь однозначно визначає пряму, проте будь-яка пряма може бути описана різними канонічними рівняннями – досить обрати іншу точку на прямій, або інший напрямний вектор, колінеарний даному.

Приклад 4.1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(3,1,-2)$ паралельно прямій $x = 2 - \lambda;\ y = -3\lambda;\ z = -1 + 2\lambda$.

Напрямний вектор $\mathbf{u}$ заданої прямої визначаємо із її параметричних рівнянь: $\mathbf{u} = \{-1; -3; 2\}$. Шукана пряма паралельна заданій, отже, вектор $\mathbf{u}$ буде напрямним і для неї. За формулами **(4.1)** визначаємо канонічні рівняння нашої прямої: $\frac{x - 3}{-1} = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z + 2}{2}$.

Якщо ***пряма визначається двома точками*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, її канонічні рівняння мають вид :

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Пряма може бути задана як ***лінія перетину двох площин :***

$$\boxed{\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}} \qquad \textbf{(4.4)}$$

Щоб від рівнянь **(4.4)** перейти до канонічних рівнянь прямої **(4.2)**, необхідно визначити точку на прямій та її напрямний вектор. Підставляючи в рівняння **(4.4)** довільне значення однієї із змінних, наприклад, $z=z_0$, треба розв'язати систему відносно двох інших параметрів x та y. Таким чином матимемо координати деякої точки на прямій. Напрямний вектор $\mathbf{u}$ прямої можна знайти як векторний добуток нормалей площин, що задають пряму: $\mathbf{u}=\{A_1; B_1; C_1\}\times\{A_2; B_2; C_2\}$, оскільки дана пряма належить кожній з площин, а тому перпендикулярна до обох нормалей.

Приклад 4.2. Скласти параметричні рівняння прямої $x-2y+3z=0$, $x+y-6=0$.

Напрямний вектор $\mathbf{u}$ шуканої прямої визначимо як векторний добуток нормалей площин: $\mathbf{u}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\{-3;3;3\}$, або $\mathbf{u}=\{-1;1;1\}$. Знайдемо ще точку, що належить шуканій прямій. Покладемо, наприклад, $z=0$ та розв'яжемо систему $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y-6=0 \end{cases}$. Помноживши перше рівняння на -1 та додавши до другого, знайдемо $y=2$. Отже, тоді $x=4$, і точка $(4,2,0)$ належить прямій. Залишилось записати параметричні рівняння цієї прямої: $x=4-\lambda;\ y=2+\lambda;\ z=\lambda$.

Для розв'язку задач інколи зручно користуватися поняттям ***пучка площин*** з віссю L – це вся множина площин, що проходять через задану пряму L. Можна показати, що пучок площин з віссю **(4.4)** описується параметричним рівнянням $\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$, де параметри α та β набувають довільних дійсних значень $(\alpha^2+\beta^2\neq 0)$. Зрозуміло, що дані параметри можуть бути визначені лише з точністю до пропорційності.

Приклад 4.3. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{2}$ з площиною $3x-y-2z-7=0$.

Використаємо параметричні рівняння прямої $x=3-\lambda;\ y=1-2\lambda;\ z=-2+2\lambda$ та підставимо їх у рівняння площини. Таким чином з'ясуємо, при якому значенні параметру λ має місце перетин прямої з площиною: $3(3-\lambda)-(1-2\lambda)-2(-2+2\lambda)-7=0$, звідки $\lambda=1$. Отже, $x=2;\ y=-1;\ z=0$ – точка перетину даної прямої з площиною.

Приклад 4.4. Знайти кут α між прямою $\frac{x-5}{6}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{1}$ та площиною $7x+2y-3z+5=0$.

Нехай $\mathbf{u}=\{6;-3;1\}$ – напрямний вектор прямої, а $\mathbf{n}=\{7;2;-3\}$ – нормаль площини. Тоді $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{n}|}=\frac{6\cdot 7+(-3)\cdot 2+1\cdot(-3)}{\sqrt{6^2+(-3)^2+1^2}\sqrt{7^2+2^2+(-3)^2}}=$
$=\frac{33}{\sqrt{46}\sqrt{62}}$.

Щоб *знайти точку* Q *симетричну заданій точці* P *відносно площини* α необхідно:. 1) записати параметричне рівняння – прямої, що проходить через точку P, перпендикулярної до площини α (напрямний вектор цієї прямої є нормаллю площини); 2) знайти точку E перетину цієї прямої з площиною α – це проекція точки P на площину α; 3) знайдена точка E – це середина відрізка PQ, тому для знаходження координат точки Q, наприклад координати x, використовуємо рівняння $x_E=\frac{x_P+x_Q}{2}$.

Приклад 4.5. Знайти точку, симетричну точці $P(2,7,1)$ відносно площини $x-4y+z+7=0$.

Запишемо рівняння прямої, що прпоходить через точку P, перпендикулярно до площини: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z-1}{1}$. Знайдемо точку E перетину її з площиною (як описано в **прикладі 4.3**): $E(3,3,2)$. Точка E буде серединою відрізку PQ, де Q – шукана симетрична точка. Отже, $Q(4,-1,3)$.

Приклад 4.6. Знайти відстань точки $P(1,3,5)$ від прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

Побудуємо площину, що проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої: $1\cdot(x-1)-1\cdot(y-3)-1\cdot(z-5)=0$, або $x-y-z+7=0$. Відшукаємо точку E перетину цієї площини із заданою прямою: $E(-2,1,4)$. Шукана відстань дорівнює довжині відрізку PE: $d=|PE|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$.

Приклад 4.7. Сформулювати умови паралельності, перпендикулярності та ***належності прямої*** $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ ***площині*** $Ax+By+Cz+D=0$.

Пряма буде перпендикулярна площині тоді і тільки тоді, коли напрямний вектор $\mathbf{u}=\{l;m;n\}$ прямої буде колінеарним з нормаллю $\mathbf{n}=(A,B,C)$ площини, тобто при виконанні рівностей $\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$. Пряма та площина паралельні, тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ та $\mathbf{n}$ перпендикулярні, тобто виконана рівність $Al+Bm+Cn=0$. Пряма належить площині, якщо вони паралельні та принаймні одна точка прямої, наприклад, (x_0, y_0, z_0) належить цій площині, тобто виконані дві умови:

$$Al + Bm + Cn = 0\ ;\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0\,. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Приклад 4.8. Сформулювати умови ***перетину двох прямих*** $L_1: \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ та $L_2: \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$.

Якщо напрямні вектори прямих L_1 та L_2 колінеарні, тобто $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$, то прямі паралельні. Якщо ж прямі L_1 та L_2 не є паралельними, то вони можуть бути мимобіжними, або мати точку перетину. Сформулюємо умови останнього. Неважко зрозуміти, що дві непаралельні прямі перетинаються тоді і тільки тоді, коли вони належать одній площині. Для цього необхідно та достатньо, щоб одній площині були паралельні вектори $\mathbf{u}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$, $\mathbf{u}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$ та вектор $\mathbf{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, тобто має бути виконана умова компланарності векторів $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{M_1M_2}$: $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{M_1M_2} = 0$, або

$$\boxed{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0}. \qquad \textbf{(4.6)}$$

Приклад 4.9. Знайти найкоротшу відстань між двома мимобіжними прямими $L_1: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$ та $L_2: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{3}$.

Побудуємо площину σ, якій належить одна з прямих, приміром, L_2, паралельну до іншої – L_1. Тоді шукана відстань d буде відстанню від довільної точки прямої L_1 (нам відома одна з її точок – точка $M_1(3{,}1{,}2)$) до площини σ. Позначимо напрямні вектори заданих прямих відповідно $\mathbf{u}_1 = \{1; -1; 2\}$ та $\mathbf{u}_2 = \{-1; 3; 3\}$, відому точку на L_2 – $M_2(0{,}2{,}0)$. Нехай $M(x, y, z)$ буде довільна точка на шуканій площині σ. Для визначення рівнянні площини використаємо компланарність векторів $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ та $\mathbf{M_2M}$: $\begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$,

звідки одержимо рівняння площини σ: $9x + 5y - 2z - 10 = 0$. Нормальне рівняння цієї площини матиме вигляд $\dfrac{9x + 5y - 2z - 10}{\sqrt{110}} = 0$, тому

$$d = \frac{|9 \cdot 3 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{110}} = \frac{18}{\sqrt{110}}\,.$$

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1. Написати рівняння прямої паралельної до осі $0z$, що містить точку $M_1=(2;-1;3)$.
2. Пряма проходить через точки $M_1=(2;-1;-3)$ і $M_2=(-1;4;-4)$. Знайти точку перетину з координатною площиною $0zx$.
3. Написати параметричне рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z-7=0, \\ -2x-y+z+6=0 \end{cases}$.
4. Точки $A=(1;2;5)$, $B=(4;2;1)$ і $C=(4;5;5)$ -- вершини трикутника. Виписати рівняння бісектриси опущеної з точки B та визначити на які кути вона ділить кут B.
5. Визначити при яких значеннях параметрів m, n прямі $\begin{cases} x-3y+z-7=0, \\ 2x-3z+8=0 \end{cases}$ та $\frac{x-3}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z+3}{8}$ паралельні.
6. Написати рівняння площини α, перпендикулярної до площини β: $-x+2y-4z-3=0$ і містить пряму $\begin{cases} x=2-5t, \\ y=-1+4t, \\ z=1-3t \end{cases}$.
7. Знайти проекцію точки $P=(-6;2;-5)$ на площину $\alpha: -3x+2y-4z+16=0$.
8. Знайти точку Q симетричну до точки $P=(-2;0;7)$ відносно прямої $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{-3}$.

II.

1. Написати рівняння прямої, яка перетинає прямі $\frac{x+3}{6}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{0}$ та $\frac{x+4}{3}=\frac{y+3}{-15}=\frac{z-1}{-4}$ і проходить через точку $M=(-2;5;2)$.
2. Написати рівняння прямої a, що проходить через точку $M=(-2;-1;0)$, і перетинає перпендикулярно пряму $\frac{x-5}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-1}{4}$.
3. Знайти відстань між прямими $\begin{cases} -x+5y+5z-2=0, \\ -3x+5z-24=0 \end{cases}$ та $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+6}{3}$.
4. Перевірити, що прямі мимобіжні і знайти відстань між прямими $\frac{x+3}{1}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-2}{1}$ і $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

III.

1. На площині $3x-5y-2z-2=0$ знайти таку точку P сума відстаней до двох фіксованих точок $A=(2;1;-3)$ і $B=(-4;2;8)$ є мінімальною.

2. Знайти проекцію прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-4}{-1}$ відносно площини $5x-y-3z-15=0$.

Завдання для домашної роботи.

I.

1. Написати рівняння прямої паралельної до вектора $a=(-1;0;3)$, що містить точку $M=(0;-5;2)$.
2. Пряма проходить через точки $M_1=(4;-2;1)$ і $M_2=(3;-1;-6)$. Знайти точки перетину з координатними площинами.
3. Написати канонічне рівняння прямої $\begin{cases}4x-7y+z+5=0,\\ x-2z+17=0\end{cases}$.
4. Точки $A=(-1;3;1)$, $B=(2;4;1)$ і $C=(1;5;-2)$ -- вершини трикутника. Знайти рівняння медіани, опущеної з точки B.
5. Визначити при яких значеннях параметрів λ прямі $\begin{cases}2x-3y+z-13=0,\\ y-4z+7=0\end{cases}$ та $\frac{x-1}{-\lambda}=\frac{y-7}{2\lambda+1}=\frac{z-6}{-3}$ перпендикулярні.
6. Визначити кут між прямими $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{1}$ та $\begin{cases}3x-2y+z-5=0,\\ x+3y-2z+10=0\end{cases}$.
7. Написати рівняння площини α, що проходить через дві паралельні прямі $\begin{cases}5x-2y-6=0,\\ x-y-z+2=0\end{cases}$ та $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{-10}=\frac{z-3}{6}$.
8. Знайти проекцію точки $P=(50;-20;-10)$ на пряму $\frac{x-9}{5}=\frac{y-25}{13}=\frac{z}{1}$.
9. Знайти точку Q симетричну до точки $P=(-3;7;5)$ відносно площини $5x+2y-z+36=0$.

II.

1. Написати рівняння прямої, яка перетинає пряму $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{1}$, перпендикулярна до вектора $a=(1;-2;0)$ і проходить через точку $M=(-2;1;1)$.
2. Написати рівняння площини, що перетинає пряму $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{1}$ в точці, де $z=45$ і паралельна до двох прямих $\begin{cases}x-y-z+2=0,\\ 5x-2y-9=0\end{cases}$ і $\begin{cases}x+y+z-5=0,\\ 3x+y+8=0\end{cases}$.
3. Знайти відстань від точки $P=(2;-4;-6)$ до прямої $\frac{x+1}{-4}=\frac{y+7}{-1}=\frac{z+3}{2}$.

4. Написати рівняння спільного перпендикуляра до прямих $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$ і $\begin{cases} x-3y-6z+1=0, \\ x+3y-11=0 \end{cases}$.

III.

1. На площині 2x+3y-4z-15=0 знайти таку точку P різниця відстаней до двох фіксованих точок $A=(5;2;-7)$ і $B=(7;-25;10)$ є максимальною.
2. Знайти пряму симетричну до прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{-1}$ відносно площини $2x+3y-z+1=0$.

Відповіді.

Ауд. I. 1) $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{1}$. 2) $P=\left(\frac{7}{5};0;-\frac{16}{5}\right)$. 3) $\begin{cases} x=\frac{19}{5}+t, \\ y=-\frac{8}{5}-7t, \\ z=-5t \end{cases}$. 4) $\frac{x-4}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{8}$, $\cos B/2=\frac{41}{5\sqrt{82}}$. 5) $m=13;\ n=\frac{20}{3}$. 6) $10x+17y+6z-9=0$. 7) $(0;-2;3)$. 8) $(-4;-8;1)$

II. 1) $\begin{cases} 2x+3y-11z+11=0 \\ 17x-11y+54z-19=0 \end{cases}$. 2) $\frac{x+2}{4}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{5}$. 3) $\sqrt{107}$. 4) $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

III. 1) $\left(\frac{4}{3};\frac{10}{9};-\frac{16}{9}\right)$. 2) $\begin{cases} 5x+4y+7z-10=0, \\ 5x-y-3z-15=0 \end{cases}$.

Дом. I. 1) $\frac{x}{-1}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-2}{3}$. 2) $(0;2;-27),(2;0;-13),\left(\frac{27}{7};-\frac{13}{7};0\right)$. 3) $\frac{x+17}{14}=\frac{y+9}{9}=\frac{z}{7}$. 4) $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-1}{-3}$. 5) $\lambda=-\frac{2}{5}$. 6) $\cos\varphi=-\frac{22}{3\sqrt{570}}$. 7) $-7x+y-3z+18=0$. 8) $(-1;-1;-2)$. 9) $(-13;3;7)$

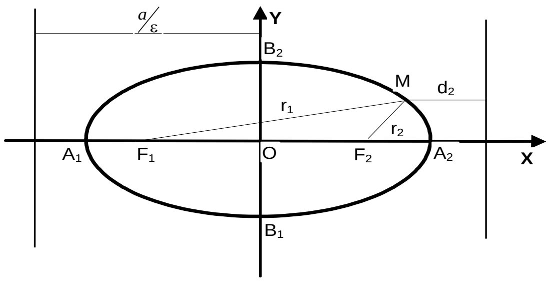
II. 1) $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 16x+7y-11z+36=0 \end{cases}$. 2) $x-7y-11z-27=0$. 3) $\sqrt{6}$. 4) $\frac{x-4}{-3}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z+2}{1}$.

III. 1) $(-1;3;2)$. 2) $\begin{cases} x+2z+3=0, \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$.

Розділ 5. Криві другого порядку.

5.1. Еліпс.

Еліпс – це геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох фіксованих точок F_1 та F_2, званих ***фокусами*** еліпса, є величиною сталою. Якщо позначити цю суму через $2a$, а відстань між фокусами через $2c$ (очевидно, що $2a > 2c$), то можна одержати канонічне рівняння еліпса:



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}. \qquad \textbf{(5.1)}$$

Тут $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, а система координат вибрана так, що її початок ділить навпіл відстань між фокусами, розташованими на осі абсцис (див. рис.).

Оскільки $a > b$, то величини $A_1A_2 = 2a$ та $B_1B_2 = 2b$ називають відповідно ***більшою*** та ***меншою осями*** еліпсу. Якщо ж фокуси еліпса розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, то більшою є вісь $2b$, а меншою – $2a$. Точка O зветься ***центром*** еліпса, а вісь, на якій розташовані фокуси – фокальною віссю.

Розглянемо еліпс фокальна вісь якого співпадає з віссю $0x$. Число $\varepsilon = c/a < 1$, де a – <u>більша піввісь</u> еліпса, називають його ***ексцентриситетом***.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпсу, відрізки F_1M та F_2M називаються ***фокальними радіусами*** точки M. Їх довжини r_1 та r_2 виражаються формулами: $\quad r_1 = a + x\varepsilon, \quad r_2 = a - x\varepsilon.$ **(5.2)**

Директрисами еліпса називаються прямі, перпендикулярні фокальній осі еліпса, симетрично розташовані на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від його центру. Таким чином, директриси описуються рівняннями: $\quad x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$ **(5.3)**

Вони розташовані зовні еліпсу. Директриси еліпсу, крім того, мають видатну фокальну властивість, а саме: відношення фокального радіусу довільної точки еліпса до її відстані до директриси, односторонньої з фокусом, є сталою величиною, рівною ексцентриситету, тобто

$$\frac{r_i}{d_i} = \varepsilon, i = 1{,}2. \qquad \textbf{(5.4)}$$

Приклад 5.1. Дано еліпс $5x^2 + 9y^2 = 180$. Виписати a, b, c, ε, написати рівняння його директрис.

Запишемо рівняння еліпсу у канонічному вигляді, для чого поділимо обидві частини на 180. Одержимо рівняння $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$, тобто $a^2 = 36;\ b^2 = 20$, звідки $c^2 = 16$. Таким чином, $a = 6$; $c = 4$, тому ексцентриситет рівний $\varepsilon = \frac{2}{3}$. Директриси даного еліпсу описуються рівняннями $x = \pm 9$.

Приклад 5.2. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокусу у 4 рази більша за її відстань від лівого фокусу.

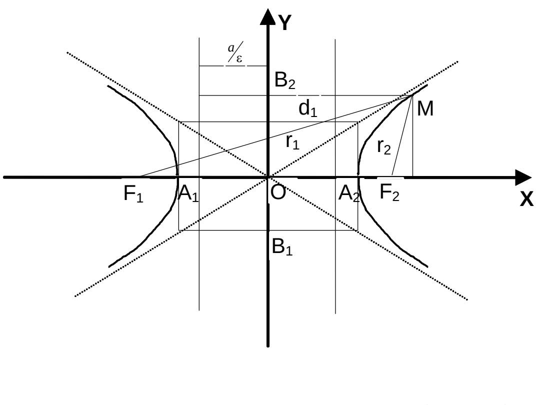
Для даного еліпсу маємо $a = 10$; $b = 6$; $c = 8$; $\varepsilon = \frac{4}{5}$. За умовою для фокальних радіусів шуканої точки $M(x, y)$ еліпсу виконана рівність $r_2 = 4r_1$. Скориставшись формулами **(5.2)**, можемо записати: $10 - \frac{4}{5}x = 4\left(10 + \frac{4}{5}x\right)$, звідки маємо $x = -\frac{15}{2}$. З рівняння **(5.1)** знайдемо $y = \pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$. Таким чином, дві точки задовольняють умові.

5.2. Гіпербола.

Гіперболою називається геометричне місце точок, які мають таку властивість: модуль різниці відстаней будь-якої точки гіперболи від двох фіксованих точок F_1 та F_2, що називаються ***фокусами***, є сталою величиною. Як і у випадку еліпса позначимо цю різницю через $2a$, а відстань між фокусами через $2c$ (очевидно, що $2a < 2c$), тоді одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \textbf{(5.5)}$$

Тут $c^2 = a^2 + b^2 > 0$, а система координат вибрана так, що її початок ділить навпіл відстань між фокусами, розташованими на осі абсцис (див. рис.). Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається ***дійсною віссю*** гіперболи (гілки гіперболи перетинають вісь абсцис), а $B_1B_2 = 2b$ називають ***уявною віссю*** гіперболи. Точка O є ***центром*** гіперболи, а вісь, на якій розташовані фокуси – **фокальною віссю.**



Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються ***асимптотами гіперболи*** – можна показати, що гілки гіперболи нескінченно наближаються до них, проте не перетинають.

Гіпербола, що задається рівнянням $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, **(5.6)**

називається ***спряженою*** до гіперболи **(5.5)**. Її дійсною віссю є $B_1B_2 = 2b$, а уявною – $A_1A_2 = 2a$. Спряжена гіпербола має ті самі асимптоти.

Число $\varepsilon = {}^{c}\!/_{a} > 1$, де a – <u>дійсна піввісь</u> гіперболи, називають її ***ексцентриситетом***.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи, тоді її фокальні радіуси F_1M та F_2M мають довжини r_1 та r_2 , які раціонально виражаються через параметри гіперболи, проте вигляд формули залежить від того, на якій гілці гіперболи – лівій чи правій взято цю точку. Отже, ***для лівої гілки*** гіперболи маємо: $r_1 = -x\varepsilon - a$, $r_2 = -x\varepsilon + a$, **(5.7)**

для правої гілки гіперболи:

$r_1 = x\varepsilon + a$, $r_2 = x\varepsilon - a$, **(5.8)**

Директрисами гіперболи називаються прямі, перпендикулярні фокальній осі гіперболи, симетрично розташовані на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від її центру.

Таким чином, директриси описуються рівняннями: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ **(5.9)**

і розташовані між гілками гіперболи.

Директриси гіперболи, мають ту саму фокальну властивість, що й директриси еліпсу, тобто $\frac{r_i}{d_i} = \varepsilon, i = 1,2$. **(5.10)**

Приклад 5.3. Для гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ визначити: 1) координати фокусів; 2) її ексцентриситет; 3) записати рівняння директрис та асимптот; 4) записати рівняння спряженої гіперболи та знайти її ексцентриситет.

Для даної гіперболи маємо $a = 3;\ b = 4$, отже, $c = 5$. Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1(-5{,}0)$ та $F_2(5{,}0)$, ексцентриситет рівний $\varepsilon = \frac{5}{3}$. Далі, директриси даної гіперболи описуються рівняннями $x = \pm\frac{9}{5}$, а асимптоти – $y = \pm\frac{4}{3}x$. Спряжена гіпербола $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ має ексцентриситет рівний $\varepsilon_{спряж.} = \frac{5}{4}$.

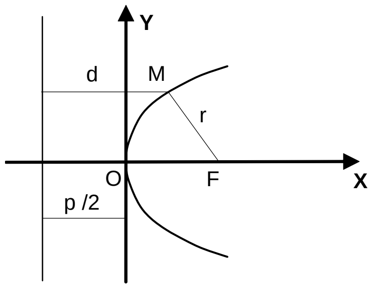
Приклад 4. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, фокальні радіуси якої перпендикулярні один до одного.

Нехай точка $M(x, y)$ є шуканою точкою гіперболи. Шукатимемо спочатку її на правій гілці гіперболи (оскільки ліва гілка гіперболи симетрична правій, точки на ній будуть симетричні знайденим на правій). За умовою задачі, для цієї точки справедлива рівність $r_1^2 + r_2^2 = (2c)^2$ (див. рис.2 – трикутник F_1MF_2 має бути прямокутним). З урахуванням формул **(5.8)** одержимо: $x^2\varepsilon^2 + a^2 = 2c^2$. Оскільки для даної гіперболи $a = 4;\ b = 3;\ c = 5$, то

$\varepsilon = \frac{5}{4}$, то для правої гілки знаходимо $x = \frac{4}{5}\sqrt{34}$. З урахуванням симетрії маємо дві точки на правій гілці: $M\left(\frac{4}{5}\sqrt{34}, \pm\frac{9}{5}\right)$, та ще дві точки, що задовольняють умову на лівій гілці: $M\left(-\frac{4}{5}\sqrt{34}, \pm\frac{9}{5}\right)$.

5.3. Парабола.

Параболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких відстань



до деякої прямої, що зветься ***директрисою***, рівна відстані цієї точки до деякої фіксованої точки – ***фокуса параболи***. Систему координат виберемо так, щоб вісь абсцис була перпендикулярна директрисі, а початок координат був би серединою відрізка проведеного від фокуса до директриси – його довжину будемо називати ***параметром параболи*** та позначимо через p ($p > 0$)

Парабола описується канонічним рівнянням $\boxed{y^2 = 2px}$ **(5.11)**

Вісь OX є ***віссю*** параболи, а точка $O(0;0)$ – її ***вершиною***. Очевидно, що координати фокуса параболи $F\left(p/2;0\right)$, а рівняння директриси параболи:

$$x = -p/2. \qquad \textbf{(5.12)}$$

З означення параболи випливає, що для довільної точки $M(x, y)$ довжина її фокального радіуса $r = |FM|$ рівна: $r = p/2 + x$, **(5.13)**

Якщо d – відстань точки M від директриси, то для параболи маємо властивість $\frac{r}{d} = 1$. Визначимо для параболи ексцентриситет, рівний 1, тоді останню формулу та формули **(5.4)** та **(5.10)** можна об'єднати в одну спільну властивість точок кривих другого порядку: $\frac{r}{d} = \varepsilon$, **(5.14)**

де $\varepsilon < 1$ для еліпса, $\varepsilon > 1$ для гіперболи та $\varepsilon = 1$ для параболи.

