

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
І МОДУЛЬ

1 рівень

КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ ЗА КОЖНУ З ЗАДАЧ
(ДЛЯ ВАРІАНТІВ 1-21)

- 1** а) 1 бал;
б) $1/2$ бали;
в) $1/2$ бали;
г) $3/2$ бали.
- 2** а) $1/2$ бали;
б) $1/2$ бали;
в) $1/2$ бали;
г) $1/2$ бали.
- 3** а) $1/2$ бали;
б) $1/2$ бали;
в) $1/2$ бали;
г) 1 бал.
- 4** а) $1/2$ бали;
б) $1/2$ бали;
в) 1 бали.

ВАРІАНТ 1.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{1, -1, 4\}$, $\vec{b} = \{1, 3, -1\}$, $\vec{c} = \{2, 1, 1\}$, $\vec{d} = \{-3, 4, -2\}$.
Знайти

а) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}, \vec{d}) + \vec{b}(2\vec{a} - \vec{d}, \vec{c}) + \vec{c}|\vec{b} + \vec{c}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{c} - 2\vec{d})$;

в) $\angle(\vec{a}, \vec{c})$;

- г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

- 2** Нехай $\vec{a} = \{-1, -1, \lambda\}$, $\vec{b} = \{1, 3, 1\}$, $\vec{c} = \{2, 1, 1\}$. Знайти

а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = 4$;

- б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

- в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

- г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, який побудовано на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 3$.

- 3** Нехай $\vec{a} = \{1, -1, 4\}$, $\gamma : \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+6}{1}$, $\alpha : 3x - 4y + 2z - 1 = 0$, $M(1, -1, 3)$, $N(1, -2, 1)$. Знайти

- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

- б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;

- в) знайти проекцію точки M на площину α ;

- г) знайти проекцію прямої γ на площину α

- 4** Задано площини $\alpha_1 : -2x + y - 6z + 6 = 0$, $\alpha_2 : 14x - 7y + 42z - 44 = 0$, $\alpha_3 : 7x + y - 2 = 0$, і точка $A(2, -3, -2)$. Знайти

- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?

- б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

- в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 2.

- 1) Нехай $\vec{a} = \{-1, 1, 4\}$, $\vec{b} = \{5, 4, -1\}$, $\vec{c} = \{-3, -2, 2\}$, $\vec{d} = \{2, -3, -2\}$. Знайти
- а) $\vec{b}(\vec{a} + \vec{c}, \vec{d}) + \vec{c}(3\vec{c} - \vec{b}, \vec{d}) + \vec{a}|3\vec{a} + \vec{d}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{c} - 3\vec{a})$;
 - в) $\angle(\vec{b}, \vec{c})$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2) Нехай $\vec{a} = \{-1, 4, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-4, -1, 1\}$, $\vec{c} = \{-1, -2, 4\}$. Знайти
- а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = -3$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = -6$.
- 3) Нехай $\vec{a} = \{1, 3, -4\}$, $\gamma: \frac{x+6}{1} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z}{-2}$, $\alpha: x+5y-7z+2=0$, $M(2, -4, 0)$, $N(-2, -6, 1)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4) Задано площини $\alpha_1: 5y - 5z + 7 = 0$, $\alpha_2: -10y + 10z - 18 = 0$, $\alpha_3: 6x + 2y + 2z - 3 = 0$, і точка $A(4, -1, 7)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 3.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{3, 2, -2\}$, $\vec{b} = \{2, -4, -2\}$, $\vec{c} = \{-1, 3, 1\}$, $\vec{d} = \{6, -1, -4\}$. Знайти
- а) $\vec{a} \left(3\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} \right) + \vec{c} \left(\vec{d} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{a} \right) + \vec{b} \left| 2\vec{b} - \vec{d} \right|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{c}} \left(2\vec{a} - 3\vec{b} \right)$;
 - в) $\angle \left(\vec{c}, \vec{d} \right)$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{-5, -4, \lambda\}$, $\vec{b} = \{1, -1, -5\}$, $\vec{c} = \{3, 2, -3\}$. Знайти
- а) знайти $\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$, коли $\lambda = -4$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 2$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{-3, 3, 1\}$, $\gamma : \frac{x+5}{-2} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-7}{4}$, $\alpha : -4x + 4y - 3z - 2 = 0$, $M(-4, 1, -3)$, $N(6, 1, 3)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : -2x + 6y - 5z - 6 = 0$, $\alpha_2 : 8x - 24y + 20z + 19 = 0$, $\alpha_3 : y - 3z - 6 = 0$, і точка $A(5, 6, 2)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 4.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{6, 5, -5\}$, $\vec{b} = \{-1, -6, 2\}$, $\vec{c} = \{4, 5, -4\}$, $\vec{d} = \{1, 2, 1\}$. Знайти
- а) $\vec{c} \left(2\vec{a} + \vec{d}, 3\vec{c} - \vec{d} \right) + \vec{a} \left(\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{c} - \vec{a} \right) + \vec{b} \left| 3\vec{b} - \vec{c} \right|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{d}} \left(3\vec{a} - 2\vec{d} \right)$;
 - в) $\angle \left(\vec{b}, \vec{c} \right)$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{5, -2, \lambda\}$, $\vec{b} = \{3, -3, 5\}$, $\vec{c} = \{-4, 5, -6\}$. Знайти
- а) знайти $\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$, коли $\lambda = 5$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 4$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{-5, 3, -4\}$, $\gamma : \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+3}{2}$, $\alpha : 5x - 5y + z + 3 = 0$, $M(-4, 4, 5)$, $N(-4, 3, 5)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : x - 6y + 3z + 1 = 0$, $\alpha_2 : -3x + 18y - 9z - 1 = 0$, $\alpha_3 : 3x - 5y - 2z - 3 = 0$, і точка $A(-2, 3, 4)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 5.

