

1 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА.

Розв'яжімо квадратне рівняння $x^2+x+1=0$. Для цього спочатку знайдемо дискримінант $D=1^2-4*1*1=-3$. На множині дійсних чисел дане рівняння розв'язку немає, але якщо ввести уявну одиницю 'i', для якої виконується наступне правило $i^2 := -1$, тоді можна знайти два розв'язки даного рівняння. Вони будуть $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Таким чином множину дійсних чисел розширимо до множини комплексних чисел.

Число $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ називається комплексним числом. Число $a = \operatorname{Re}z$ називається дійсною частиною комплексного числа z , число $b = \operatorname{Im}z$ – уявною частиною. Числа $z = a + 0i = a \in \mathbb{R}$ є дійсними числами, а числа $z = 0 + ib = ib$ називаються суто уявними числами.

Порівнювати комплексні числа не можна, але два комплексні числа рівні, якщо рівні їх дійсні та уявні частини відповідно, тобто,

$$z_1 = z_2 \leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}z_1 = \operatorname{Re}z_2 \\ \operatorname{Im}z_1 = \operatorname{Im}z_2 \end{cases}$$

ОПЕРАЦІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ.

Щоб виконати дії додавання, віднімання, множення двох комплексних чисел запишіть вираз відокремлюючи кожне комплексне число дужками, а тоді відкрийте дужки за правилами дистрибутивного закону дійсних чисел, не забувайте при цьому, що $i^2 = -1$ і нічого складного тут не знайдете. Результатом ви повинні отримати комплексне число, тобто дійсна частина додати уявну домножену на i .

Додавання: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

Множення $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$

Приклад 1 Додати комплексні числа $z_1 = -3 + 2i, z_2 = 5 - 3i$. *Розв'язання.* $z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (5 - 3i) = (-3 + 5) + i(2 - 3) = 2 - i$.

Приклад 2 Перемножити комплексні числа $z_1 = -3 + 2i, z_2 = 5 - 3i$. *Розв'язання.* $z_1 z_2 = (-3 + 2i)(5 - 3i) = (-3 \cdot 5 - 6i^2) + i(2 \cdot 5 + 3^2) = -11 + 19i$.

Важливою операцією для комплексних чисел є відшукання спряженого числа даному комплексному числу. Якщо $z = a + ib$, тоді спряженим до нього буде число $\bar{z} = a - ib$. Тобто змінюємо знак біля уявної одиниці.

Приклад 3 Написати спряжені до комплексних чисел $z_1 = -3 + 2i, z_2 = 5 - 3i, z_3 = 5, z_4 = 2i$. *Розв'язання.*

$$\bar{z}_1 = -3 - 2i.$$

$$\bar{z}_2 = 5 + 3i.$$

Третє число дійсне, тому спряжене залишиться без змін

$$\bar{z}_3 = 5.$$

В суто уявному четвертому числі зміниться знак на протилежний

$$\bar{z}_4 = -2i.$$

Що станеться, якщо комплексне число домножити на його спряжене?

Приклад 4 Перемножити комплексні числа на їх спряженні $z_1 = -3 + 2i, z_2 = 5 - 3i, z_3 = 5, z_4 = 2i$. *Розв'язання.*

$$z_1 \bar{z}_1 = (-3 - 2i)(-3 + 2i) = \text{це різниця квадратів} = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13.$$

$$z_2 \bar{z}_2 = (5 + 3i)(5 - 3i) = 25 - 9i^2 = 25 + 9 = 34.$$

$$z_3 \bar{z}_3 = 5 \cdot 5 = 25.$$

$$z_4 \bar{z}_4 = -2i \cdot (2i) = 4.$$

Отже, в загальному вигляді $z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

!!Добуток комплексного числа на його спряжене є додатнім числом, сума квадратів його дійсної та уявної частини!!

Тепер розглянемо ділення комплексних чисел: для того щоб отримати в результаті комплексне число, нам потрібно перетворити комплексне число в знаменнику в дійсне, а ми це можемо зробити, якщо домножити чисельник і знаменник на спряжене.

Приклад 5 Поділити z_1 на z_2 комплексні числа $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 5 - 3i$. **Розв'язання.** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3+2i}{5-3i} = \frac{(-3+2i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{-21+i}{25+9} = -\frac{21}{34} + \frac{1}{34}i$. Дійсна частина тут $-\frac{21}{34}$ уявна частина $\frac{1}{34}$.

Ще одне питання яке хотілося б зачепити у цій частині це **степені уявної одиниці i** . Почнемо з прикладів:

Приклад 6 Обчислити $z_1 = i^{72}$, $z_2 = i^{75}$, $z_3 = i^{-1}$.