Приклад 5.5 Скласти рівняння параболи, якщо дано рівняння її директриси $x + 3 = 0$ та координати фокуса $F(5;0)$.

З рівняння директриси видно, що фокальна вісь параболи – це вісь абсцис, а відстань фокуса від директриси рівна 8, отже, параметр параболи $p = 8$. Вершина параболи має знаходитись посередині між директрисою та фокусом, отже, її координати $O\,(1;0)$ – вона зміщена відносно початку координат на одиницю праворуч, тому канонічне рівняння параболи буде таким: $y^2 = 16(x - 1)$.

Приклад 5.6. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що парабола симетрична відносно осі OY, проходить через початок координат та через точку $M(6, -2)$.

Оскільки віссю параболи є вісь OY, то її рівнянням буде $x^2 = 2py$, або $x^2 = -2py$ (в залежності від напрямку гілок параболи). Щоб знайти параметр p, підставимо в рівняння параболи координати точки M: $36 = \pm 2p(-2)$, звідки $p = 9$. Отже рівняння параболи має вид $x^2 = -18y$.

Приклад 5.7. Визначити координати вершини параболи, її параметр та напрямок осі, якщо вона задана рівнянням: $y = x^2 - 8x + 15$.

Рівняння параболи перепишемо, виділивши у правій частині повний квадрат: $y + 1 = (x-4)^2$. Тепер видно, що вершиною параболи є точка $O(4;-1)$, її фокальна вісь співнапрямлена осі ординат, а параметр рівний $\frac{1}{2}$.

Завдання для аудиторної роботи.

І.

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично початку координат, якщо більша його вісь рівна 8, і відстань між директрисами рівні 16.
2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі ординат, симетрично початку координат, якщо відстань між його фокусами рівна 24, а ексцентриситет рівний 12/13.
3. Еліпс заданий рівнянням $9x^2 + 25y^2 = 225$. Визначити його півосі, фокуси, ексцентриситет та рівняння директрис.
4. Визначити, яка лінія задається рівнянням $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$, та зобразити її.
5. На еліпсі $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ задано точку $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$. Записати рівняння прямих, яким належать фокальні радіуси цієї точки.
6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично початку координат, якщо її уявна вісь рівна 6, і відстань між директрисами рівна 32/5.
7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат, симетрично початку координат, якщо рівняння її асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$, а відстань між її вершинами рівна 48.
8. Гіпербола задана рівнянням $16x^2 - 9y^2 = -144$. Визначити її півосі, фокуси, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот.
9. Визначити, яка лінія задається рівнянням $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$ та зобразити її.
10. Скласти рівняння параболи, яка розташована в лівій півплощині симетрично осі OX з вершиною в початку координат, якщо її параметр рівний 0,5.
11. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі OX і проходить через точку $M(-1;3)$.
12. Визначити, яка лінія задається рівнянням $x = -5\sqrt{-y}$ та зобразити її.

II.

1. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $9x^2+5y^2=1$, а дві інші – співпадають з кінцями його малої осі.
2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично початку координат, якщо точка $M(8;12)$ належить еліпсу, а відстань від цієї точки до лівого фокуса рівна 20.
3. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться у вершинах еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.
4. Вершина параболи знаходиться в точці $A(6;-3)$, а її директриса задана рівнянням $3x-5y+1=0$. Знайти фокус цієї параболи.
5. Довести, що вершини довільної гіперболи та чотири точки перетину її асимптот з директрисами лежать на одному колі.

III.

1. Вивести рівняння дотичних в точці $M_0(x_0;y_0)$ до кривих другого порядку:

   $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ – рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

   $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ – рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

   $yy_0=p(x+x_0)$ – рівняння дотичної до параболи $y^2=2px$.
2. Скласти рівняння гіперболи з асимптотами $\sqrt{3}x\pm y=0$, яка дотикається до прямої $2x-y-3=0$.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично початку координат, якщо мала його вісь рівна 6, і відстань між директрисами рівні 13.
2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі ординат, симетрично початку координат, якщо відстань між його фокусами рівна 6, а відстань між директрисами рівна $16\frac{2}{3}$.
3. Визначити півосі еліпса $16x^2+y^2=16$.
4. Еліпс заданий рівнянням $9x^2+5y^2=45$. Визначити його півосі, відстань між фокусами, ексцентриситет та рівняння директрис.
5. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично початку координат, якщо її ексцентриситет рівний 3/2. і відстань між директрисами рівна 8/3.
6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично початку координат, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y=\pm\frac{3}{4}x$, і відстань між директрисами рівна $12\frac{4}{5}$.
7. Гіпербола задана рівнянням $16x^2-9y^2=144$. Визначити її півосі, фокуси, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот.

8. Визначити, яка лінія задається рівнянням $x = 9 - \sqrt{y^2 + 4y + 8}$ та зобразити її.
9. Скласти рівняння параболи, яка розташована в нижній півплощині симетрично осі OY з вершиною в початку координат, якщо її параметр рівний 3.
10. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі OY і проходить через точку $N(4;-8)$.
11. Визначити, яка лінія задається рівнянням $x = -\sqrt{3y}$ та зобразити її.

II.

1. Ексцентриситет еліпса рівний 0,4, відстань точки M еліпса до директриси рівна 20. Визначити відстань від цієї точки до фокуса, одностороннього з цією директрисою.
2. Ексцентриситет еліпса рівний $\frac{1}{3}$, один із фокусів (-2;0). Визначити відстань точки еліпса з абсцисою 2 до директриси, односторонньої із заданим фокусом.
3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично початку координат, якщо точка $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ належить еліпсу, а відстань між директрисами рівна 10.
4. Визначити точки гіперболи $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$, відстань яких до правого фокуса рівна 4,5.
5. Скласти рівняння гіперболи, якій належить точка $M\left(-3;\frac{5}{2}\right)$, а рівняння її директрис $x = \pm\frac{4}{3}$.
6. Фокуси гіперболи співпадають з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Скласти рівняння цієї гіперболи, якщо її ексцентриситет рівний 2.
7. Переконатись, що рівняння $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$ задає параболу, та знайти її вершину та параметр p.

III.

1. Довести оптичну властивість еліпса: дотична у будь-якій точці еліпса утворює рівні кути з фокальними радіусами точки дотику, тобто промінь світла, що виходить з одного фокуса, після відбиття в еліпсі проходить через його інший фокус.
2. Довести оптичну властивість гіперболи: дотична у будь-якій точці гіперболи утворює рівні кути з фокальними радіусами точки дотику.
3. Довести оптичну властивість параболи: дотична у будь-якій точці параболи утворює рівні кути з фокальним радіусом точки дотику та додатним напрямком осі абсцис – промінь світла, що виходить з фокуса параболи, після відбиття на параболі розповсюджується паралельно осі параболи.

Відповіді.

Ауд. І. 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$ 3) півосі 5 та 3, фокуси $(\pm 4;0), \varepsilon=\frac{4}{5}$, директриси $x=\pm\frac{25}{4}$ 4) половина еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, розташована в лівій півплощині 5) $5x+12y+10=0$ та $x-2=0$ 6) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 7) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$ 8) півосі 3 та 4, фокуси $(0;\pm 5), \varepsilon=\frac{5}{4}$, директриси $y=\pm\frac{16}{5}$, асимптоти $y=\pm\frac{4}{3}x$

9) гілка гіперболи $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-7)^2}{9}=-1$, розташована під прямою $y-7=0$

10) $y^2=-x$ 11) $y^2=-9x$ 12) частина параболи $x^2=-25y$, розташована у третьому координатному куті

ІІ. 1) $\frac{4\sqrt{5}}{45}$ кв. од. 2) $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{192}=1$ 3) $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$ 4) $F(9;-8)$

ІІІ. 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

Дом. І. 1) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$ або $\frac{x^2}{117/4}+\frac{y^2}{9}=1$ 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 3) півосі 1 та 4

3) півосі $\sqrt{5}$ та 3, фокуси $(0;\pm 2), \varepsilon=\frac{2}{3}$, директриси $y=\pm\frac{9}{2}$ 4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

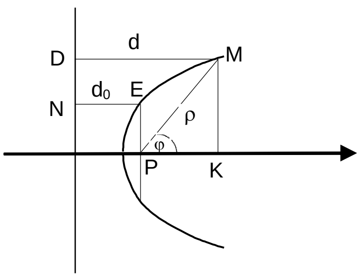
5) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 6) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 7) півосі 3 та 4, фокуси $(\pm 5;0), \varepsilon=\frac{5}{3}$, директриси $y=\pm\frac{9}{5}$, асимптоти $y=\pm\frac{4}{3}x$ 8)гілка гіперболи $\frac{(x-9)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$, розташована зліва від прямої $x-9=0$ 9) $x^2=-6y$ 10) $x^2=-2y$

11) частина параболи $x^2=3y$, розташована у другому координатному куті

І. 1) 8 2) 20 3) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$ 4) $\left(10;\pm\frac{9}{2}\right)$ 5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ або $\frac{x^2}{61/9}-\frac{y^2}{305/16}=1$ 6) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 7) $A(6;-1)$ та $p=3$

Розділ 6. Полярні рівняння кривих другого порядку. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного виду. Основні поверхні другого порядку.

6.1. Полярні рівняння кривих другого порядку.



Цікавим фактом, що підкреслює спорідненість всіх трьох основних кривих другого порядку є той, що їх рівняння у полярній системі координат мають однаковий вид. Розглянемо параболу, еліпс та лише праву (поки що) гілку гіперболи, направивши полярну вісь вздовж фокальної осі кривих (в додатному напрямку декартової осі OX) і розташувавши полюс відповідно у фокусі параболи, лівому фокусі еліпса та правому фокусі гіперболи. Таким чином фрагменти всіх кривих матимуть вигляд, наведений на рис. Тут P – полюс кривої, точка M – довільна точка однієї з названих кривих. Позначимо довжину її полярного радіусу ρ, а полярний кут – φ. Вертикальна пряма на малюнку – це директриса кривої (найближча до даного фокусу). Відрізок хорди кривої, що проходить через полюс перпендикулярно до полярної осі вважатимемо параметром полярного рівняння і позначимо через $2p$. Тоді ***полярне рівняння*** параболи, еліпса (полюс в лівому фокусі) та правої гілки гіперболи набуде вигляду

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}} \qquad \textbf{(6.1)}$$

Яка саме крива з трьох основних описана полярним рівнянням – визначає величина ексцентриситету кривої ε.

Полярним рівнянням параболи, еліпса (полюс в правому фокусі) та лівої гілки гіперболи буде наступне:

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}}.$$

Зв'язок параметрів p та ε полярного рівняння з параметрами канонічних рівнянь кривих у випадку, коли це еліпс або права гілка гіперболи встановлює наступна формула: $p = \dfrac{b^2}{a}$. У випадку параболи, p – це просто параметр її канонічного рівняння.

Приклад 6.1. Записати канонічне рівняння кривої, полярним рівнянням якої є наступне: $\rho = \dfrac{21}{5-2\cos\varphi}$.

Запишемо це рівняння у вигляді $\rho = \dfrac{21/5}{1-2/5\cos\varphi}$. Отже, $p = 21/5$, $\varepsilon = 2/5$, тобто полярне рівняння задає еліпс. Параметри його канонічного рівняння a та b можна одержати з виразів для p та ε. Ми ж поступимо іншим чином. Підставимо в рівняння з умови значення полярних кутів 0 та π: $\rho(0) = 7$, $\rho(\pi) = 3$. З рис. 4 неважко побачити, що тоді $a + c = 7$, $a - c = 3$, тобто $a = 5$, $c = 2$. Тоді $b^2 = 21$. Отже, канонічне рівняння даного еліпса: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$.

Приклад 6.2. Дано рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Скласти рівняння її правої гілки, вважаючи, що напрямок її полярної осі збігається з додатним напрямком осі OX, а полюс розташований у правому фокусі.

З рівняння гіперболи випливає, що $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$. Отже, $\varepsilon=5/4$, $p=b^2/a=9/4$. Таким чином, полярне рівняння даної гіперболи є таким: $\rho=\dfrac{9/4}{1-5/4\cos\varphi}$, або $\rho=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$.

6.2. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного виду.

Означення. ***Загальним рівнянням другого порядку*** називається рівняння виду:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad \textbf{(6.2)}$$

Рівняння **(6.2)** при певних значеннях коефіцієнтів $a_{ij}, (i, j=1,2,3)$ може задавати еліпс, гіперболу або параболу. Для того, щоб визначити канонічний вигляд кривої, рівняння **(6.2)** необхідно змінити, перетворивши певним чином систему координат. Почнемо з повороту координатних осей на такий кут φ , щоб знищити коефіцієнт a_{12}. Цей кут знаходимо як розв'язок тригонометричного рівняння

$$a_{12}t^2+(a_{11}-a_{22})t-a_{12}=0, \qquad \textbf{(6.3)}$$

де $t=\operatorname{tg}\varphi$. Тоді $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$ знайдемо із співвідношень $\sin\varphi=\pm\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos\varphi=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, а зв'язок старих та нових координат при повороті координатної системи виражається формулами:

$$\begin{cases} x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi \\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi \end{cases} \qquad \textbf{(6.4)}$$

В цій системі координат рівняння **(6.2)** набуває вигляду

$$\tilde{a}_{11}x'^2+\tilde{a}_{22}y'^2+2\tilde{a}_{13}x'+2\tilde{a}_{23}y'+a_{33}=0 \qquad \textbf{(6.5)}$$

Подальша мета зведення цього рівняння до канонічного виду – виконати паралельне перенесення осей в деяку точку (x_0, y_0):

$$\begin{cases} x'=x''+x_0 \\ y'=y''+y_0 \end{cases}, \qquad \textbf{(6.6)}$$

Її вибір визначатиметься значеннями коефіцієнтів рівняння **(6.5)**.

Приклад 6.3. Скласти канонічне рівняння кривої, заданої загальним рівнянням:

$$32x^2+52xy-7y^2+180=0$$

Складемо за коефіцієнтами рівняння тригонометричне рівняння **(6.3)** для визначення кута φ повороту декартової системи координат: $2t^2+3t-2=0$. Звідси визначаємо, що $\operatorname{tg}\varphi=1/2$ або $\operatorname{tg}\varphi=-2$. Вибираємо додатне значення кута та знаходимо: $\sin\varphi=1/\sqrt{5}$, $\cos\varphi=2/\sqrt{5}$. Формули **(6.4)** для даного прикладу набувають вигляду: $x=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}, y=\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}$. Отже, початкове рівняння набуває вигляду:

$$32\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)^2+52\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)-7\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2+180=0,$$

або $225x'^2-100y'^2=900$, звідки остаточно одержуємо рівняння спряженої гіперболи: $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=-1$

Приклад 6.4. Скласти канонічне рівняння кривої, заданої загальним рівнянням:

$$25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$$

Рівняння для визначення кута φ в цьому випадку набуває вигляду: $7t^2-7=0$,

звідки $t=\pm1$. Поклавши $\operatorname{tg}\varphi=1$, одержимо: $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$. Таким чином, початкове рівняння перетвориться на наступне:

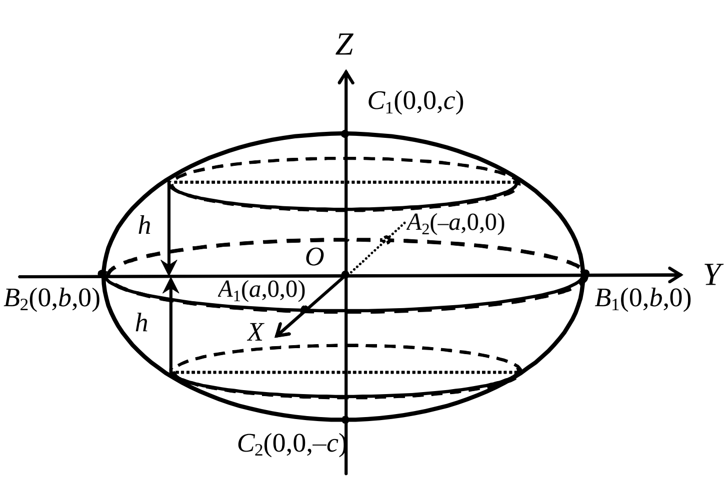
$$25\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-14\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+25\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2+64\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)-64\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)-224=0,$$

або $18x'^2+32y'^2-64\sqrt{2}y'-224=0$. Очевидно, що дане рівняння додатково вимагає паралельного перенесення осей (формули **(6.6)**): $x'=x''$, $y'=y''+\sqrt{2}$. Таким чином одержимо $18x''^2+32y''^2=288$ і остаточно: $\frac{x''^2}{16}+\frac{y''^2}{9}=1$ – канонічне рівняння еліпса.

6.3. Основні поверхні другого порядку.

Наведемо канонічні рівняння та рисунки основних видів невироджених поверхонь другого порядку.

6.3.1. Еліпсоїд.



Еліпсоїд описується рівнянням виду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \textbf{(6.7)}$$

$(a>0, b>0, c>0)$

З рівняння (2) безпосередньо випливає, що по-перше, дана поверхня симетрична відносно всіх трьох координатних площин, і по-друге, $|x|\le a,\ |y|\le b,\ |z|\le c$. Точки

$A_1(a,0,0)$, $A_1(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$ та $C_2(0,0,-c)$ називаються вершинами еліпсоїда. Форму поверхні визначаємо з допомогою перерізів.

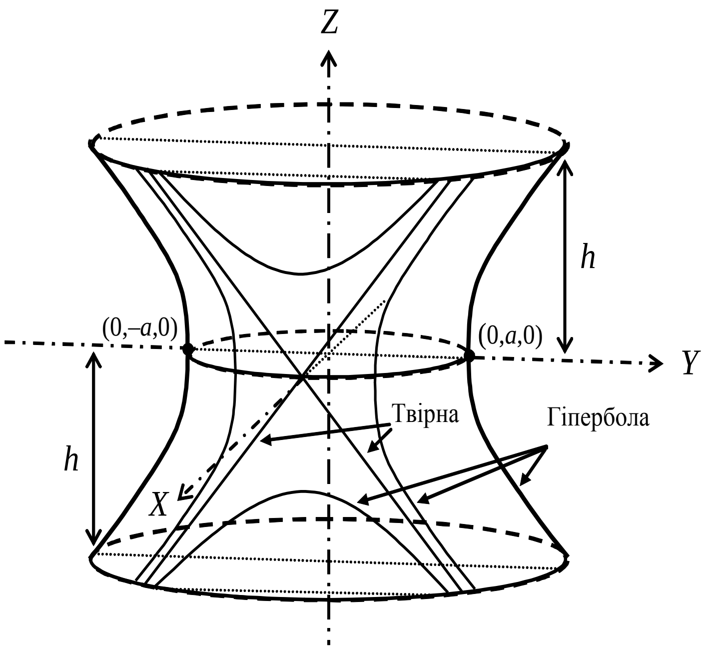
6.3.2. Однопорожнинний гіперболоїд.

Однопорожнинний гіперболоїд задається канонічним рівнянням виду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>0, b>0, c>0) \qquad \mathbf{(6.8)}$$

Очевидна симетрія точок поверхні відносно всіх трьох координатних площин.

Рівняння **(6.8)** визначає важливу особливість однопорожнинного гіперболоїда, а саме; через довільну точку однопорожнинного гіперболоїда проходить пара прямих, які лежать на цій поверхні. Це так звані ***прямолінійні твірні*** однопорожнинного гіперболоїда. Їх рівняння визначаються як лінії перетину таких пар площині:

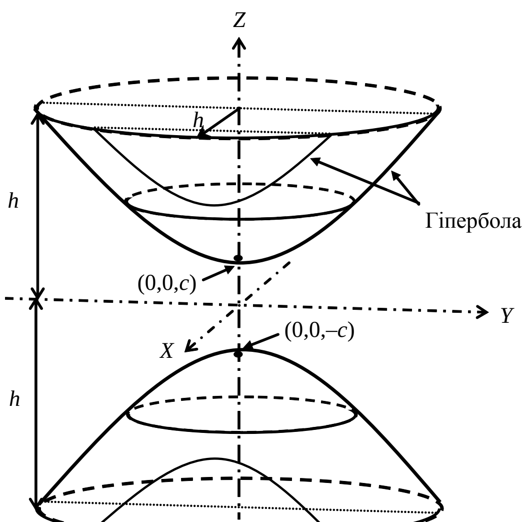


$$\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases} \qquad \mathbf{(6.9)}$$

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases} \qquad \mathbf{(6.10)}$$

Якщо розглянути довільну точку на гіперболоїді **(6.8)** і підставити її координати в одне з рівнянь сімейства **(6.9)** або **(6.10)**, то визначимо значення параметрів λ, μ та α, β , які відповідають парі прямих, що проходять саме через цю точку однопорожнинного гіперболоїда. Зрозуміло, що значення цих пар параметрів можуть бути визначені лише з точністю до спільного множника. Однопорожнинний гіперболоїд зображена на рис.

6.3.3. Двопорожнинний гіперболоїд.



Двопорожнинний гіперболоїд задається канонічним рівнянням виду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \mathbf{(6.11)}$$

$(a>0, b>0, c>0)$

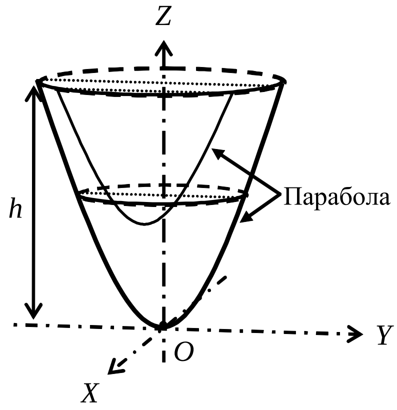
Ця поверхня, очевидно, також симетрична відносно всіх трьох координатних площин. Форму поверхні визначаємо з допомогою перерізів.

Точки $(0,0,\pm c)$ є вершинами двопорожнинного гіперболоїда – ця поверхня складається з двох окремих частин (див. рис.).

6.3.4. Еліптичний параболоїд.

Канонічним рівнянням еліптичного параболоїду є наступне:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0, q>0) \qquad \textbf{(6.12)}$$



Ця поверхня є симетричною відносно координатних площин XOZ та YOZ і розташована над площиною XOY. Її вершина – початок координат, точка $O(0,0,0)$). Її вигляд показаний на рис.

З а у в а ж е н н я . Слід зазначити, що будь-яка з розглянутих вище поверхонь може бути одержана при обертанні відповідної кривої другого поряду навколо деякої осі.

Наприклад, еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, розташований в площині XOZ, при обертанні навколо осі OZ опише еліпсоїд обертання:

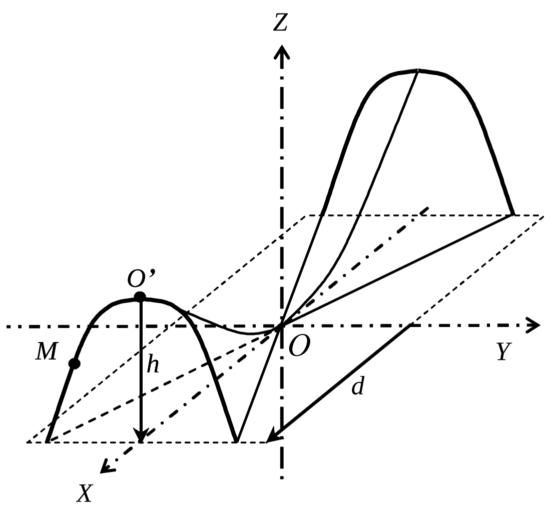
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Перетворенням координат $x'=x, y'=\lambda y, z'=z$, при якому вздовж осі OY відбувається «стискання», якщо $0<\lambda<1$, або «розтягування», якщо $\lambda>1$, можна одержати еліпсоїд **(6.7)**, де $b=\lambda a$.

Одно- та двопорожнинний гіперболоїди обертання можна одержати обертанням гіперболи відповідно навколо уявної або дійсної осей, а параболоїд обертання – обертанням параболи навколо її осі симетрії. Описане вище перетворення координат, застосоване до вказаних поверхонь обертання, приведе до рівнянь **(6.8)**, **(6.11)**, **(6.12)**.

Поверхня, розглянута далі, не може бути одержана обертанням жодної кривої другого порядку.

6.3.5. Гіперболічний параболоїд.



Гіперболічний параболоїд описується канонічним рівнянням:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad \textbf{(6.13)}$$

$(p>0, q>0)$

Т е о р е м а . Гіперболічний параболоїд **(6.13)** є поверхнею, утвореною рухом параболи $y^2=-2qz,\ x=0$, вершина якої ковзає вздовж нерухомої параболи $x^2=2pz,\ y=0$ так, що площини обох парабол залишаються взаємно перпендикулярними, а осі – протилежно напрямленими (див. рис.**)**.

Загальний вигляд гіперболічного параболоїда нагадує «сідло».