- 1 Нехай $\vec{a} = \{3, -2, -4\}$, $\vec{b} = \{-2, 3, 3\}$, $\vec{c} = \{1, 6, 2\}$, $\vec{d} = \{-3, 1, 3\}$.
Знайти

а) $\vec{b}(\vec{c} - \vec{d}, \vec{a}) + \vec{a}(2\vec{c} - 3\vec{a}, \vec{b} + \vec{d}) + \vec{c}|2\vec{c} - \vec{a}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{a}+\vec{b}}(3\vec{c} - 2\vec{d})$;

в) $\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} + \vec{d})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

- 2 Нехай $\vec{a} = \{1, 7, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-7, -3, 1\}$, $\vec{c} = \{6, 7, -1\}$. Знайти

а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = -5$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = -1$.

- 3 Нехай $\vec{a} = \{-2, 0, -7\}$, $\gamma: \frac{x+4}{7} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{5}$, $\alpha: -2x + 5y - z - 3 = 0$, $M(4, 0, 2)$, $N(4, -3, -3)$. Знайти

а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;

в) знайти проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

- 4 Задано площини $\alpha_1: x - 6y - 5 = 0$, $\alpha_2: -2x + 12y + 8 = 0$, $\alpha_3: -2x - 4y + z - 6 = 0$, і точка $A(2, -5, -6)$. Знайти

а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?

