1 Числові границі.

Невизначені границі.

$+\infty-\infty;\ \frac{\infty}{\infty};\ \frac{0}{0};\ 0*\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty.$

Границі, які рахуються швидко.

1)$\frac{const}{0}=\infty;$
2)$\frac{const}{\infty}=0;$
3)$const*\infty=\infty;$
4)$\pm\infty\pm\infty=\pm\infty;$
5)$\infty*\infty=\infty;$
6)$+\infty^{+\infty}=+\infty;$
7)$+\infty^{-\infty}=0;$
8)$(a)^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & \text{якщо } a>1;\\ 0, & \text{якщо } 0<a<1;\\ 1, & \text{якщо } a=1.\end{cases}$
9)$(+\infty)^a=\begin{cases}+\infty, & \text{якщо } a>0;\\ 0, & \text{якщо } a<0.\end{cases}$
10)(обмежена величина) $*0=0.$

$$11)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1n+a_0}{b_mn^m+b_{m-1}n^{m-1}+...+b_1n+b_0}=\begin{cases}\frac{a_k}{b_k}, \text{якщо } k=m;\\ 0, \text{якщо } k<m;\\ \infty, \text{якщо } k>m.\end{cases}$$

Формули, які можуть стати в нагоді:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$$

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt{b^2}}.$$

2 Границі для функцій.

Для обчислення $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ основне правило: СПЕРШУ ПРОСТО ПІДСТАВЛЯЄМО В ФУНКЦІЮ ТОЧКУ a і дивимось що з цього отримуємо, якщо це одна з невизначених границь, тоді починаємо робити якісь перетворення.

Серед перетворень, що допомагають обчислити границю є

1)**Заміна змінної** : вводимо нову змінну $t=x-a$ і підставляємо в функцію, після спрощення виразу отримуємо функцію, в яку підставляючи $t\to 0$, отримуємо відповідь.

2)**Табличка асимптотичних наближень** :ми можемо деякі функції замінити на еквівалентні їй. $f\sim g, x\to 0$

sinx	x
tgx	x
cosx	$1-\frac{x^2}{2}$
arcsinx	x
e^x	1+x
$\ln(x+1)$	x
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha*x$

3)**Теорема Лапіталля** Якщо

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}\{\frac{0}{0}\}$

2)існують похідні $f\prime(x), g\prime(x)$ і існує границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}=A$, тоді

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}=A.$

4)**Формула Тейлора.**

1.$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$

2.$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2});$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n);$
5. $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2!} + \frac{a(a-1)(a-2)x^3}{3!} + ... + \frac{a(a-1)...(a-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$

5)**Обчислюємо**1^∞. Переходимо до $e^{\text{степінь}}$.

Приклад 1 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{sinx - sin2}{x-2} = |\text{заміна } t = x-2| = \lim\limits_{t\to 0} \frac{sin(t+2)-sin2}{t} = |\text{Лапіталь}| = \lim\limits_{t\to 0} \frac{cos(t+2)}{1} = cos2.$

Приклад 2 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^2]{cosx}$.

Переходимо до $e^{\text{степінь}}$. $\lim\limits_{x\to 0}(cosx)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln cosx}$. *Тепер працюємо окремо зі степенем* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln cosx$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln cosx}{x^2} = |\frac{0}{0}\text{Лапіталь}| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-sinx}{cosx}}{2x} = |\text{замінимо за асимптотичною табличкою } sinx \text{ на } x| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{2xcosx} = -\frac{1}{2}$. *Тоді* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{cosx} = e^{-\frac{1}{2}}$.

Можна було і одразу в логарифмі натуральному використати одразу асимптотичну табличку два рази, спочатку для cos, а потім для ln. А саме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln cosx}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\frac{x^2}{2})}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Приклад 3 *Обчислити* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{100}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = |\text{Лапіталь}| = \frac{100x^{99}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = |\text{Лапіталь}| = ... = \frac{100!}{e^x} = 0.$

Приклад 4 *Обчислити* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(sinx)+ln(1-x+\frac{x^3}{3})-\frac{x^2}{2}}{\sqrt[8]{1+x^3}-1}$.

Підставляємо 0 в чисельник і знаменник і отримуємо $\frac{0}{0}$. *Асимптотична табличка нам тут не допоможе оскільки повинні враховуватись усі степені 3-тього порядку у чисельнику, а табличка нам їх не дасть. Брати похідні з такими функціями в чисельнику і знаменнику не дуже продуктивно, прогнозую, що Лапіталь нам не допоможе.*

Залишається многочлени Тейлора. Випишемо їх окремо для чисельника і для знаменника. Навіть використовуючи табличку для знаменника можна записати $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[8]{1+x^3} - 1 = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \frac{1}{8}x^3 - 1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{8}x^3$.

Для чисельника використовуючи формули 2. і 4. маємо $\lim\limits_{x\to 0} sin(sinx) + ln(1-x+\frac{x^3}{3}) - \frac{x^2}{2} = \lim\limits_{x\to 0} sin(x - \frac{x^3}{6}) - x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}(-x+\frac{x^3}{3})^2 + \frac{1}{3}(-x+\frac{x^3}{3})^3 - \frac{x^2}{2} = \lim\limits_{x\to 0}(x-\frac{x^3}{6}) - \frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{6} - x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}(-x+\frac{x^3}{3})^2 + \frac{1}{3}(-x+\frac{x^3}{3})^3 - \frac{x^2}{2} =$ $|\text{помічаємо що найменша тут степінь яка залишається і не скорочується це} x^3| = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^3}{3}$.

Тому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(sinx)+ln(1-x+\frac{x^3}{3})}{\sqrt[8]{1+x^3}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{8}} = -\frac{8}{3}$.