Зауваження 1. Якщо осі обох парабол, що рухаються описаним вище способом, напрямлені в один бік, то одержимо еліптичний параболоїд **(6.12)**.

Зауваження 2. Гіперболічний параболоїд так само, як і однопорожнинний гіперболоїд має два сімейства прямолінійних твірних:

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=\mu \\ \mu\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\lambda z \end{cases} \quad \textbf{(6.14)} \qquad \text{та} \qquad \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=\beta \\ \beta\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\alpha z \end{cases} \quad \textbf{(6.15)}$$

Приклад 6.5.

Визначити, при яких значеннях параметра m площина $x+mz-1=0$ перетинає двопорожнинний гіперболоїд $x^2+y^2-z^2=-1$ 1) по еліпсу; 2) по гіперболі.

Підставимо x з рівняння площини в рівняння гіперболоїда:

$$\begin{cases} (m^2-1)z^2-2mz+y^2+2=0 \\ x+mz-1=0 \end{cases}$$

Це рівняння проекції лінії перетину на площину YOZ. Тип даної проекції, очевидно, визначатиме і тип кривої в перетині площини з гіперболоїдом. Припущення про рівність $|m|=1$ приводить до параболи в перерізі. Оскільки цей випадок нас не цікавить, вважаємо, що $|m|\neq 1$. Виділяючи повний квадрат, перепишемо рівняння у вигляді:

$$\begin{cases} \left(z-\dfrac{m}{m^2-1}\right)^2+\dfrac{y^2}{m^2-1}=\dfrac{2-m^2}{(m^2-1)^2} \\ x+mz-1=0 \end{cases}$$

Це рівняння визначає гіперболу при $|m|<1$ і еліпс при $\begin{cases} |m|>1 \\ |m|<\sqrt{2} \end{cases}$

Приклад 6.6.

Переконавшись, що точка $M(1;3;-1)$ належить гіперболічному параболоїду $4x^2-z^2=y$, записати рівняння прямолінійних твірних, що проходять через неї.

Запишемо рівняння гіперболічного параболоїда у вигляді $(2x-z)\cdot(2x+z)=y$ та випишемо два сімейства його прямолінійних твірних:

1) $\begin{cases} \lambda(2x-z)=y \\ 2x+z=\lambda \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \mu(2x+z)=y \\ 2x-z=\mu \end{cases}$

Безпосередньо переконуємось, що координати точки $M(1;3;-1)$ задовольняють рівняння гіперболічного параболоїда, і підставляємо їх в сімейства 1) та 2). Звідки знаходимо значення параметрів $\lambda=1$ та $\mu=3$, при яких прямолінійні твірні цих сімейств проходять через задану точку. Отже, прямолінійні твірні, що проходять через точку M, визначаються рівняннями $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 2x+z-1=0 \end{cases}$ та

$\begin{cases} 6x - y + 3z = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$, або в канонічному виді: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+1}{-2}$ та $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{12} = \dfrac{z+1}{2}$.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1. Визначити, які лінії описують наступні рівняння: а) $\rho = \dfrac{15}{3 - \cos\theta}$

   б) $\rho = \dfrac{9}{5 - 6\cos\theta}$ в) $\rho = \dfrac{18}{11 - 11\cos\theta}$
2. Встановити, що рівняння $\rho = \dfrac{144}{13 - 5\cos\theta}$ визначає еліпс та скласти його канонічне рівняння.
3. Дано рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Встановити його полярне рівняння, за умови, що полярна вісь збігається з додатним напрямком осі OX, а полюс розташований у лівому фокусі.
4. Загальне рівняння кривої другого порядку $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8 = 0$ звести до канонічного вигляду та зобразити схематично одержаний геометричний образ в нових та старих координатах.
5. Загальне рівняння кривої другого порядку $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$ звести до канонічного вигляду та зобразити схематично одержаний геометричний образ в нових та старих координатах.
6. Переконатись, що площина $z + 1 = 0$ перетинає однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{32} - \dfrac{y^2}{18} + \dfrac{z^2}{2} = 1$ по гіперболі, найти її півосі та вершини.
7. Знайти точки перетину прямої $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z+2}{4}$ з поверхнею $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

II.

1. Встановити, що рівняння $\rho = \dfrac{16}{3 - 5\cos\theta}$ визначає праву гілку гіперболи та скласти полярні рівняння директрис та асимптот цієї гіперболи.
2. Загальне рівняння кривої другого порядку $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ звести до канонічного вигляду та зобразити схематично одержаний геометричний образ в нових та старих координатах.
3. Встановити, яка лінія визначається наступними рівняннями $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 2z \\ 3x - y + 6z - 14 = 0 \end{cases}$.

III.

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ навколо осі OZ.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1. Встановити, що рівняння $\rho=\dfrac{18}{4-5\cos\theta}$ визначає праву гілку гіперболи та скласти її канонічне рівняння.
2. Встановити, що рівняння $\rho=\dfrac{144}{13-5\cos\theta}$ визначає еліпс та скласти його канонічне рівняння, а також полярні рівняння його директрис.
3. Дано рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. Встановити полярне рівняння її правої гілки, за умови, що полярна вісь збігається з додатним напрямком осі OX, а полюс розташований у правому фокусі.
4. Загальне рівняння кривої другого порядку звести до канонічного вигляду та зобразити схематично одержаний геометричний образ в нових та старих координатах: а) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$ б) $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0$ в) $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0$ г) $16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$
5. Переконатись, що площина $y+6=0$ перетинає гіперболічний параболоїд $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=6z$ по параболі, знайти її параметр та вершину.
6. Знайти точки перетину прямої $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$ з поверхнею $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$.

II.

1. Знайти рівняння проекцій на координатні площини перерізу еліптичного параболоїда $y^2+z^2=x$ площиною $x+2y-z=0$.

2. Встановити, яка лінія визначається наступними рівняннями $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=2z\\ x-2y+2=0\end{cases}$.

III. Встановити, при яких значеннях m площина $x+my-2=0$ перетинає еліптичний параболоїд $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=y$ а) по еліпсу; б) по параболі.

Відповіді.

Ауд. I. 1) а) еліпс, б) гіпербола в) парабола 2) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$ 3) $\rho=\dfrac{16}{5-3\cos\theta}$ 4) уявний еліпс: $\dfrac{x'^2}{4}+y'^2=-1$, $\alpha=\pi/4$ 5) вироджена парабола – пара паралельних прямих: $x''^2=1$ $tg\alpha=2/3$ 6) 4,3; $(\pm 4;0;-1)$

7) (3;4;-2) та (6;-2;2)

II. 1) Директриси: $\rho=-\dfrac{34}{5\cos\theta}$ та $\rho=-\dfrac{16}{5\cos\theta}$, асимптоти: $\rho=\dfrac{20}{3\sin\theta-4\cos\theta}$ та $\rho=-\dfrac{20}{3\sin\theta+4\cos\theta}$ 2) гіпербола $\dfrac{x''^2}{9}-\dfrac{y''^2}{36}=1$ $tg\alpha=2$

3) еліпс з центром $(-\frac{3}{2};1;\frac{13}{4})$

III. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Дом. І. 1) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 2) $\rho=-\frac{21}{2\cos\theta}$ та $\rho=\frac{29}{2\cos\theta}$ 3) $\rho=\frac{9}{4-5\cos\theta}$ 4) а) гіпербола $x''^2-\frac{y''^2}{4}=1$, $\alpha=\pi/4$ б) уявний еліпс: $x''^2+2y''^2=-1$, $tg\alpha=-3$ в) вироджений еліпс: $2x''^2+3y''^2=0$, $\alpha=\pi/4$ г) вироджена парабола – пара уявних паралельних прямих: $y''^2=-1$, $tg\alpha=4/3$ 5) 15, $(0;-6;-\frac{3}{2})$ 6) (4;-3;2) – точка дотику

II. 1) OXY: $\begin{cases} x^2+4xy+5y^2-x=0 \\ z=0 \end{cases}$; OXZ: $\begin{cases} x^2-2xz+5z^2-4x=0 \\ y=0 \end{cases}$; OYZ: $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$ 2) парабола, не має центра.

III. а) $m\neq 0, m>-\frac{1}{4}$; при $m=-\frac{1}{4}$ – вироджений еліпс, точка б) $m=0$

Розділ 7. Матриці, дії з ними. Визначник матриці.
7.1. Матриці та дії з ними.

Матрицею (числовою) розмірностей $m\times n$ називатимемо прямокутну таблицю дійсних чисел, що складається із m рядків та n стовпчиків.

Елементи матриці будемо позначати $a^i_j\in\mathbf{R}$ (інколи використовують позначення з двома нижніми індексами: a_{ij}), де $i=\overline{1,m}$ – номер рядка, $j=\overline{1,n}$ – номер стовпчика. Таким чином,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}=\left(a^i_j\right)^{i=\overline{1,m}}_{j=\overline{1,n}}$$ – матриця розмірностей $m\times n$.

Дві матриці називатимемо ***рівними***, якщо вони мають однакові розмірності та рівні елементи з однаковими індексами.

Матрицю, всі елементи якої нульові, називатимемо ***нуль-матрицею*** і позначатимемо через $\mathbf{0}$. Матриця, яка складається з одного рядка, називається ***вектор-рядком***. Для неї використовують наступне позначення: $|\mathbf{A}\rangle=(a_1,a_2,....,a_n)$. Матриця, яка складається з одного стовпчика, називається ***вектор-стовпчиком.*** Його позначають, як $\langle\mathbf{A}|=\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$.

Матриця, у якої рівні розмірності, тобто $m = n$, називається ***квадратною*** матрицею розмірності (порядку) n. Сукупність елементів $a_1^1, a_2^2, \ldots, a_n^n \in \mathbf{R}$ називають ***головною діагоналлю*** квадратної матриці.

Серед квадратних матриць виділяють ***діагональну*** матрицю – всі елементи її рівні нулю, крім елементів головної діагоналі: $a_j^i = 0$ при $i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}$; ***верхню та нижню трикутні матриці*** – матриці з рівними нулю елементами відповідно під та над головною діагоналлю: $a_j^i = 0$ при $i < j$ або $i > j,\ i, j = \overline{1, n}$, та ***одиничну*** матрицю – діагональна матриця, у якої $a_i^i = 1,\ i = \overline{1, n}$. Одиничну матрицю розмірності n позначатимемо $\mathbf{E}_n$:

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ – матриці рівних розмірностей $m \times n$ з елементами a_j^i та b_j^i відповідно, де $\forall\, i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$.

Сумою матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називається матриця $\mathbf{C}$ розмірностей $m \times n$ з елементами $c_j^i = a_j^i + b_j^i \quad \forall\, i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$. ***Добутком*** **матриці** $\mathbf{A}$ **на число** λ називається матриця $\mathbf{C}$ з елементами $c_j^i = \lambda a_j^i\ \forall\, i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$. Матрицею, **протилежною** до матриці $\mathbf{A}$, називатимемо матрицю $(-1)\mathbf{A}$ і позначатимемо її через $-\mathbf{A}$. Таким чином, $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ для будь-якої матриці $\mathbf{A}$. **Різницею** матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називатимемо матрицю $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

Нехай $\mathbf{A}$– деяка матриці розмірностей $m \times n$ з елементами a_j^i, де $\forall\, i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$.

Матрицею ***транспонованою*** до матриці $\mathbf{A}$ називається матриця $\mathbf{A}^T$ розмірностей $n \times m$: $\mathbf{A}^T = \left(a_i^j\right)_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$.

Іншими словами, i-тим стовпчиком транспонованої матриці є i-тий рядок вихідної і навпаки: j-тим рядком транспонованої матриці є j-тий стовпчик вихідної матриці.

Властивості транспонованих матриць :

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

Приклад 7.1. Нехай $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, тоді $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Приклад 7.2. Нехай маємо вектор-стовпчик $|\mathbf{b}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, тоді при транспонуванні одержимо вектор-рядок $|\mathbf{b}\rangle^T = (1 \quad 0 \quad -1)$.

Квадратна матриця $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{i,\, j=\overline{1,n}}$ називається ***симетричною***, якщо $a_j^i = a_i^j \ \forall i, j = \overline{1,n}$, тобто $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Квадратна матриця $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{i,\, j=\overline{1,n}}$ називається ***кососиметричною***, якщо $a_j^i = -a_i^j \ \forall i, j = \overline{1,n}$, тобто $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

Приклад 7.3. Матриця $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ є, очевидно, симетричною, а матриця $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ – кососиметричною.

Розглянемо дві матриці $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ та $\mathbf{B} = \left(b_j^i\right)_{j=\overline{1,p}}^{i=\overline{1,n}}$

Добутком матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називається матриця

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(c_j^i\right)_{j=\overline{1,p}}^{i=\overline{1,m}}, \text{ де } c_j^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i b_j^k.$$

Зауваження. Множення матриць $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ можливе лише за умови, коли кількість стовпчиків матриці $\mathbf{A}$ співпадає з кількістю рядків матриці $\mathbf{B}$.

Для довільних матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ та $\mathbf{C}$, розмірності яких допускають їх множення, справедливі рівності:

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ (дистрибутивність)
2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ (дистрибутивність)
3. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ (асоціативність)
4. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$

Приклад 7.4. Нехай маємо вектор-рядок $\langle \mathbf{a}| = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$ та вектор-стовпчик $|\mathbf{b}\rangle = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$. Тоді добутком $\langle \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}\rangle = \sum_{k=1}^{n} a^k b_k$ є число, а добутком $|\mathbf{b}\rangle \cdot \langle \mathbf{a}|$ – квадратна матриця розмірності n:

$$|\mathbf{b}\rangle \cdot \langle \mathbf{a}| = \begin{pmatrix} b^1 a_1 & b^1 a_2 & \cdots & b^1 a_n \\ b^2 a_1 & b^2 a_2 & \cdots & b^2 a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b^n a_1 & b^n a_2 & \cdots & b^n a_n \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Цей приклад підкреслює той факт, що множення матриць не є комутативною операцією, тобто $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Приклад 7.5. Нехай $\mathbf{A}$ – квадратна матриця: $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$, $\mathbf{E}$ – одинична матриця розмірності n, $\langle \mathbf{E}^i |$ та $| \mathbf{E}_j \rangle$ – відповідно її i-тий рядок та j-тий стовпчик. Тоді $\langle \mathbf{E}^i | \cdot \mathbf{A} \cdot | \mathbf{E}_j \rangle = a_j^i \ \ \forall\, i, j = \overline{1,n}$.

Приклад 7.6. Нехай A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо AB=$\begin{pmatrix} -2-6 & 0+4 & 3+2 \\ 6+3 & 0-2 & -9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 5 \\ 9 & -2 & -10 \end{pmatrix}$. Множення $\mathbf{B}$ на $\mathbf{A}$ неможливе.

7.2. Визначник матриці та його властивості.

Розглянемо послідовність чисел $1,2,\ldots,n$. Числа в цій послідовності можна переставити $n!$ способами – дійсно, при виборі першого числа є n варіантів, при виборі другого – $n-1$ варіант, і так далі, для останнього – лише один..

Кожне можливе розташування цих чисел $(j_1\, j_2 \ldots j_n)$, де $j_k \in \{\overline{1,n}\}, j_i \neq j_k$, називається ***перестановкою*** n чисел $1,2,\ldots,n$.

Приклад 7.7. $(2\,1\,4\,3)$, $(3\,1\,4\,2)$ – перестановки 4-х чисел.

Очевидно, що кількість перестановок рівна $n!$. Крім того, можна розглядати перестановки елементів довільної природи, не обов'язково лише чисел. Визначальним є порядковий номер елементу в перестановці.

Транспозицією в перестановці n чисел називається дія, внаслідок якої два елементи перестановки міняються місцями. В результаті виникає нова перестановка.

В попередньому прикладі друга перестановка одержана з першої транспозицією першого та останнього елементів.

В перестановці $(j_1\, j_2 \ldots j_i \ldots j_k \ldots j_n)$ елементи j_i та j_k утворюють ***інверсію***, якщо $j_i > j_k$.

Вважатимемо, що кількість інверсій в перестановці – це кількість пар, що утворюють інверсію.

Перестановка називається ***парною***, якщо кількість інверсій в ній парна або рівна нулю, і ***непарною*** у супротивному випадку.

Визначник або ***детермінант*** матриці – це скаляр, який визначений для квадратної матриці $\mathbf{A} = \left(a_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$, і позначається $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A}$. Дамо означення цього поняття.

Визначником матриці $\mathbf{A} = \left(a_1^1\right) \equiv (a)$ порядку 1 називається єдиний елемент цієї матриці $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = a$. ***Визначником матриці порядку*** $n > 1$ називається число, яке задається наступною формулою:

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{(i_1\, i_2 \ldots i_n)} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{i_n} \cdot (-1)^t \qquad \textbf{(7.2)}$$

Тут t – кількість ***інверсій*** в перестановці $(i_1\, i_2 \ldots i_n)$, тобто $(-1)^t$ це 1 для парної та -1 відповідно для непарної перестановки індексів рядків.

Формула **(7.2)** має вербальну інтерпретацію визначника матриці, а саме: ***визначник квадратної матриці розмірності*** n ***– це алгебраїчна сума*** $n!$ ***доданків, утворених всіма можливими добутками*** n ***елементів матриці, взятих по одному з кожного стовпчика та рядка із знаками плюс або мінус в залежності від парності перестановки індексів вибраних рядків та стовпчиків.***

Приклад 7.8. Для матриці розмірності 2 формула (2) набуває вигляду:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1,$$

тобто виражає відоме раніше ***правило «хреста»***.

Приклад 7.9. Обчислимо визначник для матриці розмірності 3:

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3.$$

Таким чином, одержана відома раніше формула, що виражає ***правило «зірочки»***.

Перелічимо основні ***властивості визначників***:

1. Визначник транспонованої матриці збігається з визначником самої матриці: $\left|\mathbf{A}^T\right| = |\mathbf{A}|$. З цього твердження випливає, що всі твердження щодо визначника, пов’язані із стовпчиками матриці, виконуються і для рядків матриці.
2. Визначник діагональної матриці $\mathbf{D}$ рівний добутку елементів головної діагоналі: $|\mathbf{D}| = a_1^1 a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_n^n$. Звідси також випливає, що $|\mathbf{E}| = 1$, $|\mathbf{0}| = 0$.
3. Якщо в матриці один із стовпчиків (рядків) є нульовим, то визначник такої матриці рівний нулю.
4. Визначник трикутної матриці (верхньої або нижньої) рівний добутку елементів головної діагоналі: $|\mathbf{A}| = a_1^1 a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_n^n$.
5. Якщо два стовпчики (рядки) матриці поміняти місцями, визначник матриці змінить знак на протилежний.
6. Якщо матриця містить два однакових стовпчики (рядки), то її визначник рівний нулю.
7. Якщо один із стовпчиків (рядків) матриці помножити на деяке число , то визначник матриці помножиться на це число. Іншими словами за

знак визначника можна виносити будь-який ненульовий множник із довільного стовпчика або рядка. Ця властивість називається властивістю лінійності визначника.
8. Якщо в матриці два стовпчики (рядки) пропорційні, то визначник матриці рівний нулеві.
9. Якщо кожний елемент одного із стовпчиків (рядків) матриці, наприклад, з індексом k, можна подати у вигляді суми двох елементів: $a_k^i = b^i + c^i$, $i = \overline{1,n}$, то визначник такої матриці є сумою визначників двох матриць, всі стовпчики яких за винятком k-го, збігаються із стовпчиками самої матриці, а k-ті стовпчики утворені відповідно елементами b^i та c^i.
10. Якщо один із стовпчиків (рядків) матриці помножити на число λ та додати до іншого стовпчика (рядка), то визначник такої матриці не зміниться.
11. Визначник матриці не зміниться, якщо до деякого стовпчика (рядка) матриці додати деяку лінійну комбінацію інших стовпчиків (рядків).
12. Якщо стовпчики (рядки) матриці лінійно залежні, то визначник такої матриці рівний нулю.
13. Якщо $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ квадратні матриці порядку n, то визначник добутку цих матриць рівний добутку їх визначників: $|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = |\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.
14.

Доповняльним мінором до елемента a_j^i ***матриці*** $\mathbf{A}$ порядку n називається визначник порядку $(n-1)$, одержаний з матриці $\mathbf{A}$ викреслюванням i-го рядка та j-го стовпчика. Одержаний визначник позначається $\overline{\mathbf{M}}_i^j$.

(Правило Лапласа обчислення визначника). Для визначника будь-якої квадратної матриці $\mathbf{A}$ мають місце формули:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_j^k \overline{\mathbf{M}}_k^j \text{, де } k = \overline{1,n} \tag{7.3}$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_k^i \overline{\mathbf{M}}_i^k \text{, де } i = \overline{1,n} \tag{7.4}$$

Формула **(7.3)** називається ***розкладом визначника за елементами*** j***-го стовпчика***, а формула **(7.4)** – **розкладом визначника за елементами** i**-го рядка**. Ці співвідношення дають можливість обчислювати визначники порядку n рекурентно через визначники порядку $n-1$, а ті, в свою чергу, через визначники ще нижчих порядків.

Приклад 7.10. Обчислимо визначник четвертого порядку, скориставшись методом зведення матриці до трикутного вигляду операціями, які не змінюють визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1\cdot1 = 1$$

Перший крок полягав у тому, щоб множенням першого рядка матриці на (-1) і додаванням результату по черзі до кожного наступного рядка, одержати нулі під першим елементом першого стовпчика. Другим кроком аналогічними діями одержимо нулі під другим елементом другого стовпчика, потім – під третім елементом третього стовпчика. Таким чином, залишилось обчислити визначник одержаної верхньої трикутної матриці, він рівний добутку елементів на головній діагоналі.

Приклад 7.11. Обчислити визначник четвертого порядку: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

Скористаємось правилом Лапласа, розкриваючи визначник по першому рядку. На користь нього працює наявність одного нульового елементу в цьому рядку, що зменшує кількість подальших обчислень:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 0 & c \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & b & c \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4}.$$

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1. Виконати вказані дії з матрицями:

а) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}\,\alpha & \mathrm{ctg}\,\alpha \\ -\mathrm{ctg}\,\alpha & \mathrm{tg}\,\alpha \end{pmatrix}$ б) $-2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$, де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Знайти добутки матриць:

а) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ та $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}\,\alpha & \mathrm{ctg}\,\alpha \\ -\mathrm{ctg}\,\alpha & \mathrm{tg}\,\alpha \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ та $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$, де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Обчислити визначники матриць:

а) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

II.

1. Знайти значення наступних виразів від матриць:

а) $\mathbf{A}^n$, де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; б) $\mathbf{B}^n$, де, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2. Записати розклад матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ на суму симетричної та кососиметричної матриць.

3. Обчислити визначники матриць:

а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

III.

1. Обчислити $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -21 & 8 \end{pmatrix}^5$, використовуючи рівність

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -21 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Обчислити визначники матриць:

а) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, де $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

Завдання для домашньої роботи.

1. Виконати вказані дії з матрицями:

а) $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$, де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

б) $-\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$, де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Знайти добутки матриць:

а) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ та $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ та $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$, де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Обчислити визначники матриць:

а) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\,\alpha & 1 \\ -1 & \mathrm{tg}\,\alpha \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & y & x \\ y & x & y \end{vmatrix}$

II.

1. Знайти значення наступних виразів від матриць:

а) $\mathbf{A}^n$, де $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{B}^n$, де, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

2. Записати розклад матриці $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ -3 & 2 & 1 & -3\\ 2 & -3 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ на суму симетричної та кососиметричної матриць.

3. Обчислити визначники матриць:

а) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \operatorname{tg}\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta & \operatorname{tg}\beta\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \operatorname{tg}\gamma\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$

III.

1. Обчислити $\begin{pmatrix}4 & -1\\ 6 & -1\end{pmatrix}^6$, використовуючи рівність

$$\begin{pmatrix}4 & -1\\ 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначники матриць:

а) $\begin{vmatrix}1 & 1 & \varepsilon\\ 1 & 1 & \varepsilon^2\\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1\end{vmatrix}$, де $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ б) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n & n & n\end{vmatrix}$

Відповіді.

Ауд. I. 1) а) $\begin{pmatrix}\cos\alpha-2tg\alpha & -\sin\alpha-2ctg\alpha\\ \sin\alpha+2ctg\alpha & \cos\alpha-2tg\alpha\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 8 & 7\\ -6 & 3 & 4\\ 2 & -4 & -5\end{pmatrix}$. 2) а) $AB=BA=\begin{pmatrix}\cos\alpha+\sin\alpha & \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\\ -\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} & \cos\alpha+\sin\alpha\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 1 & -2 & -2\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$. в) $AA^T=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$; $A^TA=\begin{pmatrix}5 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$. 3) а) 1; б) -3; в) $a^3+b^3+c^3-3abc$.

II. 1) а) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3) а) $4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-2\beta}{4}\cos\frac{\gamma-2\alpha}{4}$. б) -3.