б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 6.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{-3, -1, -4\}$, $\vec{b} = \{-5, -1, -5\}$, $\vec{c} = \{2, -6, -4\}$,
 $\vec{d} = \{3, -4, 4\}$. Знайти
- а) $\vec{c}(\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}) + \vec{d}(2\vec{c} - \vec{b}, \vec{a}) + \vec{b}|\vec{a} + \vec{d}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{c}}(\vec{a} - 2\vec{b})$;
 - в) $\angle(\vec{b}, \vec{c})$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{-3, 3, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-1, 1, -2\}$, $\vec{c} = \{6, 1, -7\}$. Знайти
- а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = 2$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = -5$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{-4, -1, -3\}$, $\gamma : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3}$, $\alpha : 6x + y - 3z + 1 = 0$, $M(5, 1, 5)$, $N(5, 5, 7)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : 2x + y + 4z + 1$, $\alpha_2 : -2x - y - 4z - 7 = 0$,
 $\alpha_3 : -4x - 2y + 5z - 5 = 0$, і точка $A(6, -5, 2)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 7.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{6, -4, 2\}$, $\vec{b} = \{-3, 2, -5\}$, $\vec{c} = \{7, -2, -3\}$, $\vec{d} = \{-2, -2, 7\}$. Знайти
- а) $\vec{d}(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) + \vec{a}(3\vec{a} - \vec{d}, \vec{b}) + \vec{c}|3\vec{c} + \vec{b}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{d}}(\vec{a} - 3\vec{c})$;
 - в) $\angle(\vec{a}, \vec{d})$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{-1, -3, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-2, -5, 2\}$, $\vec{c} = \{-3, 6, 4\}$. Знайти
- а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = -3$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 1$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{1, -1, -2\}$, $\gamma : \frac{x+3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+7}{-3}$, $\alpha : -3x - y - 5z + 2 = 0$, $M(-1, -1, 1)$, $N(6, 0, -7)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : -x - 3y - 7 = 0$, $\alpha_2 : -2x - 6y - 16 = 0$, $\alpha_3 : x - 7y + 4z - 7 = 0$, і точка $A(2, -1, -3)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 8.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{-2, -1, 2\}$, $\vec{b} = \{-1, 2, -7\}$, $\vec{c} = \{-4, -3, 4\}$, $\vec{d} = \{6, 2, 1\}$. Знайти
- а) $\vec{c} \left(3\vec{d} - \vec{c}, \vec{a} \right) + \vec{a} \left(\vec{b} - \vec{d}, \vec{a} - \vec{c} \right) + \vec{d} \left| 2\vec{d} - \vec{b} \right|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{a}} \left(2\vec{c} - 3\vec{d} \right)$;
 - в) $\angle \left(\vec{a}, \vec{b} \right)$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{7, -6, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-7, 4, 1\}$, $\vec{c} = \{2, 2, -4\}$. Знайти
- а) знайти $\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$, коли $\lambda = 5$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 2$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{-6, -7, 4\}$, $\gamma : \frac{x-6}{-5} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-2}{1}$, $\alpha : 4x - 2y - 2 = 0$, $M(2, 5, -5)$, $N(-4, 7, -7)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : -6x + 7z - 3 = 0$, $\alpha_2 : 24x - 28z + 15 = 0$, $\alpha_3 : x + y + 6z - 5 = 0$, і точка $A(-3, -3, -1)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 9.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{-3, -2, -2\}$, $\vec{b} = \{-4, -3, -2\}$, $\vec{c} = \{5, -2, -1\}$,
 $\vec{d} = \{1, 1, 5\}$. Знайти
- а) $\vec{a} (2\vec{c} + \vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c} (\vec{d} - \vec{a}, 2\vec{a} - \vec{c}) + \vec{d} |3\vec{d} - \vec{a}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{b}}(3\vec{c} - 2\beta)$;
 - в) $\angle(\vec{a}, \vec{d})$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{5, -1, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-3, 4, 2\}$, $\vec{c} = \{6, 1, 7\}$. Знайти
- а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = -2$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 4$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{0, -1, 6\}$, $\gamma : \frac{x-7}{-4} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{4}$, $\alpha : -2x + 3y - 4z - 1 = 0$, $M(-1, 0, -3)$, $N(2, -3, -7)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : 6x - 4y + 5 = 0$, $\alpha_2 : -6x + 4y - 7 = 0$,
 $\alpha_3 : -x + 4y + 6z - 4 = 0$, і точка $A(2, 1, -4)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 10.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{-6, 2, 1\}$, $\vec{b} = \{5, 2, -7\}$, $\vec{c} = \{-3, 3, -3\}$, $\vec{d} = \{3, -2, 3\}$. Знайти
- а) $\vec{d}(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}) + \vec{c}(2\vec{a} - 3\vec{c}, \vec{d} + \vec{b}) + \vec{a}|2\vec{a} - \vec{c}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{c} + \vec{d}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$;
 - в) $\angle(\vec{c} + \vec{d}, \vec{a} + \vec{d})$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{-6, -2, \lambda\}$, $\vec{b} = \{1, 5, -4\}$, $\vec{c} = \{-2, 1, -1\}$. Знайти
- а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = 5$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 1$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{-5, -2, -1\}$, $\gamma : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+7}{2}$, $\alpha : 4x - 5y - 6z + 3 = 0$, $M(5, 2, 2)$, $N(5, 1, -5)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : x - 6y - 2z + 3 = 0$, $\alpha_2 : -4x + 24y + 8z - 9 = 0$, $\alpha_3 : -4x + y - 5z + 3 = 0$, і точка $A(-3, 4, 1)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 11.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{6, 5, 7\}$, $\vec{b} = \{-2, -5, -1\}$, $\vec{c} = \{-2, 2, -2\}$, $\vec{d} = \{-4, 2, -3\}$. Знайти
- $\vec{b}(\vec{a} + \vec{d}, \vec{c}) + \vec{a}(2\vec{b} - \vec{c}, \vec{d}) + \vec{d}|\vec{a} + \vec{d}|^2$;
 - $\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{d} - 2\vec{c})$;
 - $\angle(\vec{b}, \vec{d})$;
 - чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{-3, -1, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-2, -1, 3\}$, $\vec{c} = \{-4, -3, -2\}$. Знайти
- знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = 4$;
 - при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = -7$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{-2, 1, -6\}$, $\gamma : \frac{x+1}{-7} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{-7}$, $\alpha : 4x + 4y + 7z - 3 = 0$, $M(5, -4, 2)$, $N(-3, 6, -4)$. Знайти
- скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - знайти проекцію точки M на площину α ;
 - знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : -5y + z + 6 = 0$, $\alpha_2 : -25y + 5z + 24 = 0$, $\alpha_3 : x - 3y - 6z + 3 = 0$, і точка $A(6, -1, -4)$. Знайти
- відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 12.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{6, 4, -3\}$, $\vec{b} = \{4, -2, -1\}$, $\vec{c} = \{-4, -1, 2\}$, $\vec{d} = \{1, -2, 1\}$. Знайти
- а) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{d}, \vec{c}) + \vec{d}(3\vec{d} - \vec{a}, \vec{c}) + \vec{c}|3\vec{b} + \vec{c}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{d} - 3\vec{b})$;
 - в) $\angle(\vec{a}, \vec{d})$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{1, 6, \lambda\}$, $\vec{b} = \{4, 3, -1\}$, $\vec{c} = \{-4, -2, 1\}$. Знайти
- а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = -3$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 2$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{-6, -2, 1\}$, $\gamma : \frac{x-6}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+7}{4}$, $\alpha : 3x + 2y + 3z - 4 = 0$, $M(0, 3, -2)$, $N(1, -1, -5)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : -3x + 3y + 2z + 1 = 0$, $\alpha_2 : 6x - 6y - 4z - 8 = 0$, $\alpha_3 : -4x - 4y + 4z + 1 = 0$, і точка $A(6, -2, 0)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 13.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{-2, 1, -2\}$, $\vec{b} = \{-4, 1, -5\}$, $\vec{c} = \{-2, -3, -7\}$, $\vec{d} = \{-2, -4, -11\}$. Знайти
- а) $\vec{b} \left(3\vec{a} - \vec{b}, \vec{d} \right) + \vec{d} \left(\vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{b} \right) + \vec{c} |2\vec{a} - \vec{c}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{d}} \left(2\vec{b} - 3\vec{a} \right)$;
 - в) $\angle \left(\vec{a}, \vec{d} \right)$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{7, 1, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-1, 5, -1\}$, $\vec{c} = \{1, 5, -2\}$. Знайти
- а) знайти $\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$, коли $\lambda = 2$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = -3$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{-1, -5, 2\}$, $\gamma : \frac{x+2}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{2}$, $\alpha : -6x - 5y + 6z + 4 = 0$, $M(-2, 7, -1)$, $N(4, -1, 0)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : 6x + y - z - 3 = 0$, $\alpha_2 : -6x - y + z + 5 = 0$, $\alpha_3 : 7x + z - 4 = 0$, і точка $A(-2, 2, 1)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 14.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{4, -3, 1\}$, $\vec{b} = \{3, 2, 3\}$, $\vec{c} = \{-6, 3, -2\}$, $\vec{d} = \{1, 5, 4\}$.
Знайти
- а) $\vec{d} \left(2\vec{b} + \vec{c}, 3\vec{d} - \vec{c} \right) + \vec{b} \left(\vec{a} - \vec{d}, 2\vec{d} - \vec{b} \right) + \vec{a} \left| 3\vec{a} - \vec{d} \right|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{c}} \left(3\vec{b} - 2\vec{c} \right)$;
 - в) $\angle \left(\vec{a}, \vec{c} \right)$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{-5, -4, \lambda\}$, $\vec{b} = \{1, 4, -2\}$, $\vec{c} = \{3, -4, 5\}$. Знайти
- а) знайти $\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$, коли $\lambda = -4$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 1$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{1, 4, 1\}$, $\gamma : \frac{x-3}{-4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+4}{1}$, $\alpha : -2x - 3y - 4z + 2 = 0$, $M(-2, 1, 0)$, $N(-3, 1, -3)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : -2x + 3y - 2z - 6 = 0$, $\alpha_2 : -8x + 12y - 8z - 30 = 0$, $\alpha_3 : -x + y + 4z - 5 = 0$, і точка $A(6, 4, -2)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 15.