III. 1) $\begin{pmatrix} -185 & 62 \\ -651 & 218 \end{pmatrix}$. 2) а) 0; б) $n!$

Дом. I. 1) а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 8 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

2) а) $AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha - \sin\alpha & 2\cos\alpha + \sin\alpha \\ -\sin\alpha - \cos\alpha & -2\sin\alpha + \cos\alpha \end{pmatrix}$;

$BA = \begin{pmatrix} \cos\alpha - 2\sin\alpha & 2\cos\alpha + \sin\alpha \\ -\cos\alpha - \sin\alpha & \cos\alpha - \sin\alpha \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. в) $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 8 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$. 3) а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) 15; в) $(x-1)(2y^2 - x - x^2)$.

II. 1) а) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$; б) $B^{2k} = E$, $B^{2k+1} = B$.

2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) а) $\sin\alpha(\cos\beta tg\gamma - \cos\gamma tg\beta) - \cos\alpha(\sin\beta tg\gamma - \sin\gamma tg\beta) + tg\alpha\sin(\beta-\gamma)$.
б) -16.

III. 1) $\begin{pmatrix} 190 & -63 \\ 378 & -125 \end{pmatrix}$. 2) а) -3; б) $-n$

Розділ 8. Обернена матриця.

Матриці, які розглядатимуться в цьому розділі, вважаються квадратними матрицями порядку n.

Квадратна матриця $\mathbf{A}=\left(a_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ називається ***виродженою***, якщо $|\mathbf{A}|=0$ і ***невиродженою***, якщо $|\mathbf{A}|\neq 0$.

Квадратна матриця, $\mathbf{A}^{-1}=\left(\tilde{a}_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$, називається ***оберненою*** до невиродженої квадратної матриці $\mathbf{A}$, якщо $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

Властивості обернених матриць:

1. Обернена матриця єдина.
2. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$
3. $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$

Елементи оберненої матриці обчислюються за формулою: $\boxed{\tilde{a}_i^j=\dfrac{\mathbf{A}_i^j}{|\mathbf{A}|},\ i,j=\overline{1,n}}$,

де $\mathbf{A}_i^j=(-1)^{i+j}\cdot\overline{\mathbf{M}}_i^j$ – алгебраїчне доповнення елементу a_j^i.

Правило знаходження оберненої матриці. Отже, щоб визначити елементи матриці, оберненої до деякої матриці $\mathbf{A}$, необхідно, перш за все, обчислити визначник матриці $\mathbf{A}$. Якщо $|\mathbf{A}|\neq 0$, то обернена матриці існує. ***Елементи її*** j***-го <u>рядка</u> дорівнюють алгебраїчним доповненням до елементів*** j***-го <u>стовпчика</u> матриці*** $\mathbf{A}$***, поділеним на визначник матриці***.

1. Обчислюємо визначник матриці $\mathbf{A}$, обернена матриця існує, якщо $|\mathbf{A}|\neq 0$.
2. Записуємо матрицю з алгебраїчних доповнень до елементів a_j^i матриці $\mathbf{A}$, (враховуючи знаки) $\tilde{\mathrm{A}}=\left((-1)^{i+j}A_j^i\right)_{i,j=1}^n$.
3. Транспонуємо одержану матрицю $\tilde{\mathbf{A}}$ та ділимо на визначник $|\mathbf{A}|$: $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\tilde{\mathbf{A}}^T$.

Інший спосіб обчислення оберненої матриці – метод Гаусса зводиться до виконання допустимих перетворень з «надрозширеною» матрицею $(\mathbf{A}|\,\mathbf{E})$. Звівши її до вигляду $(\mathbf{E}|\,\tilde{\mathbf{A}})\equiv(\mathbf{E}|\,\mathbf{A}^{-1})$, одержимо обернену матрицю.

Приклад 8.1. Знайти обернену матрицю для невиродженої матриці розмірності 2: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

За умовою, $|\mathbf{A}|=ad-bc\neq 0$. Отже, оскільки алгебраїчним доповненням до елемента a є елемент d, і навпаки, а для елемента $b-(-c)$, так само , як і для елемента $c\,-(-b)$, то оберненою є матриця : $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Приклад 8.2. Знайти обернену матрицю для матриці $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

<u>1 спосіб</u> (метод алгебраїчних доповнень).

1. Знайдемо визначник матриці $|\mathbf{A}|=-1+6+2=7$.
2. Запишемо матрицю з алгебраїчних доповнень елементів першого рядка $\mathbf{A}_1^1=(-1)^{1+1}\cdot 2=2$, $\mathbf{A}_2^1=(-1)^{1+2}\cdot(-1)=1$, $\mathbf{A}_3^1=(-1)^{1+3}\cdot 3=3$; другого рядка: $\mathbf{A}_1^2=(-1)^{1+2}\cdot 4=-4$, $\mathbf{A}_2^2=(-1)^{2+2}\cdot(-2)=-2$, $\mathbf{A}_3^2=(-1)^{2+3}\cdot(-1)=1$ та третього рядка: $\mathbf{A}_1^3=(-1)^{1+3}\cdot 5=5$, $\mathbf{A}_2^3=(-1)^{2+3}\cdot 1=-1$, $\mathbf{A}_3^3=(-1)^{3+3}\cdot(-3)=-3$, таким чином, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}$.
3. $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}^T=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & -4 & 5\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7}\\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-3}{7}\end{pmatrix}$.

<u>2 спосіб</u> (метод Гаусса).

Запишемо розширену матрицю і будемо виконувати очевидні перетворення над її рядками:

$$(\mathbf{A}|\,\mathbf{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{5}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7}\end{array}\right)=(\mathbf{E}|\,\mathbf{A}^{-1}),\text{ отже, }\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7}\\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-3}{7}\end{pmatrix}.$$

Нехай $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ задані квадратні матриці порядку n.

Рівняння виду

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B},\text{ або}\qquad\textbf{(8.2)}$$

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{B},\qquad\textbf{(8.3)}$$

де $\mathbf{X}$ – невідома квадратна матриця порядку n, називаються *матричними рівняннями*.

Рівняння **(8.2)** та **(8.3)** будемо розв'язувати в припущення, що матриця $\mathbf{A}$ – невироджена. Для розв'язку рівняння **(8.2)** помножимо його обидві частини зліва на $\mathbf{A}^{-1}$. Одержимо: $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$, тобто $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$. Для розв'язку рівняння **(8.3)** помножимо його обидві частини справа на $\mathbf{A}^{-1}$. Одержимо: $\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}$, звідки $\mathbf{X}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}$.

Міркування, подібні наведеним вище при відшукання оберненої матриці, дозволяють розв'язувати рівняння виду **(8.2)** методом Гаусса. Якщо розширену матрицю $(\mathbf{A}|\,\mathbf{B})$ перетворити допустимими перетвореннями рядків так, щоб ліва матриця стала одиничною, то права матриця буде шуканою матрицею x, тобто $(\mathbf{A}|\,\mathbf{B}) \to (\mathbf{E}|\,\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}) \equiv (\mathbf{E}|\,\mathbf{X})$. Цей спосіб безпосередньо не може бути застосований до рівняння **(8.3)**. Проте, якщо замість цього рівняння розглянути еквівалентне йому рівняння $\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{X}^T=\mathbf{B}^T$, то метод Гаусса тут спрацьовує таким чином: $\left(\mathbf{A}^T|\,\mathbf{B}^T\right) \to \left(\mathbf{E}\middle|\,\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}\cdot\mathbf{B}^T\right) \equiv \left(\mathbf{E}|\,\mathbf{X}^T\right)$. Отже, шуканою буде матриця, транспонована до правої частини перетвореної розширеної матриці.

Приклад 8.3. Розв'язати матричне рівняння: $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Це рівняння виду **(8.3)**. Тут $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1 спосіб. Щоб розв'язати матричне рівняня використаємо правило $\mathbf{X}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}$.

Знайдемо $A^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$. Розв'язок $\mathrm{X}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

2 спосіб. Використаємо метод Гаусса:

$$\left(\mathbf{A}^T|\,\mathbf{B}^T\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & -1 & 1\\ -1 & 4 & 1 & 2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 7 & 0 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & \frac{-2}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7}\end{array}\right)$$

Отже, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$. У вірності відповіді можна переконатись безпосередньо.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1) Обчислити обернені матриці для матриць розмірами 2×2:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & -7\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & -8\end{pmatrix}$.

2) Обчислити обернені матриці для матриць розмірами 3×3:

а) $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 8 & -3 & 5\\ 11 & -4 & 7\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 4\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -6\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$.

3) Розв'язати матричне рівняння (обома способами):

а) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -7 & 5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

б) $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

II.

1) Знайти обернену матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Розв’язати матричне рівняння $X\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Розв’язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -90 & -100 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$.

4) Перевірити тотожність $\left(S^{-1}AS\right)^m = S^{-1}A^mS$.

III.

1) Розв’язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Як зміниться обернена матриця A^{-1}, якщо переставити $i-$ий та j-ий рядки.

3) Матриця A комутує з матрицею B. Довести, що матриця $\mathbf{A}^{-1}$ комутує з матрицею $\mathbf{B}^{-1}$.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1) Обчислити обернені матриці для матриць розмірами 2×2:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}$.

2) Обчислити обернені матриці для матриць розмірами 3×3:

а) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Розв’язати матричне рівняння (обома способами):

а) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -22 & -15 \\ -32 & -20 \end{pmatrix}$.

б) $X \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 24 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

II.

1) Знайти обернену матрицю $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ -7 & 20 & 13 \\ -1 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

3) Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

III.

1) Знайти обернену матрицю $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

2) Знайти обернену матрицю $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

3) Як зміниться обернена матриця A^{-1}, якщо $i-$ий рядок матриці A перемножити на число $\lambda \neq 0$.

4) Матриця А -- невироджена. Довести, що матриці $A+B$ і $E+A^{-1}B$ невироджені або вироджені одночасно.

Відповіді.

Ауд. І. 1) а) $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; б) вироджена. 2) а) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -7 & 5 \\ \frac{1}{3} & -4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -\frac{7}{3} & -3 & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 8 & 29 & -19 \\ 5 & 18 & -12 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. 3) а) $X = \begin{pmatrix} -12 & 65 \\ -17 & 92 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} 67 & 29 \\ 30 & 13 \end{pmatrix}$.

II. 1) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & -11 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -30 & -85 \end{pmatrix}$.

III. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. 2) Переставляться $i-$ий та j-ий стовпчики.

Дом. I. 1) а) $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda - 8}\begin{pmatrix} \lambda & 4 \\ 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$, якщо $\lambda \neq 4$ $і$ $\lambda \neq -2$.

2) а) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 2 \\ -\frac{26}{3} & -7 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & -5 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -28 & -5 & 32 \\ 22 & 4 & -25 \\ 23 & 4 & -26 \end{pmatrix}$.

3) а) $X = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

II. 1) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$.

III. 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. 2) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} -n+2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -n+2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & -n+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n+2 \end{pmatrix}$.

3) і-тий стовпчик оберненої матриці домножиться на $\frac{1}{\lambda}$.

Розділ 9. Ранг матриці. Системи однорідних рівнянь.

9.1. Ранг матриці.

Нехай $\mathbf{A} = \left(a^i_j\right)^{i=\overline{1,m}}_{j=\overline{1,n}}$ -- ненульова матриця розмірності $m \times n$, r – натуральне число таке, що $1 \le r \le min(m,n)$. Розглянемо довільні r рядків і r стовпчиків цієї матриці. Елементи матриці $\mathbf{A}$, які знаходяться на перетині вибраних r рядків та стовпчтків, утворюють квадратну матрицю розмірності $r \times r$. Визначник цієї матриці називається *мінором порядку r матриці A.*

Мінор $\mathbf{M}$ матриці $\mathbf{A}$ порядку r називається ***базисним***, якщо $\mathbf{M} \neq 0$, а всі мінори порядків $r+1$ рівні нулю (якщо вони існують), або $r = min(m,n)$ (тобто мінорів порядку $r+1$ не існує).

Рангом матриці A (позначається $Rank\mathbf{A}$ або $Rg\,\mathbf{A}$) називається порядок r її базисного мінору.

Зауважимо, що базисний мінор не визначений однозначно (можно взяти інші лінійно незалежні r стовпчиків і r рядків).

Для обчислення рангу матриці важливими є наступні твердження:

1. Ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних стовпчиків (рядків) цієї матриці.
2. Максимальне число лінійно незалежних стовпчиків дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків.

Теорема 9.1. Ранг матриці не змінюється при виконанні наступних елементарних перетворень рядків або стовпчиків матриці (будемо називати ці ***перетворення допустимими***):

- множення рядка (стовпчика) на число нерівне нулю;
- додавання до рядка (стовпчика) іншого рядка (стовпчика);
- перестановка двох довільних рядків (стовпчиків);
- викреслювання нульового рядка (стовпчика).

Очевидно, що ранг транспонуваної матриці співпадає з рангом початкової.

Для визначення рангу матриці прагнемо привести її з допомогою допустимих перетворень до *спрощеного (трапецієподібного) вигляду*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 & \cdots & b^1_r & \cdots & b^1_n \\ 0 & b^2_2 & \cdots & b^2_r & \cdots & b^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b^r_r & \cdots & b^r_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$ де $b^i_i \neq 0 \quad i = 1,\ldots,r.$ Визначник цієї матриці дорівнює добутку $b^1_1 b^2_2 \cdot\cdots\cdot b^r_r \neq 0$, отже, $Rg\mathbf{B} = r$ і відповідно $Rg\mathbf{A} = r$.

Алгоритм обчислення рангу.

Знайдемо базисний мінор. Для цього зведемо матрицю $\mathbf{A}$ до трапецієподібного вигляду $\mathbf{B}$, використовуючи допустимі перетворення. Для цього виконаємо наступні дії:

1. Викреслюємо в матриці **A** всі її нульові рядки і стовпчики, якщо такі є. Першим рядком записуємо рядок з ненульовим першим елементом, нехай це буде $a_1^1 \neq 0$. Другим рядком запишемо суму другого рядка і першого рядка, помноженого на $-\frac{a_1^2}{a_1^1}$, тобто елементами нового другого рядка будуть $\tilde{a}_j^2 = a_j^2 + \left(-\frac{a_1^2}{a_1^1}\right) \cdot a_j^1$. Аналогічно перетворюємо і інші рядки, тобто, елементами нового k-го рядка будуть числа $\tilde{a}_j^k = a_j^k + \left(-\frac{a_1^k}{a_1^1}\right) \cdot a_j^1$. Отже, перший стовпчик матриці набуде наступного вигляду $\begin{pmatrix} a_1^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Якщо при цьому якийсь рядок (або стовпчик) став нульовим, викреслюємо його.
2. Другий крок має метою виконати такі перетворення, щоб другий стовпчик набув вигляду $\begin{pmatrix} a_2^1 \\ \tilde{a}_2^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. А, отже, другим рядком запишемо рядок з ненульовим другим елементом $\tilde{a}_2^2 \neq 0$. Елементами третього рядка будуть числа вигляду $\tilde{\tilde{a}}_j^3 = \tilde{a}_j^3 + \left(-\frac{\tilde{a}_2^3}{\tilde{a}_2^2}\right) \cdot \tilde{a}_j^2$. Аналогічно перетворюємо наступні рядки матриці.
3. Таким чином визначиться трапецієподібна матриця **B**. Порядок верхньої трикутної підматриці з ненульовими елементами на діагоналі і визначить ранг початкової матриці.

Розглянемо на прикладі, як звести матрицю **A** до виду матриці **B** і визначити її ранг.

Приклад 9.1. Визначимо ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Помічаємо, що у другому рядку перший елемент $a_{21} = 1$. Переставимо місцями перший і другий рядок і виконаємо елементарні перетворення, щоб звести матрицю до спрощеного вигляду (мета: перший стовпчик звести до вигляду $\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) : $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^{н.}_{р.}=3_{р.}+1_{р.}]{2^{н.}_{р.}=2_{р.}+(-2)\cdot 1_{р.}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тепер за допомогою елементарних перетворень другого і третього рядків отримаємо другий стовпчик вигляду $\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$, де $*$- це деякі числа.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^{н.}_{р.}=2_{р.}/5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^{н.}_{р.}=3_{р.}+3\cdot 2_{р.}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

-- спрощений вигляд матриці A.

Базисним мінором можна вибрати мінор $M_{123}^{123}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-4\neq 0$ -- ненульовий мінор третього порядку, мінора четвертого порядку не існує. Отже $Rg\,\mathrm{A}=3$.

Оскільки ранг дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних стовпчиків (рядків), то задача обчислення рангу та визначення базового мінору матриці еквівалентна пошуку *бази системи векторів* (тобто визначенню підсистеми з максимальної кількості лінійно незалежних векторів).

Приклад 9.2. В залежності від значення параметра λ знайти базу системи векторів $(1,0,-\lambda)^T, (2,-1,0)^T, (-1,\lambda,-1)^T$.

Запишемо вектори, як рядки матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$. Спростимо матрицю А здійснюючи допустимі перетворення з рядками матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^{н.}_{р.}=3_{р.}+1_{р.}]{2^{н.}_{р.}=2_{р.}+(-2)\cdot 1_{р.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & 2\lambda \\ 0 & \lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{3^{н.}_{р.}=3_{р.}+\lambda\cdot 2_{р.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2-1-\lambda \end{pmatrix}$$

Розглянемо мінор третього порядку

$$M_{123}^{123}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2-1-\lambda \end{pmatrix}=-(2\lambda^2-\lambda-1).$$ Якщо $2\lambda^2-\lambda-1\neq 0$, тобто, якщо $\lambda\neq 1$ і $\lambda\neq -\dfrac{1}{2}$, то мінор ненульовий (мінора четвертого порядку не

існує), і отже, $Rg\,A=3$. Базою системи векторів в цьому випадку є всі три вектора. Якщо $2\lambda^2-\lambda-1=0$, тобто, якщо $\lambda=1$ або $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, то мінор третього порядку нульовий. Розглянемо тоді мінор другого порядку, наприклад, $M_{12}^{12}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$. Отже, $Rg\mathbf{A}=2$ і базою системи є будь-які два неколінеарні вектори системи, наприклад, перший і другий вектори.

9.2. Однорідна система лінійних рівнянь.

Система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\mathbf{A}\cdot|\mathbf{x}\rangle=|\mathbf{0}\rangle \tag{9.1}$$

називається *однорідною системою лінійних рівнянь*, де A – матриця розмірностей $m\times n$, а $|\mathbf{x}\rangle$ – вектор розмірності n.

Система (9.1) завжди має розв'язком вектор $|x\rangle=0$(тривіальний розв'язок). Отже, вона сумісна (має принаймі один розв'язок). Якщо визначник матриці $|\mathrm{A}|\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який є тривіальним.

Довільний базис простору розв'язків однорідної системи називається *фундаментальною системою розв'язків (ФСР).*

Якщо ранг матриці A системи (9.1) дорівнює r, а кількість змінних n і $r<n$, то кількість векторів в ФСР дорівнює $n-r$.

Загальним розв'язком системи (9.1) називається множина всіх розв'язків системи.

Теорема 9.2. Загальний розв'язок системи (9.1) має вигляд

$$|\mathbf{X}\rangle_{заг.}=\sum_{i=1}^{n-r}c_i|\mathbf{X}\rangle_{i.}, \tag{9.2}$$

де $|\mathbf{X}\rangle_{1.},|\mathbf{X}\rangle_{2},\ldots,|\mathbf{X}\rangle_{n-r.}$ – вектори ФСР системи, а $c_1,\ldots,c_{n-r}$ -- довільні сталі.

Алгоритм пошуку загального розв'язку однорідної системи (9.1).

1. Знаходимо ранг r і базисний мінор $\mathbf{M}$ матриці $\mathbf{A}$, зводячи матрицю $\mathbf{A}$ до спрощеного вигляду за допомогою допустимих перетворень рядків (див. алгоритм обчислення рангу).

2. r змінних, які входять в базисний мінор, вважаємо базисними, нехай це $x_1,\ldots,x_r$, тоді змінні $x_{r+1},\ldots,x_n$ є незалежними (вільними) змінними. Матрицю $\mathbf{A}$ змінюємо і далі за допомогою допустимих перетворень рядків так, щоб стовпчики, які утворюють базисний мінор, стали стовпчиками одиничної матриці..

3. В результаті базисні змінні легко виразяться через незалежні: $\begin{cases} x_1 = -\sum\limits_{i=r+1}^{n} \tilde{a}_{1i} x_i \\ \cdots \\ x_r = -\sum\limits_{i=r+1}^{n} \tilde{a}_{ri} x_i \end{cases}$. Додамо ще незалежні змінні: $\begin{cases} x_{r+1} = x_{r+1} \\ \cdots \\ x_n = x_n \end{cases}$ Тоді вектор-стовпчик $|\mathbf{X}\rangle = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ розв'язку системи можна виразити в матричному вигляді: наступним чином:

$$|\mathbf{X}\rangle = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1\,r+1} & -\tilde{a}_{1\,r+2} & \cdots & -\tilde{a}_{1\,n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\tilde{a}_{r\,r+1} & -\tilde{a}_{r\,r+2} & \cdots & -\tilde{a}_{r\,n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вектор-стовпчики цієї матриці – вектори $|\mathbf{X}\rangle_1, |\mathbf{X}\rangle_2, \ldots, |\mathbf{X}\rangle_{n-r}$ ФСР однорідної системи.

Іншими словами, щоб побудувати ФСР однорідної системи, треба давати вільним змінним значення стовпчиків одиничної матриці відповідного розміру.

4. Виписуємо загальний розв'язок (9.2).

Приклад 9.3. Знайти загальний розв'язок однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо ранг та базисний мінор матриці системи:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3_{p.}^{н.}=3_{p.}+1_{p.}]{2_{p.}^{н.}=2_{p.}+(-1)\cdot 1_{p.}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3_{p.}^{н.}=3_{p.}+2\cdot 2_{p.}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

За базисний вибираємо мінор $M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Ранг матриці дорівнює $r = 3$, отже, маємо 3 базисні змінні: x_1, x_2, x_3 (ми вибрали базисний мінор у першому, другому та третьому стовпчиках матриці), а незалежною буде $n - r = 4 - 3 = 1$ змінна, тобто, x_4. Виконаємо допустимі перетворення зі спрощеною матрицею так, щоб у базисному мінорі утворились стовпчики одиничної матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^{н}_{р.}=2_{р.}+(-1)3_{р.}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^{н}_{р.}=-1\cdot 3_{р.}]{1^{н}_{р.}=2_{р.}+1_{р.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отримали $\mathbf{M}_{123}^{123} = |\mathbf{E}| = 1$.

Тепер легко можна записати спрощену систему $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = 2x_4, \\ x_3 = 2x_4, \\ x_4 = x_4 \end{cases}$. В останній системі ми виразили всі змінні через незалежну змінну.

У матричному вигляді отримаємо $|X\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (x_4)$. Отже, вектором ФСР (фундаментальної системи розв'язків) буде вектор $|X\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Загальний розв'язок системи матиме вигляд $|X_{заг.}\rangle = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, де $c_1 \in \mathbf{R}$.

Приклад 9.4. Знайти загальний розв'язок системи $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$.

Систему можна записати у матричному вигляді: $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = |0\rangle$.

Знайдемо ранг і базисний мінор матриці $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$. Зауважимо, що перші елементи другого і третього рядка відрізняються на одиницю, тому для спрощення подальших обчислень перепишемо третій рядок, як різницю третього і другого рядків і запишемо його першим рядком.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 13 & 9\\ 3 & -6 & 4 & 2\\ 2 & -4 & 5 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[3^{н.}_{р.}=3_{р.}+(-2)\cdot 1_{р.}]{2^{н.}_{р.}=2_{р.}+(-3)\cdot 1_{р.}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 13 & 9\\ 0 & 0 & -35 & -25\\ 0 & 0 & -21 & -15\end{pmatrix}\to$$

$\xrightarrow[3^{н.}_{р.}=-\frac{1}{3}2_{р.}]{2^{н.}_{р.}=-\frac{1}{5}2_{р.}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 13 & 9\\ 0 & 0 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 7 & 5\end{pmatrix}$. Від третього рядка віднімемо перетворений другий і отримаємо нульовий рядок, який викреслимо (якщо рядки пропорційні, то один з рядків можна викреслити відразу). Таким чином, отримаємо спрощений вигляд матриці $\mathbf{A}\to\begin{pmatrix}\boxed{1} & -2 & \boxed{13} & 9\\ \boxed{0} & 0 & \boxed{7} & 5\end{pmatrix}$. Мінор $M^{12}_{12}=0$, а мінор $M^{12}_{13}\neq 0$, тому базисним мінором можемо вибрати мінор другого порядку M^{12}_{13}. Отже, $Rg\mathrm{A}=2$. Базисні змінні таким чином, це x_1 і x_3, відповідно до номерів стовпчиків базисного мінору, незалежними змінними будуть x_2, x_4. Перетворимо спрощену матрицю так, щоб у базисному мінорі утворились стовпчики одиничної матриці: поділимо другий рядок на 7, а перший рядок перепишемо як суму першого і другого помноженого на -13, отримаємо $\tilde{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}\boxed{1} & -2 & \boxed{13} & 9\\ \boxed{0} & 0 & \boxed{7} & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[1^{н.}_{р.}=1_{р.}+(-1)\cdot 2^{н.}_{р.}]{2^{н.}_{р.}=\frac{1}{7}2_{р.}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7}\end{pmatrix}$. Система, що відповідає останній матриці $\tilde{\mathrm{A}}$, буде наступною $\begin{cases}x_1-2x_2-\frac{2}{7}x_4=0,\\ x_3+\frac{5}{7}x_4=0.\end{cases}$.

Тепер легко виразимо базисні змінні через незалежні $\begin{cases}x_1=2x_2+\frac{2}{7}x_4,\\ x_3=-\frac{5}{7}x_4,\\ x_2=x_2,\\ x_4=x_4\end{cases}$. Цій системі відповідає наступне матричне рівняння $\left|X\right\rangle=\begin{pmatrix}2 & \frac{2}{7}\\ 0 & -\frac{5}{7}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ x_4\end{pmatrix}$.

Стовпчики матриці визначають вектори ФСР, тобто, $\left|X_1\right\rangle=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ та

$\left|X_2\right\rangle=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\-\frac{5}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$ – два вектори ФСР. Загальний розв'язок матиме вигляд

$\left|X_{заг.}\right\rangle=c_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\-\frac{5}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$, де c_1, c_2 - довільні сталі.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1. Виписати будь-який мінор, який може бути базисним мінором і порахувати ранг наступних матриць:

а) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\1&0&-2&3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\4&0&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}-2&1&-3\\3&-1&2\\5&-2&5\end{pmatrix}$.

2. Чи є система векторів $a_1=(5,4,3)$, $a_2=(3,3,2)$, $a_3=(8,1,3)$ лінійно незалежною?

3. Знайти загальний розв'язок наступних систем:

а) $\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_2-x_3=0\\x_1-x_3=0\end{cases}$; б) $x_1-x_2+x_4=0$.

II.

1. Визначити ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$ для різних значень параметра λ.

2. Визначити всі бази системи векторів: $\vec{a}_1=(1,2,3,4)$, $\vec{a}_2=(2,3,4,5)$, $\vec{a}_3=(3,4,5,6)$, $\vec{a}_4=(4,5,6,7)$.

3. Знайти загальний розв'язок систем

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 - x_1 - x_5 = 0, \\ x_4 - x_2 - x_6 = 0; \\ x_5 - x_3 = 0, \\ x_6 - x_4 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

III.

1. Виписати умови на параметри a,b,c,d,e, при яких незалежними змінними в системі $\begin{cases} y + az + bt = 0, \\ -x + cz + dt = 0, \\ ax + cy - et = 0, \\ bx + dy + ez = 0. \end{cases}$ можна вибрати змінні z і t.

2. Написати рівняння кривої другого порядку, яка проходить через точки (0, 1), $(\pm 2, 0)$, $(\pm 1, -1)$.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1. Знайти ранг наступних матриць і виписати будь-який базисний мінор:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 5 & 2 & -8 \\ 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Виписати загальний розв’язок системи:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ б) $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 - x_4 + 0 \cdot x_5 = 0.$

3. Перевірити на лінійну незалежність вектори: $\vec{a}_1 = (7,-4,9,2,2)$, $\vec{a}_2 = (5,8,7,-4,2)$, $\vec{a}_3 = (3,-8,5,4,2)$, $\vec{a}_4 = (7,-2,2,1,-5)$.

II

1. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$ для різних значень параметра λ.

2. Обчислити ранг матриці $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

3. Знайти загальний розв'язок систем:

а) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

III.

1. Записати загальний розв'язок системи $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \ldots \\ x_{n-1} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$

2. Знайти значення параметра λ при якому матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ має найменший ранг. Виписати значення рангу при різних значеннях параметра.

3. Написати необхідну і достатню умови для того, щоб n прямих перетинались в одній точці $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_n = 0 \end{cases}$.

Відповіді.

Ауд. I. 1) а) $RgA = 2, M_{12}^{12}$. б) $RgA = 3, M_{123}^{123}$. в) $RgA = 2, M_{12}^{12}$.

2) Ні. 3) а) $\vec{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. б) $\vec{x} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II. 1) $\lambda=3$ $\quad RgA=2;$ $\lambda\neq 3$ $RgA=3$. 2) база – будь-яка пара векторів. 3) а) $\vec{x}=c\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$; б) $\vec{x}=\vec{0}$; в) $\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\-2\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\11\\0\\3\\1\end{pmatrix}$.

III. 1) При умові $ad-e-bc=0$. 2) Таких кривих безліч, наприклад, $2x^2+7y^2+y-8=0$.

Дом. I. 1) а) $RgA=2, M_{12}^{12}$. б) $RgA=3, M_{123}^{123}$. 2) а) $\vec{x}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

б) $\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. 3) лін. зал.

II. 1) $\lambda=1$ $\quad RgA=1;$ $\lambda=-1,$ $RgA=2$. 2) $RgA=2$. 3) а) $\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$; б) $\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}-3\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$; в) $\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-4\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}10\\0\\0\\-12\\5\end{pmatrix}$. **III.** 1) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix}$. 2) $\lambda=3,$ $\quad RgA=2$; $\lambda\neq 3,$ $RgA=3$.

3) $Rg\left(\{a_i\ \ b_i\}_{i=1}^{n}\right)=Rg\left(\{a_i\ \ b_i\ |c_i\}_{i=1}^{n}\right)=2$.

Розділ 10. Системи неоднорідних лінійних рівнянь.

Система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$A|x\rangle = |b\rangle \qquad (10.1),$$

де $|b\rangle$ -- ненульовий вектор-стовпчик, називається ***неоднорідною системою лінійних рівнянь***. Матриця коефіцієнтів A, розмірами $m\times n$, називається ***матрицею системи***, а матриця $A|b$ розмірами $(m+1)\times n$ ***розширеною матрицею системи***.

Нагадаємо, що система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Сформулюємо критерій сумісності неоднорідної системи.

Теорема Кронекера-Капеллі. Система (10.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу матриці системи, тобто, $Rg(A|b) = Rg(A)$.

Надалі, нехай система сумісна і $Rg(A|b) = Rg(A) = r$.

Як і для однорідної системи вводиться поняття загального розв'язку системи.

Загальним розв'язком системи називається множина розв'язків цієї системи.

Теорема 10.1. Загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь (10.1) має вигляд

$$|\mathbf{X}\rangle_{заг.} = |\mathbf{X}\rangle_{0.} + \sum_{i=1}^{n-r} c_i |\mathbf{X}\rangle_{i.} \qquad (10.2)$$

де $|\mathbf{X}\rangle_{0.}$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи рівнянь, $|\mathbf{X}\rangle_{1.}, |\mathbf{X}\rangle_{2}, \dots, |\mathbf{X}\rangle_{n-r.}$ – вектори фундаментальної системи розв'язків (ФСР) відповідної однорідної системи рівнянь, $c_1, \dots, c_{n-r}$ – довільні числа.

Алгоритм пошуку загального розв'язку.

1. Визначаємо ранг розширеної матриці $Rg(A|b)$, (див. алгоритм пошуку рангу матриці з розділу 9, виконуючи допустимі перетворення з рядками розширеної матриці).
2. Одночасно буде визначений ранг $Rg(A)$ матриці зведеної однорідної системи. Якщо $Rg(A|b) \neq Rg(A)$, то система несумісна і розв'язків немає. Якщо ж $Rg(A|b) = Rg(A) = r$, то робимо наступні кроки.
3. В матриці A вибираємо базисний мінор. Матрицю $A|b$ спрощуємо за допомогою допустимих перетворень рядків так, щоб стовпчики, які утворюють цей базисний мінор, стали стовпчиками одиничної матриці. Для зміненої таким чином матриці $A|b$ записуємо спрощену неоднорідну систему, з якої легко виражаються базисні змінні через незалежні змінні. Вважаючи, що за базисні змінні вибрані $x_1, x_2, \dots, x_r$, система набуде вигляду $\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 - (\tilde{a}_{1\,r+1}x_{r+1} + \cdots + \tilde{a}_{1\,n}x_n) \\ \cdots \\ x_r = \tilde{b}_r - (\tilde{a}_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots + \tilde{a}_{r\,n}x_n) \end{cases}$, (тут і надалі

$\widetilde{b}_i, \widetilde{a}_{i\,j}$ це елементи спрощеної описаним вище способом матриці $A|b$.

4. Задавши довільні значення незалежним змінним (наприклад, $x_{r+1}=0, x_{r+2}=0,\ldots,x_n=0$) визначимо частинний розв'язок – одержимо деякий вектор $|\mathbf{X}\rangle_0=(\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2,\ldots,\widetilde{b}_r,0,\ldots0)^T$.

Далі розглядаємо зведену однорідну систему, тобто ЛОС з тою самою матрицею $\mathbf{A}$. Знаходимо її ФСР $|\mathbf{X}\rangle_{1.},|\mathbf{X}\rangle_2,\ldots,|\mathbf{X}\rangle_{n-r.}$ (як це було описано в розділі 9) та записуємо загальний розв'язок за формулою (10.2)

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 10.1. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4, \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2. \end{cases}$$

а) Шукаємо ранг розширеної матриці системи. Матриця системи має вигляд $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, а розширена матриця -- $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 & |10 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & |4 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & |2 \end{pmatrix}$.

Отже, переставимо місцями перший і третій рядок для спрощення обчислень (стовпчики краще не чіпати, оскільки вони відповідають за змінні, а рядки - за рівняння системи).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \end{array}\right) \underset{3_p^н=3_p+(-5)\cdot1_p}{\overset{2_p^н=2_p+(-2)\cdot1_p}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & -12 & -15 & -3 & 0 \\ 0 & -32 & -40 & -8 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\underset{3_p^н=3_p+\left(-\frac{8}{3}\right)\cdot2_p}{\overset{2_p^н=\left(-\frac{1}{3}\right)2_p}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Останній рядок з нулів викреслюємо. Отже, розширена матриця спростилась до вигляду $A|b=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 & |2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & |0 \end{pmatrix}$, а матриця $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. За базисний мінор для обох матриць можемо вибрати, наприклад, $M_{14}^{12}=1$ (для спрощення подальших обчислень вибрали саме перший і четвертий стовпчик, оскільки по діагоналі мінора тоді будуть одиниці).

2. Порівнюємо ранги: $Rg(A|b)=Rg(A)=2$. Отже, за теоремою Кронекера-Капеллі система є сумісною.

3. З вигляду базисного мінора M_{14}^{12} за базисні змінні маємо x_1, x_4 (відповідно до номерів стовпчиків базисного мінора), незалежними змінними будуть x_2, x_3. Проведемо надалі ще декілька допустимих перетворень, для того, щоб у стовпчиках базисного мінору були стовпчики одиничної матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 & |2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & |0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^{н}_{р.}:=1_{р.}+(-4)\cdot 2_{р.}} \begin{pmatrix} 1 & -9 & -11 & 0 & |2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & |0 \end{pmatrix} = A|b.$$

Отже, спрощена неоднорідна система набуде вигляду $\begin{cases} x_1 - 9x_2 - 11x_3 = 2, \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Легко виразимо з неї базисні змінні через незалежні

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 9x_2 + 11x_3, \\ x_4 = -4x_2 - 5x_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 9x_2 + 11x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = -4x_2 - 5x_3 \end{cases}$$

4. Надамо незалежним змінним x_1, x_2 відповідно значення $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, маємо систему $\begin{cases} x_1 = 2 + 9c_1 + 11c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = c_2, \\ x_4 = -4c_1 - 5c_2 \end{cases}$. Цій системі відповідає наступне матричне рівняння $\left| X \right\rangle = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Відмітимо, що вектор $\left| X_{ч.} \right\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ є частинним розв'язком неоднорідної системи рівнянь (незалежним змінним надамо нульові значення: $x_2 = 0, x_3 = 0$, тоді базисні змінні будуть $x_1 = 2, x_4 = 0$). Стовпчики ж останньої матриці і будуть векторами ФСР однорідної системи рівнянь $\left| X_1 \right\rangle = (9,1,0,-4)^T$, $\left| X_2 \right\rangle = (11,0,1,-5)^T$.

Отже, загальний розв'язок неоднорідної системи запишеться $X_{заг.} = (2,0,0,0)^T + c_1(9,1,0,-4)^T + c_2(11,0,1,-5)^T$.

Зауваження. Вектори ФСР (фундаментальної системи рівнянь) можна було б знайти іншим способом, після того як знайшли базисний мінор з одиницями на діагоналі, записали однорідну систему зі спрощеною матрицею $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 9 & 4\\ 0 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, а саме, $\begin{cases}x_1+7x_2+9x_3+4x_4=0,\\ 4x_2+5x_3+x_4=0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x_1=-7x_2-9x_3-4(-4x_2-5x_3),\\ x_4=-4x_2-5x_3.\end{cases}$ Ми повинні отримати $n-r=2$ вектори ФСР. Надаючи незалежним змінним числові значення (вони не можуть бути одночасно нульовими) отримуємо відповідно два незалежних вектори, наприклад покладемо $x_2=1$, а $x_3=0$, і навпаки. Записуємо координати векторів у таблицю

x_1	x_2	x_3	x_4
9	1	0	–4
11	0	1	–5

. Отримані вектори і є векторами ФСР.

Приклад 10.2 Дослідити систему на сумісність і знайти загальний розвязок системи при різних значеннях параметрів, які входять до системи

$$\begin{cases}-5x_1+3x_2-8x_3=4,\\ 3x_1-x_2+6x_3=b,\\ ax_1+3x_2+2x_3=2.\end{cases}$$

Знайдемо ранг розширеної матриці системи $A|b=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -8 & |4\\ 3 & -1 & 6 & |b\\ a & 3 & 2 & |2\end{pmatrix}\to$

$$\xrightarrow{1''_з=1_p+2\cdot 2_p}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 4 & 2b+4\\ 3 & -1 & 6 & b\\ a & 3 & 2 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[3''_p=3_p+(-a)\cdot 1_p]{2''_p=2_p+(-3)\cdot 1_p}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 4 & 2b+4\\ 0 & -4 & -6 & -5b-12\\ 0 & 3-a & 2-4a & 2-2ba-4a\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[3''_p=3_p+(a-3)\cdot 2_p]{2''_p=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 2_p}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 4 & 2b+4\\ 0 & 1 & 3/2 & 5b/4+3\\ 0 & 0 & -5/2\,(a+1) & -3/4\,ba-15/4\,b-a-7\end{array}\right).$$

Тепер розглянемо різні випадки.

1. Нехай $a=-1$, то $Rg(A)=2$, при цьому, якщо $b=-2$ $Rg(A|b)=2=Rg(A)$ (система сумісна). Якщо ж $b\neq -2$, тоді $Rg(A|b)=3\neq Rg(A)$(система несумісна),

1.1. Запишемо загальний розв’язок, якщо $a=-1, b=-2$. Спрощена розширена матриця матиме вигляд $A|b=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & |0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & |\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to$

$$\xrightarrow{1''_{p.}=1_{p.}+(-1)\cdot 2_{p.}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & |-\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & |\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$ M_{12}^{12} - базисний мінор матриці.

Відповідно, x_1, x_2 – базисні змінні, а x_3 буде незалежною змінною. З вигляду спрощеної розширеної матриці, ми можемо одразу виразити базисні змінні, через незалежну $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}x_3, \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3. \end{cases}$ Перепишемо дану систему наступним чином $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}c, \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}c, \\ x_3 = c \end{cases}$ і запишемо її у матричному вигляді $\left|X\right\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} c.$ Одразу отримали вигляд загального розвязку, як суми частинного розвязку неоднорідної системи $\left|X_{ч.}\right\rangle = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T$ та загального розвязку однорідної системи рівнянь, ФСР якої складається з одного вектора $\left|X_1\right\rangle = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)^T$

1.2. У випадку, коли $a = -1, b \neq -2$ система несумісна, розв’язків немає.

2. Нехай $a \neq -1$,тоді $Rg(A|b) = Rg(A) = 3$. Тоді система має єдиний розв’язок. Знайдемо в цьому випадку загальний розв’язок. Спочатку спростимо розширену матрицю до одиничної .

$$A|b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & |\,2b+4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & |\,\frac{5b}{4}+3 \\ 0 & 0 & 1 & |\,\frac{28+4a+15b+3ba}{10(1+a)} \end{pmatrix} \xrightarrow[1^{н.}_{р.}=1_{р.}-2^{н.}_{р.}-4\cdot 3_{р.}]{2^{н.}_{р.}=2_{р.}+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 3_{р.}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & |\,\frac{-3(b+2)}{1+a} \\ 0 & 1 & 0 & |\,\frac{12a-5b+4ba-6}{5(1+a)} \\ 0 & 0 & 1 & |\,\frac{28+4a+15b+3ba}{10(1+a)} \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком системи буде вектор $\left|X_{заг.}\right\rangle=\left(\frac{-3(b+2)}{1+a},\frac{12a-5b+4ba-6}{5(1+a)},\frac{28+4a+15b+3ba}{10(1+a)}\right)^T$.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1.Знайти загальний розв'язок наступних систем:

а) $\begin{cases} 9x_1+21x_2-15x_3+5x_4=10, \\ 12x_1+28x_2-20x_3+7x_4=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8, \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7, \\ x_1+8x_2-7x_3=12. \end{cases}$

2. В залежності від параметрів дослідити систему на сумісність і виписати її загальний розв'язок $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a, \\ x_1+x_2-x_3=b. \end{cases}$

II.

1.Знайти загальний розв'язок наступних систем:

а) $\begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=8, \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5, \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1. \end{cases}$

2. Дослідити систему на сумісність і виписати її загальний розв'язок в

залежності від значень параметру λ $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$

3. Дослідити систему на сумісність і виписати її загальний розв'язок в залежності від значень параметрів $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + cx_3 = 1. \end{cases}$

III.

1.В яких випадках розв'язок системи єдиний $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = b, \\ x_1 + x_2 + cx_3 = c \end{cases}$ виписати цей розвязок?

2.Знайти всі значення параметра λ, при якому вектор $\vec{b} = (5,2,\lambda)$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1 = (3,2,6), \vec{a}_2 = (7,3,1), \vec{a}_3 = (5,1,3)$.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1. Знайти загальний розв'язок систем:

а) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \left(\sqrt{2}+1\right)x + \left(\sqrt{2}-1\right)y - \sqrt{2}z = 1 + \sqrt{2}, \\ x + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)y + \left(\sqrt{2}-2\right)z = 1. \end{cases}$

II.

1. Знайти загальний розв'язок системи $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

2. Дослідити систему на сумісність і виписати її загальний розв'язок в залежності від значень параметра $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$

III.

1.Дослідити систему на сумісність і виписати її загальний розв'язок в залежності від значень параметрів $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \\ a^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 = d^2. \end{cases}$

2.Дослідити систему на сумісність і виписати її загальний розв'язок в залежності від значень параметра $\begin{cases}(\lambda+1)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+3\lambda,\\ x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda^3+3\lambda^2,\\ x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^4+3\lambda^3.\end{cases}$

Відповіді.

Ауд. І. 1) а) $\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-7\\3\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5\\0\\3\\0\end{pmatrix}$. б) $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. 2) $a=b$ система несумісна, $a\neq b$ $\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{a+b}{2}\\0\\\frac{a-b}{2}\end{pmatrix}$.

ІІ. 1) а)несумісна. б) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix}+\ +c_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-8\\0\\2\end{pmatrix}$. 2) якщо, то $\lambda=3$ система несумісна; якщо $\lambda=1$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\ c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$; якщо $\lambda\neq 3$ і $\lambda\neq 1$, то розвязок єдиний $\vec{x}=\frac{1}{\lambda-3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. 3) При умові $2-b-c-a+abc=0$ система несумісна; якщо $a=b=c=1$ $x_1=1-x_2-x_3$; якщо $a=b=1$, то $x_1=1-x_2$, $x_3=0$; якщо $a=c=1$, то $x_1=1-x_3$, $x_2=0$; якщо $b=c=1$, то $x_3=1-x_2$,

$x_1 = 0$; в інших випадках $\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{(1-b)(1-c)}{2-a-b-c+abc} \\ \dfrac{(1-a)(1-c)}{2-a-b-c+abc} \\ \dfrac{(1-a)(1-b)}{2-a-b-c+abc} \end{pmatrix}$.

III. 1). При виконанні одночасно однієї з умов $abc+c+b-a-2bc=0$, $abc+a+c-b-2ac=0$ або $abc+a+b-c-2ab=0$ і умови $2+abc-a-b-c \neq 0$. 2) $\lambda \neq 6$.

Дом. **I.** 1) а) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

б) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2}-3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

II. 1) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{19}{3} \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ -34 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Якщо $\lambda = 1$, то система несумісна; $\lambda \neq 1$, то $\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{11-\lambda}{1-\lambda} \\ 0 \\ -\dfrac{5}{1-\lambda} \\ -\dfrac{5}{1-\lambda} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

III. 1) Якщо a, b, c -- попарно різні, то єдиний розв'язок $\vec{x} = \left(\dfrac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, \dfrac{(a-d)(c-d)}{(b-a)(b-c)}, \dfrac{(b-d)(a-d)}{(c-b)(c-a)} \right)$.

$$2)\,\lambda = 3, \quad \vec{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \ \lambda \neq 3, \ \vec{x} = \begin{pmatrix}2-\lambda^2\\2\lambda-1\\\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1\end{pmatrix}.$$

Розділ 11. Лінійні простори. Базиси.

Множина L називається ***лінійним (або векторним) простором над полем дійсних чисел*** $\mathbf{R}$, а її елементи називаються ***векторами***, якщо виконується три умови:

1. На множині L визначена дія додавання: ***сума*** елементів з L є елементом цієї множини.

2. На множині L визначена дія множення на дійсне число: ***добуток елемента з*** L ***на дійсне число*** є елементом з L.

3. Вказані дії задовольняють аксіомам простору:

1) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in L: \ \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$;

2) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in L: \ (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$;

3) $\forall \mathbf{x} \in L \ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}: \ (\alpha\cdot\beta)\cdot\mathbf{x} = \alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{x})$;

4) $\forall \mathbf{x} \in L \ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}: \ (\alpha+\beta)\cdot\mathbf{x} = \alpha\cdot\mathbf{x}+\beta\cdot\mathbf{x}$;

5) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in L \ \ \forall \alpha \in \mathbf{R}: \ \alpha\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\cdot\mathbf{x}+\alpha\cdot\mathbf{y}$;

6) $\exists\, \mathbf{0} \in L \ \ \forall \mathbf{x} \in L: \ \mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{x}$ ($\mathbf{0}$ називають *нейтральним елементом, або нульовим вектором*);

7) $\forall \mathbf{x} \in L \quad \exists(-\mathbf{x}) \in L: \ \mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ($-\mathbf{x}$ називають *протилежним елементом* до елемента $\mathbf{x}$);

8) $\forall \mathbf{x} \in L: \ 1\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Елементи $x_1,\ldots,x_n \in L$ називаються ***лінійно незалежними***, якщо рівність $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \theta$ має місце тільки тоді, коли $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Сума $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ називається ***лінійною комбінацією*** векторів $x_1,\ldots,x_n$.

Лінійною оболонкою елементів $x_1,\ldots,x_n$ називається множина всіх можливих лінійних комбінацій векторів $x_1,\ldots,x_n$. Позначається $L(x_1,\ldots,x_n)$,

Система елементів $e_1,\ldots,e_n \in L$ називається ***базисом лінійного простору*** L, якщо:

1) елементи $e_1,\ldots,e_n$ лінійно незалежні;
2) кожний елемент простору L можна подати у вигляді лінійної комбінації елементів $e_1,\ldots,e_n$, тобто $\forall x \in L$ існують числа $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, такі що має місце рівність $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Остання рівність називається *розкладом вектора* $|x\rangle$ *за базисом* $e_1,\ldots,e_n$, числа $x_1,\ldots,x_n$ називаються *координатами вектора* $|x\rangle$ *в базисі* $e_1,\ldots,e_n$. Зауважимо, що розклад вектора $|x\rangle$ за даним базисом єдиний.

Приклад 11.1. Показати, що вектори $e_1=(1,-1,0)^T, e_2=(-2,0,1)^T, e_3=(-1,1,1)^T$ є базисом і виписати координати вектора $|x\rangle=(1,2,3)^T$ у цьому базисі .

I) Покажемо, що вектори $e_1=(1,-1,0)^T, e_2=(-2,0,1)^T, e_3=(-1,1,1)^T$ є базисом.

Лінійну незалежність векторів можемо перевірити а) обчисливши рангу системи векторів (цей метод кращий, коли додатково потрібно знати скільки векторів є незалежними); б) за допомогою визначника – лише у випадку, коли кількість векторів збігається з розмірністю простору.

а) Обчислимо ранг матриці, утвореної векторами (вектори тут запишемо у вигляді стовпчиків матриці):

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{2''_{р.}=2_{р.}+1_{р.}}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&-2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[3''_{р.}=3_{р.}+(-1)\cdot 2_{р.}]{2''_{р.}=-\frac{1}{2}\cdot 2_{р.}}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Оскільки визначник матриці $det\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=1$, то це і є базисний мінор.

Отже, $Rg\,A=3$, всі 3 вектори лінійно незалежні. Оскільки розмірність простору рівна 3, задані вектори утворюють базис.

б) Порахуємо одразу детермінант матриці. Якщо він ненульовий, то вектори лінійно незалежні і утворюють базис.

$\begin{vmatrix}1&-2&-1\\-1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$, отже вектори лінійно незалежні.

II) Потрібно знайти розклад по базису e_1,e_2,e_3 вектора $|x\rangle=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3=(\alpha,\beta,\gamma)$.