- 1 Нехай $\vec{a} = \{5, -3, 3\}$, $\vec{b} = \{7, -1, 2\}$, $\vec{c} = \{3, -1, 5\}$, $\vec{d} = \{-2, -4, -2\}$.
Знайти

а) $\vec{b}(\vec{a} + \vec{d}, \vec{c}) + \vec{a}(2\vec{b} - \vec{c}, \vec{d}) + \vec{c}|\vec{a} + \vec{d}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{d} - 2\vec{c})$;

в) $\angle(\vec{b}, \vec{c})$;

- г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

- 2 Нехай $\vec{a} = \{-2, 3, \lambda\}$, $\vec{b} = \{4, -1, 4\}$, $\vec{c} = \{-5, -2, -7\}$. Знайти

а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = -3$;

- б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

- в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

- г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = -1$.

- 3 Нехай $\vec{a} = \{-5, 1, -7\}$, $\gamma : \frac{x+5}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-4}$, $\alpha : 6x - 7y - 2z + 3 = 0$, $M(5, -4, 4)$, $N(2, -2, 2)$. Знайти

- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

- б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;

- в) знайти проекцію точки M на площину α ;

- г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

- 4 Задано площини $\alpha_1 : -4y + 3z - 3 = 0$, $\alpha_2 : -8y + 6z - 5 = 0$, $\alpha_3 : 2x - y + 2z + 6 = 0$, і точка $A(-1, -5, 1)$. Знайти

- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?

- б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

- в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 16.

- 1 Нехай $\vec{a} = \{-2, 3, -2\}$, $\vec{b} = \{1, 1, 1\}$, $\vec{c} = \{2, 3, -3\}$, $\vec{d} = \{-3, 1, -3\}$.
Знайти

а) $\vec{a}(\vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{d}) + \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{d} - \vec{a}) + \vec{b}|\vec{b} + \vec{d} - \vec{c}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{c}}(2\vec{a} - \vec{b})$;

в) $\angle(\vec{c}, \vec{d})$;

- г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

- 2 Нехай $\vec{a} = \{-1, -5, \lambda\}$, $\vec{b} = \{7, -6, -4\}$, $\vec{c} = \{5, -1, -3\}$. Знайти

а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = 0$;

- б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

- в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

- г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 2$.

- 3 Нехай $\vec{a} = \{-4, 1, 7\}$, $\gamma : \frac{x-3}{-5} = \frac{y}{-1} = \frac{z+5}{1}$, $\alpha : -2x + y - 3z - 1 = 0$, $M(1, 3, -4)$, $N(3, -5, 0)$. Знайти

- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

- б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;

- в) знайти проекцію точки M на площину α ;

- г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

- 4 Задано площини $\alpha_1 : 7x - y + z - 2 = 0$, $\alpha_2 : 14x - 2y + 2z + 3 = 0$, $\alpha_3 : -x + 4y + 3z - 7 = 0$, і точка $A(-5, 1, 1)$. Знайти

- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?

- б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

- в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 17.

1 Нехай $\vec{a} = \{1, 0, 2\}$, $\vec{b} = \{1, -1, -1\}$, $\vec{c} = \{1, 1, -3\}$, $\vec{d} = \{1, 3, -2\}$.
Знайти

а) $\vec{c}(\vec{b} - \vec{c}, \vec{b} + \vec{d}) + \vec{b}(\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}, \vec{d} - \vec{a}) + \vec{d}|\vec{d} - \vec{c}|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{d}}(\vec{a} - 3\vec{b})$;

в) $\angle(\vec{d}, \vec{b})$;

г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

2 Нехай $\vec{a} = \{3, -6, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-1, 1, 1\}$, $\vec{c} = \{2, 0, 4\}$. Знайти

а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = -2$;

б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 0$.

3 Нехай $\vec{a} = \{2, -1, 6\}$, $\gamma : \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+6}{-1}$, $\alpha : 2x - 7y + 2 = 0$, $M(0, -3, -1)$, $N(2, -3, 5)$. Знайти

а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;

в) знайти проекцію точки M на площину α ;

г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

4 Задано площини $\alpha_1 : -x + 5y - 2z + 3 = 0$, $\alpha_2 : 3x - 15y + 6z + 4 = 0$, $\alpha_3 : -4x - y + 3z + 9 = 0$, і точка $A(4, 0, 2)$. Знайти

а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?

б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 18.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{-3, 1, -2\}$, $\vec{b} = \{-3, -2, 0\}$, $\vec{c} = \{-1, -1, 0\}$, $\vec{d} = \{-2, -3, 3\}$. Знайти
- а) $\vec{a}(\vec{b} - \vec{d}, 3\vec{a} + 2\vec{d}) + \vec{d}(\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{c} - \vec{a}) + \vec{c}|\vec{a} - 3\vec{c}|^2$;
 - б) $\text{Pr}_{\vec{a}}(3\vec{d} + \vec{c})$;
 - в) $\angle(\vec{b}, \vec{a} + \vec{c})$;
 - г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{1, 2, \lambda\}$, $\vec{b} = \{5, -1, 0\}$, $\vec{c} = \{-2, 1, -2\}$. Знайти
- а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = -4$;
 - б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
 - в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
 - г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = -2$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{-5, 1, 1\}$, $\gamma : \frac{x-2}{-6} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-6}{3}$, $\alpha : 2x + 4y + z - 1 = 0$, $M(6, 7, -1)$, $N(-3, -1, -5)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
 - б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
 - в) знайти проекцію точки M на площину α ;
 - г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1 : -3x + 2y - 4z + 2 = 0$, $\alpha_2 : 6x - 4y + 8z = 0$, $\alpha_3 : -3x - y + 5z - 7 = 0$, і точка $A(-7, -4, 2)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
 - б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
 - в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 19.

- 1 Нехай $\vec{a} = \{0, 3, 1\}$, $\vec{b} = \{-1, 0, -1\}$, $\vec{c} = \{2, 3, -1\}$, $\vec{d} = \{1, 1, 0\}$.
Знайти

а) $\vec{c} \left(2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{d} - \vec{c} \right) + \vec{a} \left(2\vec{b} - 3\vec{c}, 2\vec{a} - \vec{c} \right) + \vec{d} \left| \vec{d} - \vec{a} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{b}} \left(\vec{a} + 2\vec{d} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{c}, \vec{b} + \vec{c} \right)$;

- г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

- 2 Нехай $\vec{a} = \{6, -1, \lambda\}$, $\vec{b} = \{3, -6, 4\}$, $\vec{c} = \{0, -5, 2\}$. Знайти

а) знайти $\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$, коли $\lambda = 4$;

- б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

- в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

- г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 6$.