Для цього можна а) розв’язати систему рівнянь $\begin{cases}\alpha-2\beta-\gamma=1,\\-\alpha+\gamma=2,\\\beta+\gamma=3\end{cases}$, або

б) розв’язати матричне рівняння $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

а) Розв’яжемо систему методом Гауса. Випишемо розширену матрицю системи і перетворимо її.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{2^{н.}_{р.}=2_{р.}+1_{р.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[2^{н.}_{р.}=-\frac{1}{2}2_{р.}]{1^{н.}_{р.}=1_{р.}-2_{р.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[1^{н.}_{р.}=1_{р.}+3^{н.}_{р.}]{3^{н.}_{р.}=3_{р.}-2_{р.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right).$$ Отже, розв’язком буде вектор $\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)^T$, тобто

$$|x\rangle = \frac{5}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_2 + \frac{9}{2}e_3$$

б) Розв’яжемо матричне рівняння $A|x\rangle = b$. Матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Її визначник $det\,A = -2$, обернена $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Отже, розв’язком матричного рівняння буде вектор $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

Нехай L – векторний простір розмірності n. Розглянемо два довільних базиси цього простору: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ – старий базис та $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ – новий базис. Вектори нового базису виражаються через базисні вектори першого наступним чином: $\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} t^i_j \mathbf{e}_i$, $j = \overline{1,n}$. Якщо записати коефіцієнти розкладу у вигляді матриці $\mathbf{T} = \left(t^i_j\right)$, $i, j = \overline{1,n}$, то очевидно, що її *стовпчики є координатами базисних векторів нового базису* у старому базисі і рівність можна записати таким чином

$$\langle \mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_n| = \langle \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n| \cdot \mathbf{T}.$$

Ця матриця $\mathbf{T}$ називається *матрицею переходу від базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ до базису $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$. Тоді вектор x у старому базисі можна записати як

$$x = Tx',$$

де x' – його координати в новому базисі.

Непорожня підмножина M елементів лінійного простору L називається ***лінійним підпростором простору*** L, якщо виконуються наступні умови:
1) $\forall x,y \in M$ має місце $(x+y) \in M$;
2) $\forall x \in M$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ має місце $(\alpha x) \in M$.

Іноді зручно перевіряти одну умову, що об'єднує обидві умови означення. А саме, $\forall x,y \in M, \forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}$ має місце $\alpha x + \beta y \in M$.

Приклад. 11.2. Довести, що матриці порядку 2 з нульовими елементами по діагоналі утворюють лінійний підпростір простору квадратних матриць порядку 2. Знайти базис і розмірність цього підпростору.

Потрібно довести, що множина матриць виду $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}$ є лінійним підпростором.

Перевіримо наступну умову: $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ має місце $\alpha \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in M$.

Отже, $\alpha \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 & 0 \end{pmatrix} \in M$, оскільки $\alpha a_i + \beta b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2$.

Тобто M є лінійним підпростором простору квадратних матриць порядку 2.

Базисом цього підпростору буде система матриць $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, у чому легко переконатись.

Перевіримо спочатку, що ці елементи лінійно незалежні. Система $c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow c_1, c_2 \equiv 0$. Отже матриці $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – лінійно незалежні. Тепер перевіримо, що кількість цих елементів максимальна. Тобто, що довільний елемент $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M$ є лінійною комбінацією цих матриць:

$$c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 = a, c_2 = b.$$

Отже, розмірність підпростору M дорівнює 2.

Нехай M – підмножина деякого простору. Якщо будь-який вектор $\mathbf{x} \in M$ може бути поданий у вигляді суми $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$, де $\mathbf{x}' \in L'$, $\mathbf{x}'' \in L''$, то M називається **сумою** підпросторів L' та L'': $M = L' \cup L''$.

Нехай M – підмножина деякого простору. Якщо для будь-якого вектору $\mathbf{x} \in M$ виконується $x \in L', x \in L''$, то M називається **перетином** підпросторів L' та L'': $M = L' \cap L''$.

Твердження. Сума та перетин будь-яких лінійних підпросторів є лінійними підпросторами того ж простору, причому

$$dim\left(L' \cup L''\right) = dimL' + dimL'' - dim\left(L' \cap L''\right).$$

Приклад 11.3. Знайти розмірності і базиси суми і перетину лінійних підпросторів $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ та $L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, якщо $a_1 = (2,1,0), a_2 = (1,2,3)$, $a_3 = (-5,-2,1)$ та $b_1 = (1,1,2), b_2 = (-1,3,0), b_3 = (2,0,3)$.

Знайдемо розмірність L_1. Для цього обчислимо ранг матриці з векторів a_1, a_2, a_3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3_{н.}=1_{н.}\cdot(5)+3_{ст.} \\ 2_{н.}=1_{н.}\cdot(-2)+1_{ст.}}]{1_{н.}=2_{ст.}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{2_{н.}=2_{ст.}\div(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $dimL_1 = 2$. Базис L_1 – вектори $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (0,1,2)$.

Знайдемо розмірність L_2. Для цього обчислимо ранг матриці з векторів b_1, b_2, b_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3_{н.}=1_{н.}\cdot(-2)+3_{ст.} \\ 2_{н.}=1_{н.}+2_{ст.}}]{1_{н.}=1_{ст.}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2_{н.}=2_{ст.}\div(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $dimL_2 = 2$. Базис L_2 – вектори $y_1 = (1,1,2)$, $y_2 = (0,2,1)$.

Знайдемо розмірність $L_1 \cup L_2$. Потрібно порахувати ранг матриці утвореної векторами x_1, x_2, y_1, y_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[4_{н}=3_{ст}\cdot(-2)+4_{ст}]{2_{н}=1_{ст}\cdot(-1)+2_{ст}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3_{н}=3_{ст}+2_{ст}]{2_{н}=2_{ст}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином $dim\, L_1 \cup L_2 = 3$. І базис суми підпросторів – це вектори $e_1 = (1,2,3), e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (0,0,1)$. З наведеного вище твердження випливає, що розмірність перетину: $dimL_1 \cap L_2 = 2 + 2 - 3 = 1$. Базисний вектор перетину $L_1 \cap L_2$ e належить і підпростору L_1, тобто $e = \alpha x_1 + \beta x_2$ і підпростору L_2, тобто $e = \gamma y_1 + \delta y_2$. Отже, шукаємо вектор з наступної системи

$$\begin{cases} \alpha = \gamma, \\ 2\alpha + \beta = \gamma + 2\delta, \\ 3\alpha + 2\beta = 2\gamma + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma, \\ \beta = 2\delta - \gamma, \\ 2\beta = \delta - \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma, \\ \beta = -\delta, \\ \gamma = 3\delta. \end{cases}$$

Вектор з перетину підпросторів

матиме вигляд $\delta(3x_1 - x_2) = \delta(3y_1 + y_2) = \delta(3,5,7)$ і базис перетину утворений вектором $e = (3,5,7)$.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1) Довести що вектори $e_1=(1,1,1), e_2=(1,2,1), e_3=(1,2,3)$ утворюють базис і знайти координати вектора $x=(6,9,14)$ в цьому базисі.

2) Чи утворюють лінійний підпростір:

а) Всі вектори $n-$вимірного векторного простору, координати яких є цілими числами.

б) Всі вектори площини, кожен з яких лежить на одній з осей координат 0х або 0у.

в) Всі вектори $n-$вимірного векторного простору, координати яких задовільняють рівнянню $x_1+x_2+...+x_n=0$.

г) Всі вектори $n-$вимірного векторного простору, координати яких з парними номерами рівні нулю.

II.

1) Довести, що кожна з двух систем є базисами і знайти зв'язок одного і того ж вектора в цих двух базисах: $e_1=(3,7,1), e_2=(1,2,1), e_3=(2,3,3)$, $e_1'=(1,1,-6), e_2'=(5,2,1), e_3'=(3,1,4)$.

2) Знайти розмірність і базис лінійного підпростору, натягнутого на систему векторів $a_1=(1,0,0,-1), a_2=(2,1,1,0), a_3=(1,1,1,1), a_4=(1,2,3,4)$, $a_5=(0,1,2,3)$.

III.

1) Довести, що всі симетричні матриці порядку n утворюють векторний підпростір простору квадратних матриць порядку n. Знайти базис та розмірність цього підпростору.

2) Знайти розмірності і базиси суми і перетину лінійних підпросторів $L_1=\langle a_1,a_2\rangle$ та $L_2=\langle b_1,b_2\rangle$, якщо $a_1=(1,2,0,1), a_2=(1,1,1,0)$ та $b_1=(1,0,1,0), b_2=(1,3,0,1)$.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1) Довести що вектори $e_1=(2,1,-3), e_2=(3,2,-5), e_3=(1,-1,1)$ утворюють базис і знайти координати вектора $x=(6,2,-1)$ в цьому базисі.

2) Чи утворюють лінійний підпростір

а) Всі вектори площини з початком, що співпадає з початком координат, а кінці лежать на одній прямій.

б) Всі вектори $n-$вимірного векторного простору, координати яких задовільняють рівнянню $x_1+x_2+...+x_n=1$.

в) Всі вектори $n-$вимірного векторного простору, координати яких з парними індексами рівними між собою.

II.

1)Довести, що кожна з двух систем є базисами, і знайти зв'язок одного і того ж вектора в цих двох базисах: $e_1=(1,1,1,1), e_2=(1,2,1,1), e_3=(1,1,2,1)$, $e_4=(1,3,2,3)$, $e_1'=(1,0,3,3), e_2'=(-2,-3,-5,-4), e_3'=(2,2,5,4)$, $e_4'=(7,14,-1,2)$.

2) Знайти розмірність і базис лінійного підпростору, натягнутого на систему векторів $a_1=(1,1,1,1,0)$, $a_2=(1,1,-1,-1,-1)$, $a_3=(2,2,0,0,-1)$, $a_4=(1,1,5,5,2)$, $a_5=(1,-1,-1,0,0)$.

III.

1) Довести, що всі кососиметричні матриці порядку n утворюють векторний підпростір простору квадратних матриць порядку n. Знайти базис та розмірність цього підпростору.

2) Знайти розмірності і базиси суми і перетину лінійних підпросторів $L_1=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ та $L_2=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$, якщо $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,-1,1,-1)$, $a_3=(1,3,1,3)$ та $b_1=(1,2,0,2)$, $b_2=(1,2,1,2)$, $b_3=(3,1,3,1)$.

Відповіді.

Ауд. I. 1) $(3;-1;4)$; 2) а)ні; б)ні; в)так; г)так;

II. 1) $x=\begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 \\ -41 & -71 & -27 \\ 9 & 20 & 9 \end{pmatrix}x'$; 2) a_1,a_3,a_5;

III. 1) $dim M_n=\dfrac{n^2+n}{2}$; 2) $dim(L_1+L_2)=3$ з базисом a_1,a_2,b_1 та $dim(L_1\cap L_2)=1$ з базисом $(2;3;1;1)$.

Дом. I. 1) $(-29;19;7)$; 2) а)ні; б)ні; в)так.

II. 1) $x=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 12 \\ 1 & -2 & 2 & -5{,}5 \\ 1 & -1 & 1 & -2{,}5 \end{pmatrix}x'$; 2) a_1,a_2,a_5.

III. 1) $dim M_n=\dfrac{n^2-n}{2}$; 2) $dim(L_1+L_2)=3$ з базисом a_1,a_2,b_2 та $dim(L_1\cap L_2)=2$ з базисом $e_1=(1;0;1;0)$, $e_2=(0;1;0;1)$.

Розділ 12. Евклідів простір. Ортогональні базиси. Ортогональне доповнення підпростору.

Векторний дійсний простір E_n називається **евклідовим**, якщо в ньому задана задана операція ***скалярного добутку*** векторів, тобто операція, яка будь-якій парі векторів $\mathbf{x},\mathbf{y}\in E_n$ цього простору ставить у відповідність дійсне число $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ таким чином, що виконуються наступні аксіоми:

1. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}\quad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in E_n$ (комутативність скалярного добутку);

2. $(\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\quad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in E_n\ \forall\lambda\in\mathbf{R}$;

3. $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{y}\quad\forall\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}\in E_n$ (дистрибутивність скалярного добутку);

4. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\ge 0\quad \forall\mathbf{x}\in E_n$, причому $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0\quad \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Довжиною вектора називається величина $|x|=\sqrt{x\cdot x}$.

Система векторів $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_m\in E_n$ називається ***ортогональною***, якщо $\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j=0$ при $i\ne j\ i,j=\overline{1,m}$ (попарні скалярні добутки рівні нулю) та ***ортонормованою***, якщо $\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j=\delta_{ij}=\begin{bmatrix}1, i=j\\ 0, i\ne j\end{bmatrix}$ при $i,j=\overline{1,m}$.

Метод ортогоналізації Грама-Шмідта:

Нехай задано систему лінійно незалежних векторів $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_m\in E_n$. Вони утворюють базис лінійної оболонки $L(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_m)$ $(m<n)$. Для побудови ортонормованого базису цієї лінійної оболонки використовують наступний алгоритм (він дістав назву процедури ортогоналізації Грама-Шмідта).

- Обираємо першим вектором будь-який вектор системи $\mathbf{a}_1=\mathbf{f}_1$ і нормуємо його: $\mathbf{e}_1=\dfrac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}$.
- Другий вектор будуємо як лінійну комбінацію векторів $\mathbf{f}_1$ та $\mathbf{f}_2$, так, щоб він виявився ортогональним до вже побудованого вектора $\mathbf{a}_1$ (або, що те саме, до $\mathbf{e}_1$): $\mathbf{a}_2=\mathbf{f}_2-\lambda\mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{e}_1=0$. Тоді, очевидно, коефіцієнт $\lambda=\mathbf{f}_2\cdot\mathbf{e}_1$. Нормуємо одержаний другий вектор $\mathbf{e}_2=\dfrac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|}$.
- Третій вектор будуємо аналогічно: обчислюємо коефіцієнти: $\mathbf{f}_3\cdot\mathbf{e}_1$ та $\mathbf{f}_3\cdot\mathbf{e}_2$. Тоді вектор $\mathbf{a}_3=\mathbf{f}_3-(\mathbf{f}_3\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1-(\mathbf{f}_3\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$ буде ортогональним до вже визначених векторів $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ і водночас до $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$. Нормуємо цей вектор $\mathbf{e}_3=\dfrac{\mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}_3|}$.
- Щоб порахувати довільний k-тий вектор використовуємо формулу $\mathbf{a}_k=\mathbf{f}_k-(\mathbf{f}_k\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1-\cdots-(\mathbf{f}_k\cdot\mathbf{e}_{k-1})\mathbf{e}_{k-1}$. І нормуємо $\mathbf{e}_k=\dfrac{\mathbf{a}_k}{|\mathbf{a}_k|}$.
- Таким чином отримуємо одночасно і ортогональну систему векторів $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m$ і ортонормовану систему векторів $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots\mathbf{e}_m$, які утворюють базис лінійної оболонки векторів $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_m\in E_n$.

Приклад 12.1. Побудувати ортогональний базис підпростору L, застосовуючи метод ортогоналізації Грама-Шмідта, якщо підпростір натягнутий на систему векторів $e_1=(2,1,3,1), e_2=(1,2,0,1), e_3=(-1,1,-3,0), e_4=(-1,-2,1,0)$.

Знайдемо базис системи. Для цього обчислимо ранг матриці з цих векторів

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[3_{ст}=3_{н}+1_{ст}]{2_{ст}=2_{н}-2\cdot 1_{ст}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$. Базисом системи є 3 вектори $a_1 = (1,2,0,1)$, $a_2 = (0,-3,3,-1)$, $a_3 = (0,0,1,1)$. Ортогоналізуємо дану систему. $a_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,1)$.

Коефіцієнт $a_1' \cdot a_2 = \frac{-7}{\sqrt{6}}$, вектор $a_2' = (0,-3,3,-1) - \frac{-7}{6}(1,2,0,1) = \frac{1}{6}(7,-4,18,1)$.

Нормуємо другий вектор $|a_2'| = \frac{\sqrt{390}}{6}$, $a_2'' = \frac{1}{\sqrt{390}}(7,-4,18,1)$.

Коефіцієнти $a_3 \cdot a_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $a_3 \cdot a_2'' = \frac{19}{\sqrt{390}}$. Вектор $a_3' = (0,0,1,1) - \frac{1}{6}(1,2,0,1) - \frac{19}{390}(7,-4,18,1) = \frac{1}{390}(-198,-54,48,306)$.

Ортогональний базис підпростору a_1', a_2'', a_3'.

Нехай $e_1,...,e_n$ – довільний базис простору E_n. ***Матриця Грама цього базису*** – це матриця $G = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, елементами якої є числа $g_{ij} = e_i \cdot e_j$, $\forall i,j = 1,...,n$.

Матриця Грама – симетрична матриця, для будь-якого ортонормованого базису матриця Грама одинична.

Твердження 12.1. Для будь-яких векторів $x, y \in E_n$ їх скалярний добуток виражається формулою: $x \cdot y = |x\rangle^T G |y\rangle$.

Приклад 12. 2. Знайти довжину вектора-многочлена $u(x) = 2x - 1$ у просторі многочленів степеню не вищого 2 зі скалярним добутком, визначеним наступним чином: $f \cdot g = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$ (переконайтесь, що так визначена операція справді є скалярним добутком в просторі многочленів степеню не вищого 2!).

Базисом даного простору з очевидних міркувань виберемо функції-многочлени: $x^2, x, 1$. Випишемо матрицю Грама цього базису, обчисливши для базисних функцій скалярні добутки:

$x^2 \cdot x^2 = 1 + 0 + 1 = 2$ $\quad x^2 \cdot x = -1 + 0 + 1 = 0$

$x^2 \cdot 1 = 1 + 0 + 1 = 2$ $\quad x \cdot x = 1 + 0 + 1 = 2$. Отже, матриця Грама вибраного

$x \cdot 1 = -1 + 0 + 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

базису матиме наступний вигляд: $G=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Координати многочленна у базисі $x^2, x, 1$ такі: $u(x)=2x-1=(0,2,-1)$. Таким чином $|u|^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=11.$ Довжина $|u|=\sqrt{11}$.

Ортогональним доповненням підпростору $E_k \subseteq E_n$ називається множина $E_k^{\perp}$ всіх векторів, ортогональних до кожного з векторів E_k: $E_k^{\perp}=\{\, \mathbf{x}: \ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{0} \ \ \forall \mathbf{y}\in E_k \,\}$.

Приклад 12.3. Побудувати ортонормований базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$, якщо підпростір L, заданий системою рівнянь :

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3-9x_4=0 \end{cases}.$$

Знайдемо базис підпростору L. Для цього розв'яжемо відповідну систему лінійних рівнянь – її ФСР і визначить базис підпростору L.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -9 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3_н=3_{ст}-2\cdot 1_{ст}]{2_н=2_{ст}-3\cdot 1_{ст}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -9 \\ 0 & -4 & -4 & 28 \\ 0 & -2 & -2 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[3_н=2_{ст}-2\cdot 3_{ст}]{2_н=3_{ст}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -2 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2_н=2_{ст}-21\cdot 3_{ст}]{\substack{3_н=3_{ст}\div(-14) \\ 1_н=1_{ст}+9\cdot 3_н}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2_н=2_{ст}\div(-2)]{1_н=1_{ст}+2_н} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{cases} x_4=0, \\ x_2+x_3=0 \\ x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0, \\ x_2=c, \\ x_3=-c, \\ x_4=0. \end{cases}$, тобто підпростір L одновимірний, його базис – це вектор $a_1=(0,1,-1,0)$.

Підпростір $L^{\perp}$ утворений векторами, ортогональними до a_1. Отже, лінійна система для координат довільного вектора $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T \in L^{\perp}$ має задовольняти умову $x\cdot a_1=0$, звідки маємо: $x_2-x_3=0$, $x_1\in\mathbf{R}$, $x_2\in\mathbf{R}$.

Розв'яжемо систему $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = -c_2 \\ x_4 = c_3 \end{cases}$. ФСР складається з трьох векторів: $b_1 = (1,0,0,0)$, $b_2 = (0,1,-1,0)$, $b_3 = (0,0,0,1)$. Неважко переконатись, що ці вектори ортогональні. Залишилось лише їх нормувати: $|b_1| = |b_3| = 1$, $|b_2| = \sqrt{2}$. Отже ортонормований базис $L^{\perp}$:

$b_1 = (1,0,0,0)$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$, $b_3 = (0,0,0,1)$.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1) Побудувати ортонормований базис: $a_1 = (2,1,2), a_2 = (1,2,-2)$.

2) Застосовуючи метод ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, натягутого на систему векторів: $a_1 = (1,2,2,-1), a_2 = (1,1,-5,3), a_3 = (3,2,8,-7)$.

3) Знайти довжини сторін і внутрішні кути трикутника, вершини якого задані своїми координатами в деякому ортонормованому базисі простору $\mathbf{R}^5$: $A = (2,4,2,4,2)$, $B = (6,4,4,4,6)$, $C = (5,7,5,7,2)$.

4) Знайти скалярний добуток та довжини векторів $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$, якщо задані їх координати в деякому базисі евклідового простору та матриця Грама цього базису: $|\mathbf{x}\rangle^T = (1,1,1)$, $|\mathbf{y}\rangle^T = (1,3,1)$, $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

II.

1) Знайти ортонормований базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ підпростору L, натягнутого на вектори: $a_1 = (1,0,2,1), a_2 = (2,1,2,3), a_3 = (0,1,-2,1)$.

2) В просторі многочленів степеню не вищого 2 зі стандартним скалярним добутком ($P \cdot Q = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$) знайти матрицю Грама стандартного базису $x^2, x, 1$.

III.

1) Знайти ортогональну проекцію y та ортогональну складову z вектора $x = (4,-1,-3,4)$ на лінійний підпростір L натягнутий на вектори: $a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (1,2,2,-1), a_3 = (1,0,0,3)$.

2)Знайти системи лінійних рівнянь, що задають лінійний підпростір, натягнутий на вектори $a_1 = (1,-1,1,0)$, $a_2 = (1,1,0,1)$, $a_3 = (2,0,1,1)$.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1) Побудувати ортонормований базис: $a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (1,1,-1,-1)$.

2) Застосовуючи метод ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортогональний базис підпростору, натягутого на дану систему векторів: $a_1=(1,1,-1,-2), a_2=(5,8,-2,-3), a_3=(3,9,3,8)$.

3) Знайти довжини сторін і внутрішні кути трикутника, вершини якого задані своїми координатами в деякому ортонормованому базисі: $A=(1,2,3,2,1),\ \ B=(3,4,0,4,3),\ \ C=(-1,0,2,1,0)$.

II.

1) Перевірити, що вектори ортогональні і доповнити їх до ортогонального базису: $a_1=(1,1,1,2),\ a_2=(1,2,3,-3)$.

2) Знайти скалярний добуток та довжини векторів $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$, якщо задані їх координати в деякому базисі евклідового простору та матриця Грама цього базису: $|\mathbf{x}\rangle^T=(-1,-1,1)$, $|\mathbf{y}\rangle^T=(0,1,3)$, $\mathbf{G}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&8\\3&8&14\end{pmatrix}$.

III.

1) Знайти ортогональну проекцію y та ортогональну складову z вектора $x=(5,2,-2,2)$ на лінійний підпростір L натягнутий на вектори: $a_1=(2,1,1,-1), a_2=(1,1,3,0), a_3=(1,2,8,1)$.

2) Лінійний підпростір L заданий системою лінійних рівнянь:
$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\\3x_1+2x_2-2x_4=0\\3x_1+x_2+9x_3-x_4=0\end{cases}.$$
Знайти систему лінійних рівнянь, що задає ортогональне доповнення $L^{\perp}$.

Відповіді.

Ауд. I. 1) $e_1=\frac{1}{3}(2;1;2)$; $e_2=\frac{1}{3}(1;2;-2)$; $e_3=\frac{1}{3}(-2;2;1)$. 2) $e_1=\frac{1}{3}(0;-2;1;2)$; $e_2=\frac{1}{3\sqrt{29}}(0;-1;14;-8)$; $e_3=\frac{1}{5\sqrt{94}}(1;-36;-18;-27)$. 3) AB=BC=AC=6; $\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$. 4) 0, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$.

II. 1) $e_1=\frac{1}{3}(-2;2;1;0)$; $e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1;-1;0;1)$. 2) $\mathbf{G}=\begin{pmatrix}2&0&2/3\\0&2/3&0\\2/3&0&2/5\end{pmatrix}$.

III. 1) $y=(1;-1;-1;5)$, $z=(3;0;-2;-1)$. 2) $\begin{cases}x_1-x_3-x_4=0,\\x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$.

Дом. I. 1) $e_1=\frac{1}{2}(1;1;1;1)$; $e_2=\frac{1}{2}(1;1;-1;-1)$; $e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0;0)$;

$e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0;0;1;-1)$. 2) $e_1 = (1;1;-1;-2)$; $e_2 = (2;5;1;3)$. 3) AB=5; BC=$3\sqrt{6}$; AC=$\sqrt{11}$; $cos\angle A = -\frac{9}{5\sqrt{11}}$; $cos\angle B = \frac{34}{15\sqrt{6}}$; $cos\angle C = \frac{20}{3\sqrt{66}}$.