- 3 Нехай $\vec{a} = \{-6, 3, 1\}$, $\gamma : \frac{x+6}{5} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{1}$, $\alpha : x - 6y + 4z - 3 = 0$, $M(5, 2, -6)$, $N(4, 6, 5)$. Знайти

- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

- б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;

- в) знайти проекцію точки M на площину α ;

- г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

- 4 Задано площини $\alpha_1 : 9x + y - z + 3 = 0$, $\alpha_2 : 36x + 4y - 4z - 3 = 0$, $\alpha_3 : -3x - 4y + z - 2 = 0$, і точка $A(1, 1, -8)$. Знайти

- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?

- б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

- в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 20.

- 1 Нехай $\vec{a} = \{-2, 3, 3\}$, $\vec{b} = \{-3, 1, 1\}$, $\vec{c} = \{-2, 0, 1\}$, $\vec{d} = \{-1, -2, -3\}$.
Знайти

а) $\vec{b} \left(2\vec{c} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{a} \right) + \vec{d} \left(2\vec{b} - \vec{a}, 2\vec{a} - \vec{c} \right) + \vec{c} \left| \vec{b} - \vec{c} \right|^2$;

б) $\text{Pr}_{\vec{c}} \left(\vec{d} - 2\vec{a} \right)$;

в) $\angle \left(\vec{d}, \vec{a} + \vec{c} \right)$;

- г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

- 2 Нехай $\vec{a} = \{6, -1, \lambda\}$, $\vec{b} = \{-7, -1, 3\}$, $\vec{c} = \{1, -2, 3\}$. Знайти

а) знайти $\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$, коли $\lambda = -1$;

- б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;

- в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

- г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 1$.

- 3 Нехай $\vec{a} = \{-2, -1, 5\}$, $\gamma : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{3}$, $\alpha : 3x + 7y + 3z - 2 = 0$, $M(-3, -5, 4)$, $N(1, -5, -4)$. Знайти

- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;

- б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;

- в) знайти проекцію точки M на площину α ;

- г) знайти проекцію прямої γ на площину α .

- 4 Задано площини $\alpha_1 : -2x + 10y - 2z + 1 = 0$, $\alpha_2 : x - 5y - z - 5 = 0$, $\alpha_3 : 3x + 5y - z + 3 = 0$, і точка $A(-2, -4, -1)$. Знайти

- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?

- б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;

- в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

ВАРІАНТ 21.

- 1** Нехай $\vec{a} = \{3, 1, 3\}$, $\vec{b} = \{2, 1, -3\}$, $\vec{c} = \{0, -1, 2\}$, $\vec{d} = \{-1, 2, 1\}$.
Знайти
- а) $\vec{a}(\vec{c} + 2\vec{d}, 2\vec{a} - 3\vec{c}) + \vec{c}(2\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{a} - \vec{c}) + \vec{d}|\vec{d} - \vec{c}|^2$;
- б) $\text{Pr}_{\vec{c}}(2\vec{b} - \vec{a})$;
- в) $\angle(\vec{b}, \vec{c} - \vec{d})$;
- г) чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора \vec{d} в цьому базисі.
- 2** Нехай $\vec{a} = \{-1, 6, \lambda\}$, $\vec{b} = \{2, 2, -1\}$, $\vec{c} = \{-4, -5, 0\}$. Знайти
- а) знайти $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$, коли $\lambda = 5$;
- б) при яких значеннях параметрів α , λ вектори \vec{a} і $\alpha\vec{b} + \vec{c}$ колінеарні;
- в) при яких значеннях параметра λ вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;
- г) знайти об'єм паралелепіпеда і об'єм тетраедра, які побудовані на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , коли $\lambda = 7$.
- 3** Нехай $\vec{a} = \{0, -4, 3\}$, $\gamma: \frac{x+6}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+3}{-2}$, $\alpha: -5x + 5y + z - 1 = 0$, $M(1, -4, 1)$, $N(7, -2, 0)$. Знайти
- а) скласти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ ;
- б) знайти проекцію точки N на пряму γ ;
- в) знайти проекцію точки M на площину α ;
- г) знайти проекцію прямої γ на площину α .
- 4** Задано площини $\alpha_1: -2x + 4y - 2z + 5 = 0$, $\alpha_2: -4x + 8y - 4z - 5 = 0$, $\alpha_3: x - 5y + 5z + 1 = 0$, і точка $A(-2, 0, 10)$. Знайти
- а) відстань точки A від α_1 . Чи лежать точка A і початок координат в одному півпросторі відносно α_1 чи в різних?
- б) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними і знайти відстань між ними;
- в) скласти рівняння площини, яка ділить навпіл двогранний кут між площинами α_1 і α_3 .

2 рівень

ВАРІАНТ 22.

- 1 Довести, що система векторів, яка містить два однакових вектора є лінійно залежною. Чи може бути лінійно залежною система, яка складається з одного вектора? [2]
- 2 Записати рівняння площини $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v$ в вигляді $(\vec{r}, \vec{n}) = D$. [3]

3 Довести тотожність: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}$. [5]

ВАРІАНТ 23.

- 1 Довжини базисних векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 загальної декартової системи координат на площині дорівнюють відповідно 4 і 2, а кут між базисними векторами дорівнює $2\pi/3$. Відносно цієї системи координат задані вершини трикутника $A(-2, 2)$, $B(-2, -1)$, $C(-1, 0)$. Знайти довжини сторін і кути трикутника. [4]
- 2 Знайти відстань між двома паралельними прямими $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}t$. [2]
- 3 Знайти множину точок площини, відношення відстаней від яких до двох перетинних прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ є постійна величина $k > 0$. [4]

ВАРІАНТ 24.

- 1 Три точки $A(\vec{r}_1)$, $B(\vec{r}_2)$ і $C(\vec{r}_3)$ не лежать на одній прямій і є послідовними вершинами паралелограма. Знайти координати четвертої вершини D цього паралелограма. [2]
- 2 Скласти рівняння прямої, яка перетинає дві мимобіжні прямі $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2t$ під прямим кутом (спільного перпендикуляра до цих прямих). [5]
- 3 Довести, якщо $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, то вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} компланарні [3]

ВАРІАНТ 25.

- 1 Довести, що радіус-вектор центра правильного багатокутника є середнє арифметичнє радіус-векторів його вершин. [2]
- 2 Задана пряма $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ і площина $(\vec{r}, \vec{n}) = D$. При якій необхідній і достатній умові
- а) вони перетинаються в єдиній точці;
 - б) паралельні (не мають спільних точок);
 - в) пряма лежить в площині. [4]
- 3 Довести тотожність $\left([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}] \right) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$. [4]

ВАРІАНТ 26.

- 1 В тетраедрі $OABC$ точки K, L, M, N, P, Q — середини ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC відповідно, S — точка перетину медіан трикутника ABC . Приймаючи за базисні вектори \vec{OA}, \vec{OB} і \vec{OC} , знайти в цьому базисі координати векторів
- а) $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$;
 - б) $\vec{KL}, \vec{PQ}, \vec{NC}, \vec{MP}, \vec{KQ}$;
 - в) \vec{OS}, \vec{KS} . [2]
- 2 Скласти рівняння проєкції прямої $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, яка не перпендикулярна площині $(\vec{r}, \vec{n}) = D$, на цю площину. [4]
- 3 Довести тотожність $\vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + \vec{b}(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d}) + \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$. [4]

ВАРІАНТ 27.

- 1 Довести, що для довільних трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і довільних трьох чисел α, β і γ вектори $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$ і $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ лінійно залежні.

[2]

- 2 Задана точка M_0 з радіус-вектором \vec{r}_0 і пряма $\gamma : (\vec{r}, \vec{n}) = D$.
Знайти радіус-вектори

а) проєкції точки M_0 на пряму γ ;

б) точки M_1 , яка симетрична точці M_0 відносно γ . [3]

- 3 Довести тотожність:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{x}) & (\vec{b}, \vec{x}) & (\vec{c}, \vec{x}) \\ (\vec{a}, \vec{y}) & (\vec{b}, \vec{y}) & (\vec{c}, \vec{y}) \\ (\vec{a}, \vec{z}) & (\vec{b}, \vec{z}) & (\vec{c}, \vec{z}) \end{vmatrix}. \quad [5]$$

ВАРІАНТ 28.

- 1 Довжини базисних векторів \vec{e}_1, \vec{e}_2 і \vec{e}_3 загальної декартової системи координат в просторі дорівнюють відповідно 3, $\sqrt{2}$ і 4, а кути між базисними векторами дорівнюють $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \pi/4, \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \pi/3$. Обчислити довжини сторін і кути паралелограма, побудованого на векторах, які мають в цьому базисі координати $\{1, -3, 0\}$ і $\{-1, 2, 1\}$. [4]

- 2 Знайти необхідну і достатню умову того, що прямі $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$

а) перетинаються в єдиній точці;

б) паралельні, але не збігаються;

в) збігаються. [4]

- 3 Довести тотожність: $\left| [\vec{a}, \vec{b}] \right|^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix}. \quad [2]$

ВАРІАНТ 29.

- 1** Знаючи радіус-вектори $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ вершин A, B, D, A_1 паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, виразити через них радіус-вектори інших вершин. **[2]**
- 2** Задана пряма $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ і площина $(\vec{r}, \vec{n}) = D$, які не паралельні між собою. Точка M лежить на прямій і віддалена від площини на відстань ρ . Знайти радіус-вектор точки M . **[4]**
- 3** Довести, якщо вектори $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$ і $[\vec{c}, \vec{a}]$ компланарні, то вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} компланарні. **[4]**

ВАРІАНТ 30.