II. 1) $e_3 = (-25;-4;17;1)$; $e_4 = (1;-2;1;0)$. 2) 10, $\sqrt{2}$, $\sqrt{179}$.

III.1) $y = (3;1;-1;-2)$, $z = (2;1;-1;4)$. 2) $\begin{cases} x_1 + 6x_3 = 0, \\ x_2 - 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Розділ 13. Лінійні відображення.

Відображення $A: L_n \to L_m$, яке кожному вектору $\mathbf{x} \in L_n$ ставить у відповідність вектор $\mathbf{y} \in L_m$ за правилом $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, називається ***лінійним відображенням*** простору L_n в простір L_m, якщо

1. $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in L_n, \forall \mathbf{y} \in L_n$;
2. $A\lambda\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in L_n, \forall \lambda \in \mathbf{R}$.

Якщо $L_m = L_n$, то відображення A називається ***лінійним оператором*** в L_n.

Нехай $e_1, e_2, ..., e_n$ базис простору L_n, $f_1, f_2, ..., f_m$ базис в L_m. Відображення $A: L_n \to L_m$ лінійне. Запишемо вектори $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n$ в базисі $f_1, f_2, ..., f_m$: $Ae_k = a_1^k f_1 + a_2^k f_2 + ... + a_m^k f_m$. **Матрицею лінійного відображення** $A: L_n \to L_m$ називається матриця розмірності $m \times n$ стовпчиками якої будуть координати образів базисних векторів a_i^k, $i = 1,...,m$, $k = 1,...,n$.

Дія відображення A на довільний вектор $\mathbf{x}$ зводиться до множення матриці $\mathbf{A}$ лінійного відображення на координатний стовпчик цього вектора.

$|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{A} \cdot |\mathbf{x}\rangle$.

Образом (множиною значень) лінійного відображення $A: L_n \to L_m$ називається множина $Im A = \{\mathbf{y} \in L_m : \ \exists \mathbf{x} \in L_n,\ A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.

Ядром лінійного відображення $A: L_n \to L_m$ називається множина $Ker A = \{\mathbf{x} \in L_n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

Приклад 13.1. Показати, що перетворення трьохвимірного простору за правилом $\varphi x = (a,x)a$, де $\vec{a} = (1,2,3)$ є лінійним оператором.

Перевіримо 2 умови лінійності відображення:

1) $\forall x, y \in \mathbf{R}^3$: $\quad \varphi(x+y) = (a, x+y)a = (a,x)a + (a,y)a = \varphi x + \varphi y$, завдяки дистрибутивності скалярного добутку.

2) $\forall x \in \mathbf{R}^3 \ \forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \varphi(\alpha x) = (a, \alpha x)a = \alpha(a,x)a = \alpha\varphi x$, завдяки лінійності скалярного добутку.

Отже даний оператор $\varphi: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ – лінійний.

Приклад 13.2. Виписати матрицю оператора з прикладу **13.1** у стандартному ортонормованому базисі.

Розглянемо в $\mathbf{R}^3$ базис: $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$. Подіємо оператором φ на базисні вектори:

$\varphi e_1 = 1\cdot(1,2,3)=(1,2,3)$,

$\varphi e_2 = 2\cdot(1,2,3)=(2,4,6)$,

$\varphi e_3 = 3\cdot(1,2,3)=(3,6,9)$.

Запишемо ці вектори стовпчиками в матрицю і отримаємо матрицю оператора φ в базисі e_1,e_2,e_3: $A_\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.

Приклад 13.3. Визначити розмірність та вказати які-небудь базиси образу і ядра лінійного оператора з прикладу **13.1**.

Розмірністю образа оператора φ є ранг матриці $A_\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$. Другий і третій стовпчики матриці пропорційні першому, тому ранг дорівнює 1. Отже $dim\,Im\varphi=1$, базисом образу є лінійно незалежні стовпчики матриці, тобто базисом $Im\varphi$ буде вектор $f_1=(1,2,3)$.

Ядро оператора визначається з системи $A_\varphi|x\rangle=0$. Якщо ранг дорівнює 1, то незалежних змінних буде 3-1=2. Отже, розмірність ядра дорівнює 2.

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\xrightarrow[3_н=3_{ст}-3\cdot1_{ст}]{2_н=2_{ст}-2\cdot1_{ст}}(1,2,3)$, що відповідає системі $\begin{cases}x_1=-2x_2-3x_3\\x_2=c_1\\x_3=c_2\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$. Отже, базисом ядра будуть вектори $g_1=(-2,1,0),\ g_2=(-3,0,1)$.

Якщо $A:L_n\to L_m$ – лінійне відображення в деяких базисах $e_1,e_2,...,e_n$ та $f_1,f_2,\ldots,f_m$ відповідно просторів L_n та L_m, то при заміні базисів матриця $\mathbf{A}$ цього лінійного відображення зміниться. $\mathbf{A}'$

Нехай $\mathbf{T}$ – матриця переходу до нового базису $e_1',e_2',...,e_n'$ в просторі L_n, тобто координати довільного вектора $\mathbf{x}\in L_n$ змінюються за правилом: $|\mathbf{x}\rangle=\mathbf{T}|\mathbf{x}'\rangle$, а $\mathbf{S}$ – матриця переходу до нового базису $f_1',f_2',...,f_m'$ в просторі L_m, тобто для координат довільного вектора $\mathbf{y}\in L_m$ маємо $|\mathbf{y}\rangle=\mathbf{S}|\mathbf{y}'\rangle$. Тоді матриця лінійного відображення $\mathbf{A}'$ в новому базисі визначається формулою $\mathbf{A}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Приклад 13.4. Виписати матрицю оператора прикладу **13.1** в базисі $b_1=(1,0,1),\ b_2=(2,0,-1),b_3=(1,1,0)$.

Отже, з прикладу **13.2** відомо, що матриця оператору φ в стандартному базисі трьохвимірного простору наступна: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Матриця переходу від цього базису до нового b_1, b_2, b_3 – $S = T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайдемо обернену матрицю S^{-1}. Для цього порахуємо $\det S = 3$ і далі

$$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A'_\varphi = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -4 & -8 & -12 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 20 & -5 & 15 \\ 16 & 4 & -12 \\ 24 & -6 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & \frac{-5}{2} & 5 \\ \frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -4 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$ – матриця оператора φ в базисі b_1, b_2, b_3.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1) Визначити, яке з наступних відображень φ є лінійним, виписати для нього матрицю в довільному базисі, обчислити розмірність і базис ядра і образа відображення $Ker\,\varphi, Im\,\varphi$:

а) $\varphi x = \left(x_1 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3\right)$;

б) $\varphi x = \left(x_1, x_2 + 2, x_3 - 1\right)$.

2)Показати, що множення квадратних матриць другого порядку зліва на матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ є лінійним перетворенням простору матриць другого порядку і виписати його матрицю в базисі

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. А яка матриця оператора в базисі $e_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

3) Лінійне перетворення φ в базисі e_1, e_2, e_3, e_4 має матрицю

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$ Знайти матрицю цього перетворення у базисах:

а) e_2, e_1, e_4, e_3; б) $e_1 - e_3, e_2 + e_4, e_4, e_3 - 2e_1 + e_2$.

II.

1) Довести, що існує єдине лінійне перетворення трьохвимірного простору, що переводить вектори $b_1 = (1,2,-1), b_2 = (0,1,-1), b_3 = (1,-1,1)$ у відповідно вектори $a_1 = (2,0,3), a_2 = (4,1,5), a_3 = (3,1,2)$. Знайти для нього матрицю в тому ж базисі, в якому задано координати усіх векторів. Обчислити розмірності та базиси ядра і образа відображення $Ker\,\varphi, Im\,\varphi$.

2) Показати, що диференціювання є лінійним перетворенням простору многочленів степеня $\le n$ від однієї змінної з дійсними коефіцієнтами. Виписати матрицю цього перетворення у базисі $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

III.

1) Нехай перетворення φ в базисі $a_1 = (1,2), a_2 = (2,3)$ має матрицю $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. А перетворення ϕ в базисі $b_1 = (3,1), b_2 = (4,2)$ має матрицю $A_\phi = \begin{pmatrix} -40 & -36 \\ 36 & 39 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю перетворення $\varphi + \phi$ в базисі b_1, b_2.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1) Визначити, яке з наступних відображень φ є лінійним, виписати для нього матрицю в довільному базисі, обчислити розмірність і базис ядра і образа відображення $Ker\,\varphi, Im\,\varphi$:

а) $\varphi x = \left(2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2\right)$;

б) $\varphi x = \left(x_1 - x_2 + x_3, x_2, x_3\right)$.

2) Показати, що множення квадратних матриць другого порядку справа на матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ є лінійним перетворенням простору матриць другого порядку і виписати його матрицю в базисі

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. А яка матриця оператора в базисі $e_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

3) Лінійне перетворення φ в базисі e_1, e_2, e_3 має матрицю $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю цього перетворення у базисах: а) e_3, e_1, e_2;
б) $2e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_3 - 2e_1 + e_2$.

II.

1) Довести, що існує єдине лінійне перетворення трьохвимірного простору, що переводить вектори $a_1 = (2,3,5), a_2 = (0,1,2), a_3 = (1,0,0)$ у відповідно вектори $b_1 = (1,1,1), b_2 = (1,1,-1), b_3 = (2,1,2)$. Знайти для нього матрицю в тому ж базисі, в якому задано координати усіх векторів. Обчислити розмірність і базис ядра і образа відображення $Ker\,\varphi, Im\,\varphi$.

2) Показати, що диференціювання є лінійним перетворенням простору многочленів степеня $\le n$ від однієї змінної з дійсними коефіцієнтами. Виписати матрицю цього перетворення у базисі $1, x-3, \frac{(x-3)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x-3)^n}{n!}$.

III.

1) Нехай перетворення φ в базисі $a_1 = (-3,7), a_2 = (1,-2)$ має матрицю $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. А перетворення ϕ в базисі $b_1 = (6,-7), b_2 = (-5,6)$ має матрицю $A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю перетворення $\varphi\phi$ в базисі b_1, b_2.

Відповіді.

Ауд. I. 1) а) лін. $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $dim\,Im\varphi = 2$, базис образу: $(0,-1,-2)$; $(1,1,1)$; $Ker\varphi = \{(-1,-1,1)\}$. б) нелін. 2) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A'_\varphi=\begin{pmatrix}1&-2&-2&-2\\2&6&5&2\\0&0&-1&-2\\0&0&2&6\end{pmatrix}.\ 3)\ а)\ A_\varphi=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&3&2&-1\\5&2&1&3\\2&1&3&1\end{pmatrix};\ б)\ A_\varphi=\begin{pmatrix}1&3&1&0\\4&2&2&-7\\-1&6&1&4\\0&5&3&1\end{pmatrix}.$$

II. 1) $A_\varphi=\begin{pmatrix}7&-9&-13\\2&-3&-4\\7&-9&-14\end{pmatrix}$, $dim\,Im\,\varphi=3$, базис образа: $(7,2,7)$; $(-9,-3,-9)$; $(-13,-4,-14)$; $Ker\varphi=\{0\}$.

2) $$A_\varphi=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&2&0&\cdots&0\\0&0&0&3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&n\\0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

III. $A_{\varphi+\psi}=\begin{pmatrix}0&2\\-0{,}5&5\end{pmatrix}$.

Дом. **I.**1) а) нелін.; б) $A_\varphi=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $dim\,Im\,\varphi=3$, базис образа: $(1,-1,1)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$; $Ker\varphi=\{0\}$. 2) $A_\varphi=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\3&0&4&0\\0&3&0&4\end{pmatrix}$.

$$A'_\varphi=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\-3&-2&-3&-4\\3&0&4&0\\0&3&3&7\end{pmatrix}.\ 3)\ а)\ A_\varphi=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&2&0\\2&1&-1\end{pmatrix};\ б)\ A_\varphi=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\5&1&-3\\4&1&-1\end{pmatrix}.$$

II. 1) $A_\varphi=\begin{pmatrix}2&-11&6\\1&-7&4\\2&-1&0\end{pmatrix}$, $dim\,Im\,\varphi=3$, базис образу:

$(2{,}1{,}2)$; $(-11,-7,-1)$; $(6{,}4{,}0)$; $Ker\varphi = \{0\}$. 2) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

III. $A_{\varphi\psi} = \begin{pmatrix} 23 & 98 \\ 27 & 115 \end{pmatrix}$.

Розділ 14. Спектральна задача для лінійного оператора.

Нехай L_n – лінійний простір, в якому діє лінійний оператор A: $A: L_n \to L_n$.

Ненульовий вектор $\mathbf{x} \in L_n$ називається ***власним вектором**, який відповідає* ***власному числу (власному значенню)*** λ, лінійного оператора A, якщо

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (14.1)$$

Повний набір власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ лінійного оператора з урахуванням їх кратності називається його *спектром*, а задача по відшуканню власних чисел та власних векторів – *спектральною задачею* для лінійного оператора. Рівняння (14.1) еквівалентне матричному рівнянню $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot |\mathbf{x}\rangle = \mathbf{0}$. (14.2)

Для відшукання власних векторів необхідно:

1. Знайти всі корені λ_i, $i = \overline{1,k}$ характеристичного рівняння матриці $\mathbf{A}$: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$
2. Далі кожне власне значення підставити в систему рівнянь (14.2), та знайти відповідний йому власний вектор.

У найпростішому випадку, коли маємо n різних власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, тоді всі n власних векторів будуть лінійно незалежними, і з них можна утворити базис простору L_n, в якому матриця лінійного оператору набуде діагонального (канонічного) виду $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Зв'язок між ними встановлює формула

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad (14.3)$$

де стовпчики матриці переходу $\mathbf{T}$ є координатними стовпчиками відповідних власних векторів. В цьому випадку про матрицю $\mathbf{A}$ кажуть, що вона ***діагоналізується*** або ***подібна діагональній*** матриці.

Приклад 14.1. Перевірити, чи подібна діагональній матриці матриця $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу до нового базису і перевірити рівність (14.3).

Випишемо матрицю $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & -2\\ 0 & 2-\lambda & 3\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}$. Складемо характеристичне рівняння: $\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=(1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda-3\right)=(1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-3)=0$. Отже, спектр оператора, що відповідає матриці $\mathbf{A}$: $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=3$. Спектр простий, тому матрицю можна діагоналізувати $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Знайдемо власні вектори:

1) шукаємо власний вектор для $\lambda_1=1$. Розв’яжемо систему лінійних рівнянь $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\left|\mathbf{x}\right\rangle=\mathbf{0}$.

$$A-E=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{2_н=2_{ст}+1_{ст}\\ 3_н=3_{ст}+1_{ст}}]{1_н=-1_{ст}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{1_н=-2\cdot 2_{ст}+1_{ст}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Останню матрицю переписуємо у вигляді рівнянь $\begin{cases}x_2=0,\\ x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=c,\\ x_2=0,\\ x_3=0\end{cases}$ отже,

загальний розв’язок $x=c\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda_1=1$буде $u_1=(1,0,0)^T$.

2) шукаємо власний вектор для $\lambda_2=-1$. Розв’яжемо $(\mathbf{A}+\mathbf{E})\left|\mathbf{x}\right\rangle=\mathbf{0}$.

$$A+E=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{1_н=1_{ст}+2_{ст}}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Запишемо у вигляді системи рівнянь

$\begin{cases}2x_1-x_3=0,\\ x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{c}{2},\\ x_2=-c,\\ x_3=c\end{cases}$ отже загальний розв’язок $x=c\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$.

Власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda_2 = -1$ буде $u_2 = (1,-2,2)^T$.

3) шукаємо власний вектор для $\lambda_3 = 3$. Розв'яжемо $(A - 3E)|x\rangle = 0$.

$$A + E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1_н = 1_{cm} + 2_{cm}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Останню матрицю переписуємо у вигляді рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 0, \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5c}{2}, \\ x_2 = 3c, \\ x_3 = c \end{cases}$

отже, загальний розв'язок $x = c\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 3$ буде $u_3 = (-5,6,2)^T$.

Матриця переходу T до нового базису, в якому матриця оператора A набуває вигляду $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, записується за допомогою власних векторів

$$T = (u_1\ u_2\ u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевіремо відповідь. Знайдемо T^{-1}. $det T = 16$, $T^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$D = T^{-1}AT = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Рівність виконується.

Приклад 14.2 Вказати всі підпростори трьохвимірного простору інваріантні відносно лінійного оператора $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Необхідно знайти всі вектори u такі, що $Au=\lambda u$. Отже, задача збігається зі спектральною задачею для матриці A. Виписуємо характеристичне рівняння $det(A-\lambda E)=0$: $\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (2-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)=0$. Отже, спектр складають $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$.

Знайдемо власні вектори для числа $\lambda_1=\lambda_2=2$:

$A-2E=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Ця матриця відповідає рівнянню $x-2y+z=0 \Rightarrow x=2y-z$. Отже, маємо наступний розв'язок $\begin{cases} x=2c_1-c_2, \\ y=c_1, \\ z=c_2. \end{cases}$

$\Rightarrow u=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}c_2$, де c_1 і $c_2 \neq 0$ одночасно. Геометрична кратність власного числа $\lambda_1=\lambda_2=2$ дорівнює 2 (кількості векторів в ФСР).

Знайдемо власний вектор для числа $\lambda_3=1$:

$$A-E=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3_н=1_{ст}+3_{ст}]{1_н=-1_{ст}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1_н=1_{ст}+4\cdot 2_{ст}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця відповідає системі рівнянь $\begin{cases} x=-2z, \\ y=0 \end{cases}$. Отже, маємо наступний розв'язок $\begin{cases} x=-2c_1, \\ y=0, \\ z=c_1. \end{cases} \Rightarrow u=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}c_1$, де $c_1 \neq 0$.

Таким чином, інваріантною відносно оператора A буде пряма, що проходить через початок координат, з напрямним вектором $u=(-2;0;1)$; будь-яка пряма, що проходить через початок координат, з площини $x-2y+z=0$ і сама ця площина, увесь простір і нульовий підпростір $\{\mathbf{0}\}$.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1) Знайти власні числа і власні вектори операторів заданих матрицями:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Знайти власні числа і власні вектори операторів заданих матрицями:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

3) Чи можна діагоналізувати матрицю $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, якщо так, то знайти матрицю переходу до базису, в якому ця матриця буде діагональною. Перевірити результат.

II.

1) Знайти власні числа і власні вектори оператора заданого матрицею

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Чи можна діагоналізувати матрицю $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, якщо так, то знайти матрицю переходу до базису в якому ця матриця буде діагональною.

III.

1) Знайти ортонормований базис в якому лінійний оператор матиме діагональну матрицю, якщо відомо його матрицю $A=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ в деякому базисі .

2) Вказати всі підпростори трьохвимірного простору інваріантні відносно лінійного оператора $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання для домашньої роботи.

I.

1) Знайти власні числа і власні вектори операторів заданих матрицями:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. в) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Знайти власні числа і власні вектори операторів заданих матрицею:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

3) Чи можна діагоналізувати матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, якщо так, то знайти матрицю переходу до базису в якому ця матриця буде діагональною.

II.

1) Знайти власні числа і власні вектори оператору, заданого матрицею: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Чи можна діагоналізувати матрицю A? Вказати власні вектори і власні числа оператора $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

III.

1) Знайти всі підпросторі трьохвимірного простору інваріантні одночасно відносно обох лінійних операторів з матрицями $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Знайти ортонормований базис власних векторів і діагональну матрицю для оператора заданого в деякому ортонормованому базисі матрицею $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

Відповіді.

Ауд. I. 1) а) $\lambda_1 = 2$ з власним вектором $u_1 = c(1;1)^T$, $\lambda_2 = 1$з власним вектором $u_2 = c(0;1)^T$, $c \neq 0$. б) $\lambda_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ з власним вектором $u_1 = c\left(-1+i\sqrt{3};2\right)^T$,

$\lambda_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ з власним вектором $u_2 = c\left(-1-i\sqrt{3};2\right)^T$, $c \neq 0$. в) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ з власним вектором $u_1 = c\left(0;1\right)^T$, $c \neq 0$. 2) а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, власні вектори з $L = \left\langle \left(1;2;0\right)^T, \left(0;0;1\right)^T \right\rangle / \{0\}$. б) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$, власні вектори для $\lambda_{1,2}$ $u_1 = c\left(1;2;1\right)^T$, для λ_3 $u_3 = c\left(1;2;2\right)^T$, $c \neq 0$. 2) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

II. 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$ з власними векторами з $L = \left\langle \left(1;0;1;0\right)^T, \left(0;0;0;1\right)^T \right\rangle / \{0\}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ з власними векторами з $L = \left\langle \left(0;1;0;0\right)^T, \left(0;0;1;0\right)^T \right\rangle / \{0\}$. 2) Не можна. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

III. 1) $u_9 = \frac{1}{3}\left(2;2;1\right)$, $u_{18} = \frac{1}{3}\left(2;-1;-2\right)$, $u_{-9} = \frac{1}{3}\left(1;-2;2\right)$.

2)Пряма з напрямним вектором $u = \left(2;2;-1\right)^T$ і будь-яка площина що містить цю пряму, будь-яка пряма з площини: $x - y + z = 0$, і сама ця площина, увесь простір, нульовий підпростір.

Дом. I. 1) а) $\lambda_1 = 2$ з власним вектором $u_1 = c\left(1;0\right)^T, \lambda_2 = 3$ з власним вектором $u_2 = c\left(1;-1\right)^T$, $c \neq 0$. б) $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}$ з власним вектором $u_1 = c\left(-i\sqrt{2};1\right)^T$, $\lambda_2 = 1 - i\sqrt{2}$ з власним вектором $u_2 = c\left(i\sqrt{2};1\right)^T$, $c \neq 0$. в) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ з власним вектором $u_1 = c\left(1;-1\right)^T, c \neq 0$. 2) а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, власні вектори $u = c\left(1;1;-1\right)^T$, $c \neq 0$. б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$, власні вектори для $\lambda_{1,2}$ $u = c\left(1;2;3\right)^T$, для λ_3 $u_3 = c\left(1;1;1\right)^T$, $c \neq 0$. 3) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

II. 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$ з власними векторами $u_1 = c\left(0;0;0;1\right)^T, c \neq 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ з власними векторами $u_3 = c_1\left(0;1;0;0\right)^T$, $u_4 = c_2\left(0;0;1;0\right)^T$, c_1 і $c_2 \neq 0$ одночасно. 2) Не можна. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$, власні вектори з $L = \left\langle \left(1;1;0;1\right)^T, \left(1;1;-1;0\right)^T \right\rangle / \{0\}$.

III.

1) Пряма з напрямним вектором $u=(1;-2;1)^T$; площина: $x-2y+z=0$; увесь простір, нульовий підпростір.

2) $u_9=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0)$, $u_9=\frac{1}{\sqrt{18}}(1;-1;-4)$, $u_{27}=\frac{1}{3}(2;-2;1)$ $D=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&27\end{pmatrix}$.

Розділ 15. Лінійні оператори в евклідовому та унітарному просторах. Спряжений та самоспряжений оператор.

Векторний комплексний простір U_n називається **унітарним**, якщо в ньому задана задана операція ***скалярного добутку*** векторів, тобто операція, яка будь-якій парі векторів $\mathbf{x},\mathbf{y}\in E_n$ цього простору ставить у відповідність комплексне число $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ таким чином, що виконуються наступні аксіоми:

1. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\overline{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}\quad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in U_n$ (комутативність скалярного добутку);
2. $(\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\quad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in U_n\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$;
3. $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{y}\quad\forall\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}\in U_n$ (дистрибутивність скалярного добутку);
4. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\ge 0\quad\forall\mathbf{x}\in U_n$, причому $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0\quad\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Нехай $G=\begin{pmatrix}(e_1,e_1)&(e_1,e_2)&\cdots&(e_1,e_n)\\(e_2,e_1)&(e_2,e_2)&\cdots&(e_2,e_n)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(e_n,e_1)&(e_n,e_2)&\cdots&(e_n,e_n)\end{pmatrix}$ матриця Грама.

Лінійний оператор $A^*:E_n\to E_n$ називається ***спряженим*** даному оператору A *в евклідовому просторі* E_n, якщо $\forall\,x,y\in E_n$ має місце рівність $Ax\cdot y=x\cdot A^*y$.

Якщо $\mathbf{A}$ – матриця лінійного оператора A в деякому базисі евклідового простору E_n, то матриця $\mathbf{A}^*$ спряженого оператора в тому ж базисі визначається рівністю:
$$\mathbf{A}^*=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}. \qquad (15.1)$$
В ***ортонормованому базисі в евклідовому просторі*** E_n матриця спряженого оператора визначається просто: $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

Лінійний оператор $A:E_n\to E_n$ називається ***самоспряженим,*** якщо $\forall\,x,y\in E_n$ має місце рівність $Ax\cdot y=x\cdot Ay$, тобто $A=A^*$.

Очевидно, що в будь-якому ортонормованому базисі матриця $\mathbf{A}$ самоспряженого оператора симетрична: $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

Лінійний оператор $A^*:U_n \to U_n$ називається ***спряженим*** даному оператору A *в унітарному просторі* U_n, якщо $\forall\, x,y \in U_n$ має місце рівність $Ax\cdot y = x\cdot A^* y$.