- 1** Знайти суму ортогональних проєкцій вектора \vec{a} на сторони правильного трикутника. **[2]**
- 2** Знайти необхідну і достатню умову того, що площини $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1$ і $(\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$
- а) перетинаються по прямій;
 - б) паралельні, але не збігаються;
 - в) збігаються. **[3]**

- 3** Довести тотожність $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) [\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a}, \vec{x}) & (\vec{b}, \vec{x}) & (\vec{c}, \vec{x}) \\ (\vec{a}, \vec{y}) & (\vec{b}, \vec{y}) & (\vec{c}, \vec{y}) \end{vmatrix}$.
- [5]**

ВАРІАНТ 31.

- 1** З однієї точки простору відкладено три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Довести, що кінець вектора \vec{c} тоді і тільки тоді лежить на відрізку, який з'єднує кінці векторів \vec{a} і \vec{b} , коли виконана рівність $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, де $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. В якому відношенні кінець вектора \vec{c} ділить цей відрізок? **[2]**
- 2** Знайти умови необхідні і достатні для того, щоб три прямі $A_i x + B_i y + C_i = 0, i = \overline{1, 3}$:
- а) утворювали трикутник; **[4]**
б) мали єдину спільну точку.

3 Довести тотожність:
$$\left([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}] \right) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{a}, \vec{d}) \\ (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{d}) \end{vmatrix}. \quad \mathbf{[4]}$$

ВАРІАНТ 32.

- 1** Відомо, що $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}], \vec{b} = [\vec{c}, \vec{a}], \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Знайти довжини векторів \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} і кути між ними. **[2]**
- 2** Задана точка $M_0(\vec{r}_0)$ і площина $\alpha : (\vec{r}, \vec{n}) = D$. Знайти радіус-вектор
- а) проекції точки M_0 на площину α ;
б) точки M_1 , яка симетрична точці M_0 відносно α . **[3]**
- 3** Знайти умову необхідну і достатню для того, щоб чотири площини $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, i = \overline{1, 4}$ утворювали тетраєдр. **[5]**

ВАРІАНТ 33.

- 1** Нехай задані вектори $\vec{a} = \{1, 5, 3\}, \vec{b} = \{6, -4, -2\}, \vec{c} = \{0, -5, 7\}, \vec{d} = \{-20, 27, -35\}$. Підібрати числа α, β і γ так, щоб вектори $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$ і \vec{d} утворювали замкнену ламану лінію, якщо початок кожного наступного вектора з'єднати з кінцем попереднього. **[2]**
- 2** Скласти рівняння прямої, яка перетинає дві мимобіжні прямі $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$ і проходить через точку $M_0(\vec{r}_0)$ яка не лежить на жодній з цих прямих. **[5]**
- 3** Знайти відстань між двома паралельними площинами $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}u + \vec{b}v$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}u + \vec{b}v$. **[3]**

ВАРІАНТ 34.

- 1 В площині трикутника ABC знайти точку O таку, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Чи існують такі точки ззовні трикутника? [2]
- 2 Знайти необхідну і достатню умову того, що прямі $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$
- а) перетинаються в єдиній точці;
 - б) мимобіжні;
 - в) паралельні, але не збігаються;
 - г) збігаються. [4]
- 3 Довести тотожність $\left[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}] \right] = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$. [4]

ВАРІАНТ 35.

- 1 Задано три некопланарних вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Знайти вектор \vec{x} з системи рівнянь $(\vec{a}, \vec{x}) = 1, (\vec{b}, \vec{x}) = 0, (\vec{c}, \vec{x}) = 0$. [3]
- 2 Задана точка $M_0(\vec{r}_0)$ і пряма $\gamma : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$. Знайти радіус-вектор
- а) проекції точки M_0 на пряму γ ;
 - б) точки M_1 , яка симетрична точці M_0 відносно γ . [3]
- 3 Задані дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, які перетинаються і не є взаємно перпендикулярними. Точка (x_0, y_0) не лежить на жодній з цих прямих. Знайти косинус того кута між цими прямими, в якому лежить ця точка. [4]

ВАРІАНТ 36.

- 1 Довести, що для трьох неколінеарних векторів \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} рівності $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$ виконуються тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. [2]
- 2 Записати рівняння прямої $(\vec{r}, \vec{n}_i) = D_i, i = 1, 2$ в вигляді $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$. [4]
- 3 Скласти рівняння прямої, яка перетинає пряму $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$ під прямим кутом і проходить через точку $M_0(\vec{r}_0)$, що не лежить на цій прямій (перпендикуляра, який опущений з точки $M_0(\vec{r}_0)$ на пряму $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$). [4]