Якщо $\mathbf{A}$ – матриця лінійного оператора A в деякому базисі унітарного простору U_n, то матриця $\mathbf{A}^*$ спряженого оператора в тому ж базисі визначається рівністю:

$$\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}} \tag{15.2}$$

Лінійний оператор $A:U_n \to U_n$ називається ***самоспряженим*** *в унітарному просторі* U_n, якщо $\forall\, x,y \in U_n$ має місце рівність $Ax\cdot y = x\cdot A^* y$.

В ***ортонормованому базисі унітарного простору*** U_n матриця $\mathbf{A}$ самоспряженого оператора A є ***ермітовою*** $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}$.

Властивості самоспряженого оператора:

1) Всі власні числа самоспряженого оператора A є дійсними.

2) Всі власні вектори, що відповідають попарно різним власним числам є ортогональними.

3) Існує ортонормований базис, який складається з власних векторів самоспряженого оператора.

Зауваження. Сказане вище означає, що будь-яка симетрична або ермітова матриці завжди діагоналізуються.

Приклад 15.1. Знайти спряжений оператор до оператора, заданого матрицею $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в деякому базисі евклідового простору з матрицею Грама $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Щоб використати формулу (15.1) необхідно знайти матрицю $\mathbf{G}^{-1}$.

$$\mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{G}|}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Далі,
$$\mathbf{A}^* = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & -8 & -2 \\ -8 & 14 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ -4 & -24 & -13 \\ 11 & 44 & 23 \end{pmatrix}..$$

Приклад 15.2. Знайти ортонормований базис в якій матриця оператора $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ діагоналізується.

Оператор A самоспряжений, оскільки його матриця є симетричною. Знайдемо власні числа оператора A. Характеристичним рівнянням буде $(2-\lambda)(\lambda^2-5)=0$, $\lambda_1=2, \lambda_2=\sqrt{5}, \lambda_3=-\sqrt{5}$ – спектр оператора A. Знайдемо власний вектор для власного числа $\lambda=2$:

$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Rightarrow$ матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ можна записати у вигляді наступної системи $\begin{cases} x=0 \\ y=0, \\ z=c \end{cases}$ $c\neq 0$. Власний вектор $u_1=(0\ \ 0\ \ 1)^T$.

Знайдемо власний вектор для власного числа $\lambda=\sqrt{5}$:

$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Rightarrow$Домножимо другий рядок матриці на $1+\sqrt{5}$ Отримаємо $\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2\left(1+\sqrt{5}\right) & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}x \\ x=c, \\ z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Власний вектор для власного числа $\lambda_2=\sqrt{5}$ $u_2=\dfrac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

(власний вектор вибраний нормованим)

Знайдемо власний вектор для власного числа $\lambda=-\sqrt{5}$:

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \quad \Rightarrow$$

Домножимо другий рядок матриці на $1-\sqrt{5}$. Отримаємо $\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2\left(1-\sqrt{5}\right) & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}x \\ x = c, \\ z = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Власний вектор для власного числа $\lambda_3 = -\sqrt{5}$ $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ортонормований базис утворюють вектори $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$. Легко перевірити, що всі власні вектори самоспряженого оператора – ортогональні. В цьому базисі матриця даного лінійного оператора – діагональна: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$, матриця переходу до цього ортонормованого базису із власних векторів – ортогональна (див. означення нижче): $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \dfrac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ 0 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, тобто $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{E}$.

Лінійний оператор $A : E_n \to E_n$ називається ***ортогональним*** *в евклідовому просторі* E_n (***унітарним*** *в унітарному просторі* U_n), якщо $\forall\, x, y \in E_n$ має місце $Ax \cdot Ay = x \cdot y$. Тобто ортогональний оператор зберігає скалярний добуток, а отже, довжини векторів та кути між ними.

Таким чином, для ортогонального (унітарного) оператора справедлива рівність: $AA^* = A^*A = E$.

В ***ортонормованому базисі евклідового простору*** E_n матриця ортогонального оператора – ***ортогональна***, тобто: $A^{-1} = A^T$.

В ***ортонормованому базисі унітарного простору*** U_n матриця унітарного оператора – **унітарна**, тобто $A^{-1} = \overline{A^T}$.

Властивість власних чисел ортогонального і унітарного операторів: Власні числа ортогонального (унітарного) оператора по модулю рівні 1.

Приклад 15.3

Довести, що оператор, заданий в ортонормованому базисі унітарного простору матрицею $\mathbf{A}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & 2 \\ -2 & -i \end{pmatrix}$ – унітарний. Знайти діагональний вид його матриці та ортонормований базис, в якому матриця оператору набуває такого вигляду.

Знайдемо $\mathbf{A}^{-1}$: $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} -i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$. З іншого боку, $\overline{\mathbf{A}^{T}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\overline{\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & -i \end{pmatrix}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}$, тобто матриця $\mathbf{A}$ є унітарною, а значить, вона задає в ортонормованому базисі унітарний оператор. Знайдемо діагональний вид цієї матриці та відповідний базис.

Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^2+1=0$, звідки маємо спектр оператора $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$. Матриця A приводиться до діагонального виду: $\mathbf{D}=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Знайдемо власний вектор для власного числа $\lambda_1=i$:

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{5}}-i & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{i}{\sqrt{5}}-i \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} i\left(1-\sqrt{5}\right) & 2 \\ -2 & -i\left(1+\sqrt{5}\right) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & i\left(1+\sqrt{5}\right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}i\cdot y.$$

Отже, базисним вектором буде $u_1=\frac{1}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{5}\right)}}\left(1+\sqrt{5}\quad 2i\right)^T$.

Знайдемо власний вектор для власного числа $\lambda_1=-i$:

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{5}}+i & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{i}{\sqrt{5}}+i \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} i\left(1+\sqrt{5}\right) & 2 \\ -2 & -i\left(1-\sqrt{5}\right) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & i\left(1-\sqrt{5}\right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow x=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}i\cdot y.$$

Отже, базисним вектором буде $u_1=\frac{1}{\sqrt{2\left(1-\sqrt{5}\right)}}\left(1-\sqrt{5}\quad 2i\right)^T$. Таким чином, u_1,u_2 – шуканий базис, а $\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} & \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}\ i \\ \sqrt{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} & \sqrt{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}\ i \end{pmatrix}$ – матриця переходу до нього.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1) Нехай задана матриця оператора A в деякому ортонормованому базисі. Знайти матрицю спряженого оператора A^*.

а) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1-i & 1 & -4 \\ i & 0 & 2 \\ 3+2i & i & 1 \end{pmatrix}$.

2) а) Нехай лінійний оператор φ в базисі $f_1=(1;0)^T$, $f_2=(1;1)^T$ (координати векторів задані в деякому ортонормованому базисі) має матрицю $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^*.

б) U_2 – унітарний простір з матрицею Грама $G=\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$. Лінійний оператор φ в цьому базисі має матрицю $A=\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^*.

3) Довести, що а) матриця $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$ ортогональна.

б) матриця $A=\begin{pmatrix} \frac{4+3i}{9} & \frac{2-6i}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{2-6i}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2-6i}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{-2-6i}{9} & \frac{4-3i}{9} \end{pmatrix}$ унітарна.

II.

1) Нехай $G=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ матриця Грама деякого базису евклідового простору, оператор φ задається матрицею $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ в цьому базисі. Знайти A^*.

2) Знайти канонічний вигляд B ортогональної матриці A і ортогональну матрицю T таку, що $B=T^{-1}AT$: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

III.

1) Знайти діагональну матрицю B і унітарну матрицю T такі, що $B=T^{-1}AT$ для матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$.

2) Знайти ортонормований базис в якому матриця A має діагональний вигляд

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Знайти канонічний вигляд B ортогональної матриці A і ортогональну матрицю T таку, що $B=T^{-1}AT$: $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Завдання для домашньої роботи.

I.

1) Нехай задана матриця оператора A в деякому ортонормованому базисі. Знайти матрицю A^*.

а) $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2}-i & 2 & -i \\ i-3 & \sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \\ i & i+\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.

2) а) Нехай лінійний оператор φ в базисі $f_1=(-1;1)^T$, $f_2=(2;1)^T$ (координати векторів задані в деякому ортонормованому базисі) має матрицю $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^*.

б) U_2- унітарний простір з матрицею Грама $\mathbf{G}=\begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$. Лінійний оператор φ в цьому базисі має матрицю $A=\begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^*.

3) Довести, що а) матриця $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ортогональна.

б) матриця $A=\dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} 9+23i & -12+36i & 15+15i \\ -12+36i & 16+2i & -20-20i \\ 15+15i & -20-20i & 25-25i \end{pmatrix}$ унітарна.

II.

1) Нехай $G=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ матриця Грама деякого базису евклідового простору, оператор φ задається матрицею $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ в цьому базисі. Знайти A^*.

2) Знайти діагональну матрицю B і унітарну матрицю S такі, що $A=S^{-1}BS$

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}.$$

III.

1) Знайти діагональну матрицю B і унітарну матрицю T такі, що $B=T^{-1}AT$ для матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$.

2) Знайти канонічний вигляд B ортогональної матриці A і ортогональну матрицю T таку, що $B=T^{-1}AT$: $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Відповіді.

Ауд. I. 1) а) $A^*=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A^*=\begin{pmatrix} 1+i & -i & 3-2i \\ 1 & 0 & -i \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2) а) $A^*=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A^*=\begin{pmatrix} 2-2i & -5-2i \\ -1-i & -1+2i \end{pmatrix}$.

II. 1). $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

III. 1) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$,

$e_2 = (0,0,1)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$.

3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Дом.

I. 1). а) $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i & -i-3 & i \\ 2 & \sqrt{3} & -i+\sqrt{2} \\ i & 1+\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.

2) а) $A^* = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & -16 \\ 10 & -14 \end{pmatrix}$; б) $A^* = \begin{pmatrix} -8+9i & 7i \\ 23-i & 10-9i \end{pmatrix}$.

II. 1). $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -i \\ -2i & i & 2 \\ i & -2i & 2 \end{pmatrix}$.

III. 1). $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} \frac{2-i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2+i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Розділ 16. Білінійні та квадратичні форми.

Відображення $b: L_n \times L_n \to \mathbf{R}$, де L_n – векторний простір, називаються ***білінійною функцією (білінійною формою)***, якщо $b(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – лінійна функція по $\mathbf{x}$ при фіксованому $\mathbf{y}$ та навпаки, тобто

1. $b(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y})=b(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})+b(\mathbf{x}_2,\mathbf{y})\ \ \forall \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}\in L_n$;
2. $b(\mathbf{x},\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)=b(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)+b(\mathbf{x},\mathbf{y}_2)\ \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\in L_n$
3. $b(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda b(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in L_n, \forall\lambda\in\mathbf{R}$.
4. $b(\mathbf{x},\lambda\mathbf{y})=\lambda b(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in L_n, \forall\lambda\in\mathbf{R}$.

Якщо $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_n}\}$ довільний базис L_n, то матрицею білінійної форми в цьому базисі називається матриця $\mathbf{B}=(b_{ij}), i, j=\overline{1,n}$, де $b_{ij}=b(\mathbf{e_i},\mathbf{e_j})$. Тоді $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in L_n\ \ b(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x^i y^i b_{ij}=|\mathbf{x}\rangle^T\cdot\mathbf{B}\cdot|\mathbf{y}\rangle$

Білінійна форма $b(\mathbf{x},\mathbf{y})$ називається ***симетричною***, якщо $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in L_n$ $b(\mathbf{x},\mathbf{y})=b(\mathbf{y},\mathbf{x})$. Білінійна форма симетрична тоді і тільки тоді, коли її матриця симетрична в деякому базисі: $\mathbf{B}=\mathbf{B}^T$.

При переході від базису $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_n}\}$ до нового базису $\{\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},\ldots,\mathbf{e'_n}\}$ з матрицею переходу $\mathbf{T}$ матриця білінійної форми змінюється за формулою: $\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{T}$.

Квадратичною функцією (формою) називається відображення $k: L_n\to\mathbf{R}$: $k(\mathbf{x})=b(\mathbf{x},\mathbf{x})$, де $b(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – симетрична білінійна форма.

Матрицею квадратичної форми називається матриця відповідної їй симетричної білінійної форми.

Основна задача, яка розв'язується в теорії квадратичних форм – це зведення квадратичної форми до ***канонічного виду*** (коли квадратична форма включає лише доданки з квадратими коефіцієнтів) або ***нормального виду*** (коли в канонічному представленні всі коефіцієнти рівні ± 1 або 0). Оскільки матриця квадратичної форми симетрична – вона породжує деякий самоспряжений оператор, а отже, завжли діагоналізується. Більше того, ***завжли існує ортогональне перетворення*** початкового ортонормованого базису до нового ортонормованого, в якому квадратична форма має канонічний вид, а її матриця – відповідно є діагональною.

Приклад 16.1. **С**калярний добуток $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ двох векторів довільного евклідового простору є симетричною білінійною формою $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$, в силу властивостей скалярного добутку.

Приклад 16.2. Виписати матрицю білінійної форми $b(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 5y_2x_1 - 3y_2x_2$.

Це матриця розмірностей 2×2: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. В цьому легко переконатись, якщо розглянути базис $\mathbf{e_1} = (1 \quad 0)^T$, $\mathbf{e_2} = (0 \quad 1)^T$ та обчислити $b_{11} = b(\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}) = 1$, $b_{12} = b(\mathbf{e_1},\mathbf{e}_2) = 5$, $b_{21} = b(\mathbf{e}_2,\mathbf{e_1}) = -2$,

Приклад 16.3. Записати матрицю квадратичної форми $k(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_4^2 - 3x_1x_2 + 4x_2x_4 + 2x_1x_3$.

Визначаємо, що розмірність матриці буде 4×4, а сама матриця матиме вигляд (по діагоналі виписуємо коефіцієнти біля квадратів, коефіцієнти a_{ij} та a_{ji} рівні половині коефіцієнту біля x_ix_j):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Слід зазначити, що теорія квадратичних форм тісно пов'язана з аналітичною геометрією, а саме – з теорією кривих та поверхонь другого порядку. При дослідженні загального рівняння кривої другого порядку $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$ виділимо в ньому дві частини, квадратичну та лінійну. $K(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ – квадратична форма, з матрицею $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Матриця симетрична, отже, можна знайти ортонормований базис, в якому ця матриця буде діагональною. Тому необхідно розв'язати спектральну задачу для матриці A. Стовпчики матриці переходу до нового базису складатимуться з координат нормованих власних векторів. Визначник цієї матриці має задовольняти умові $\boxed{det\, S = 1}$ (якщо визначник рівний -1, поміняйте місцями стовпчики матриці, тоді, відповідно, зміниться порядок власних чисел в діагональній матриці). Таким чином, $S = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$, де α – кут повороту системи координат.

Звязок між новими і старими координатами наступний: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$.

Підставивши цю заміну координат і в лінійну частину рівняння $L(\vec{x}) = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}$, отримаємо рівняння в новій системі координат $0x'y'$: $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + 2\tilde{a}_{13}x'_1 + 2\tilde{a}_{23}x'_2 + a_{33} = 0$.

Квадратична форма в новому базисі матиме ***канонічний вигляд***: $K(\vec{x}') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$.

Далі за допомогою паралельного переносу системи координат $x' = x'' + x_0$, $y' = y'' + y_0$ можна отримати канонічне рівняння кривої другого порядку.

Приклад 16.4. Звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

Рівняння $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ складається з двох частин : квадратичної форми $K(\vec{x}) = 4xy + 3y^2$ та лінійної форми $L(\vec{x}) = 16x + 12y - 36$.

Щоб звести до канонічного виду квадратичну форму, розв'яжемо спектральну задачу для її матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристичне рівняння для матриці A: $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Спектр простий – $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$. Отже, матриця діагоналізується. Знайдемо власні вектори: $A - 4E = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - y = 0$, $u_1 = c\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T, c \neq 0$. Власні вектори мають бути нормовані, тому виберемо $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$. Далі, $A + E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$, $u_1 = c\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T, c \neq 0$. Виберемо $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T$. Матрицею переходу до базису, в якому квадратична форма матиме діагональну матрицю, буде матриця з *нормованих* власних векторів, для якої виконується умова $\boxed{\det S = 1.}$

Оскільки $|S| = -1$, поміняємо стовпчики місцями (і відповідно власні числа: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$). Тепер матриця переходу $S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ – буде матрицею повороту системи координат. Таким чином, перходимо до нових координат за формулою $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{pmatrix}$. При такому ортогональному перетворенні (повороті системи координат) квадратична форма набуде вигляду $K(\vec{x}') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = -x'^2 + 4y'^2$.

Лінійна частина рівняння теж зміниться: $L(\vec{x}') = 16\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}\right) + 12\left(-\frac{x'}{\sqrt{5}} + \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right) - 36 = \frac{20}{\sqrt{5}}x' + \frac{40}{\sqrt{5}}y' - 36$.

Отже, початкове рівняння матиме вигляд: $-x'^2 + 4y'^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x' + \frac{40}{\sqrt{5}}y' - 36 = 0$ або $-\left(x'^2 - 2\cdot 2\sqrt{5}x' + 20\right) + 4\left(y'^2 + 2\cdot\sqrt{5}y' + 5\right) = 36 \quad \Rightarrow \frac{\left(x' - 2\sqrt{5}\right)^2}{36} - \frac{\left(y' + \sqrt{5}\right)^2}{9} = -1$ або $\frac{x''^2}{36} - \frac{y''^2}{9} = -1$, якщо виконати паралельне перенесення системи координат $x' = x'' + 2\sqrt{5}$, $y' = y'' - \sqrt{5}$. Одержана крива – гіпербола.

Приклад 16.5. (Метод Лагранжа). Звести до нормального вигляду квадратичну форму $k(\mathbf{x}) = x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$ і виписати відповідне лінійне перетворення.

Оскільки в задачі не ставиться вимога використати саме ортогональне перетворення координат, можна застосувати метод виділення повних квадратів, або ***метод Лагранжа***. Ідея цього методу полягає в тому, щоб виділяти повні квадрати, почавши від квадрату однієї із змінних.

В даній квадратичній формі немає квадрату жодної змінної, тому використаємо наступне перетворення для того, щоб з'явилися квадрати:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Квадратична форма набуде наступного вигляду: $k(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$.

Тепер виділятимемо повні квадрати:

$$k(\mathbf{y}) = \left(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2\right) - y_2^2 - 4y_2y_3 - y_3^2 =$$

$$= \left(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2\right) - \left(y_2^2 + 4y_2y_3 + 4y_3^2\right) + 3y_3^2 = (y_1 - y_3)^2 - (y_2 + 2y_3)^2 + 3y_3^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$, де виконане останнє лінійне перетворення $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 + 2y_3 \\ z_3 = \sqrt{3}y_3 \end{cases}$.

Остаточно маємо лінійне перетворення початкових координат, яке зводить задану квадратичну форму до нормального виду: $\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 + \sqrt{3} z_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} z_3 \end{cases}$

Приклад 16.6. Визначити новий ортонормований базис, в якому задана квадратична форма $k(\mathbf{x})$ набуває канонічного виду та вказати її канонічний вид: $k(\mathbf{x}) = 2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 9(x^2)^2 + 4x^2x^3 + 2(x^3)^2$.

Визначимо матрицю даної квадратичної форми: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. В даному ортонормованому базисі ця матриця визначає самоспряжений оператор. Знайдемо його власні числа та власні вектори. Розв'язуючи характеристичне рівняння, знайдемо власні числа: $|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (2-\lambda)^2(9-\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = (2-\lambda)(1-\lambda)(10-\lambda) = 0$, отже $\lambda \in \{1,2,10\}$. Оскільки всі власні числа різні, то всі власні вектори ортогональні. Нам залишиться лише вибрати серед них вектори одиничної довжини.

Нехай $\lambda_1 = 1$: $(\mathbf{B} - \lambda_1\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, звідки маємо: $x^1 = 2x^2, x^3 = -2x^2$. Ця система визначає один власний вектор, наприклад: $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Оскільки довжина цього вектора рівна 3, то до ортонормованого базису включаємо вектор $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

Нехай далі $\lambda_2 = 2$: $(\mathbf{B} - \lambda_2\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, звідки маємо: $x^1 = x^3, x^2 = 0$. Вибираємо власний вектор, наприклад: $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормуємо цей вектор та визначаємо другий вектор ортонормованого базису: $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Аналогічно для $\lambda_3 = 10$ знаходимо: $(\mathbf{B} - \lambda_3 \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

тобто $x^3 = -x^1, x^2 = -4x^1$. Тоді $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Таким чином, в ортонормованому базисі $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ квадратична форма $k(\mathbf{x})$ набуває канонічного виду: $k(\mathbf{y}) = (y^1)^2 + 2(y^1)^2 + 10(y^1)^2$. Матрицею переходу до цього базису є ортогональна матриця $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$, а координати векторів у початковому та новому базисі пов'язані наступними співвідношеннями: $x^1 = 2/3\, y^1 + 1/\sqrt{2}\, y^2 - 1/3\sqrt{2}\, y^3$, $x^2 = 1/3\, y^1 + 4/3\sqrt{2}\, y^3$, $x^3 = -2/3\, y^1 + 1/\sqrt{2}\, y^2 + 1/3\sqrt{2}\, y^3$.

Завдання для аудиторної роботи.

I.

1) Звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду, зобразити графік кривої і виписати лінійне перетворення яке зводить це рівняння:

а) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;

б) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

в) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 119 = 0$.

2) Звести до нормального вигляду наступні квадратичні форми на множині дійсних чисел:

а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

б) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_2 + x_4x_2 + x_3x_4$.

3) Знайти нормальний вигляд і лінійне перетворення, яке зводить квадратичну форму до цього вигляду:

$x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

4) Звести квадратичну форму $3x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_3^2 + 10x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$ до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами. Виписати як виражаються нові невідомі через старі.

Завдання для домашньої роботи.

1) Звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду, зобразити графік кривої і виписати лінійне перетворення яке зводить це рівняння:

а) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$;

б) $8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28=0$;

в) $9x^2-6xy+y^2-2x+y+1=0$.

2) Звести до нормального вигляду наступні квадратичні форми на множині дійсних чисел:

а) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$.

б) $x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$.

3) Знайти нормальний вигляд і лінійне перетворення, яке зводить квадратичну форму до цього вигляду:

а) $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.

б) $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_4+x_3x_4$.

4) Звести квадратичну форму $\frac{1}{2}x_1^2+2x_2^2+3x_4^2-x_1x_2+x_2x_3-x_4x_3$ до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами. Виписати як виражаються нові невідомі через старі.

Відповіді.

Ауд. І. 1) а) вироджений еліпс: $3x''^2+2y''^2=0$, лінійне перетворення: $x''=x-y-2$, $y''=x+y+2$; б) пара прямих $x'=-\frac{14}{\sqrt{10}}-2y'$, $x'=\sqrt{10}+2y'$, лінійне перетворення: $x'=\frac{3y-x}{\sqrt{10}}$, $y'=\frac{y+3x}{\sqrt{10}}$; в) уявний еліпс $x''^2+2y''^2=-1$, лінійне перетворення $x''=\frac{x-3y+1}{10}$, $y''=\frac{3x+y+3}{10}$. 2) а) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; б) $y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2$. 3) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $y_1=x_1+x_2-2x_3$, $y_2=2x_2+x_3$, $y_3=3x_3$. 4) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $y_1=x_1+x_2-x_3$, $y_2=x_1+3x_2+\frac{1}{2}x_3$, $y_3=\frac{1}{2}x_3$.

Дом. І. 1) а) пара прямих $x'=\frac{1}{\sqrt{2}}+2y'$, $x'=\frac{5}{\sqrt{2}}-2y'$, лінійне перетворення: $x'=\frac{y+x}{\sqrt{2}}$, $y'=\frac{-y+x}{\sqrt{2}}$; б) еліпс $\frac{1}{9}x''^2+\frac{1}{4}y''^2=1$, лінійне перетворення: $x'' = \dfrac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}}$, $y'' = \dfrac{2x + y + 2}{\sqrt{5}}$; в) парабола $x'' = -2\sqrt{10}y''^2$, лінійне перетворення $x'' = \dfrac{-8x + 8y + 15}{\sqrt{10}}$, $y'' = \dfrac{-3x + y + 0,25}{\sqrt{10}}$. 2) а) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; б) $y_1^2 - y_2^2$. 3) а) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = \dfrac{1}{2}y_1 + y_2$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = -y_2 + y_3$; б) $y_1^2 - y_2^2$, $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$. 4) $2y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_4^2$, $y_1 = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2$, $y_2 = \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{6}x_3$, $y_3 = \dfrac{1}{6}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4$, $y_4 = \dfrac{3}{2}x_4$.

Список літератури.

1. Придатченко Ю.В., Львов В.А., Єфіменко С.В. Векторна алгебра та аналітична геометрія. – Видавничо - поліграфічний центр “Київський університет”, 2010. – 96 с.
2. Білоусова В.П. та ін. Аналітична геометрія. – К.: Вища школа, 1973. – 328 с.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.– М.: Наука, 1972.–240с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1981. – 340с.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
7. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Бином, 2005. – 384 с.
8. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 272 с.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1986. – 360 с.

Зміст.