Розв'язання. Ми знаємо, що $i^2 = -1$ використовуючи ці знання, розділемо степінь 72 на 2 і отримаємо

$$z_1 = (i^2)^{36} = (-1)^{36} = 1.$$

З іншої сторони можемо зауважити, що $i^4 = 1$ та $72 : 4 = 18$, тому $z_1 = 1$.

$$z_2 = i^{75} = i i^{74} = i(i^2)^{37} = -i. \text{ Порахуємо } z_3 = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i.$$

Отже, нехай потрібно обчислити i^n , якщо степінь n ділиться націло на 4 тоді $i^n = 1$; якщо степінь n парна, але не ділиться націло на 4 тоді $i^n = -1$; якщо степінь n непарна, тоді записуємо $i^n = i^{n-1}i$ та розглядаємо чи ділиться на 4 число $n-1$.

Форма $z = a + ib$ називається алгебраїчною формою комплексного числа.

2 Тригонометрична, показникова форми комплексного числа.

Комплексне число можуть задавати просто два дійсних числа: дійсна та уявна частини. На декартовій площині ми можемо відкласти по осі абсцис дійсну частину а по осі ординат (уявна вісь) уявну частину і поставити у відповідність комплексному числу точку на декартовій площині. З'єднавши з початком координат, матимемо радіус-вектор. Його можна задати задомогою довжини вектора (модуль комплексного числа) та кута нахилу вектора до додатнього напрямку осі Ox (аргумент комплексного числа).

Якщо комплексне число $z = a + ib$, то **модулем** цього числа будемо називати число $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ - довжина вектора з координатами (a, b) .

Якщо $a > 0$, тобто кут нахилу вектора (a, b) до осі абсцис з інтервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тоді **аргумент** комплексного числа можна порахувати $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$, якщо $a < 0$, тоді потрібно приплюсовувати π , тобто $\varphi = \arctg \frac{b}{a} + \pi$. Якщо комплексне число є суто уявним, тоді отримуємо точку на осі ординат і в залежності від знаку b аргумент дорівнюватиме $\pm \frac{\pi}{2}$.

Маючи модуль і аргумент комплексного числа, ми можемо комплексне число записати в одній з форм:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ тригонометрична форма}$$

$$z = \rho e^{i\varphi} \text{ показникова форма.}$$

!! У тригонометричній формі біля і записаний синус, завжди, у косинуса і синуса однакові аргументи. !!

Приклад 7 Записати числа в тригонометричній та показниковій формі: $z_1 = -3$, $z_2 = 5 - 5i$, $z_3 = -2 + i$, $z_4 = 2i$.

Розв'язання. Почнемо з першого числа, визначимо дійсну та уявну частини: $a_1 = -3 < 0$, $b_1 = 0$. Модуль числа $|z_1| = \sqrt{9+0} = 3$. Оскільки дійсна частина від'ємна то до арктангенса додаємо ще π : $\arg z_1 = \varphi = \pi + \arctg 0 = \pi$. Отже, тригонометрична форма $z_1 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z_1 = 3e^{i\pi}$ - показникова форма.

Для числа $z_2 = 5 - 5i$ дійсна частина $a = 5 > 0$, уявна $b = -5$. Модуль $|z_2| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, аргумент $\varphi = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Отже, тригонометрична форма $z_2 = 5\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$, $z_2 = 5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ - показникова форма.

Для числа $z_3 = -2 + i$ дійсна частина $a = -2 < 0$, уявна $b = 1$. Модуль $|z_3| = \sqrt{5}$, аргумент $\varphi = \pi + \arctg(-\frac{1}{2}) = \pi - \arctg(\frac{1}{2})$. Отже, тригонометрична форма $z_3 = \sqrt{5}(\cos(\pi - \arctg(\frac{1}{2})) + i\sin(\pi - \arctg(\frac{1}{2})))$, $z_3 = \sqrt{5}e^{i(\pi - \arctg(\frac{1}{2}))}$ - показникова форма.

Залишилось останнє число $z_4 = 2i$. Дійсна частина $a = 0$, уявна $b = 2$. Модуль $|z_4| = 2$, щоб обчислити аргумент комплексного числа зобразимо в декартовій площині точку $(0, 2)$ вона на додатній частині осі ординат, кут між віссю ординат і додатнім напрямком осі абсцис $\frac{\pi}{2}$. Отже аргумент дорівнює $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Отже, тригонометрична форма $z_4 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$, $z_4 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ - показникова форма.

3 Операції з комплексними числами в тригонометричній показниковій формах.

Іноді для множення і ділення комплексних чисел зручною є показникова форма.

Щоб перемножити два комплексні числа перемножаємо їх модулі, а аргументи додаємо.

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Щоб поділити комплексне число на друге ділимо відповідно їх модулі, а аргументи відповідно віднімаємо (від аргумента діленого віднімаємо аргумент дільника).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Щоб піднести комплексне число до степені, підносимо до цієї степені модуль, а аргумент домножаємо на степінь.

$$z_1^n = \rho^n e^{in\varphi_1}.$$

Якщо $z = \rho e^{i\varphi}$, тоді **спряжений** до нього матиме вигляд

$$z = \rho e^{-i\varphi}.$$

!!! Зауважимо, що $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + 2\pi k)}$!!! $\varphi = \operatorname{arg} z$ – головне значення аргументу з яким ми в основному працюємо, а $\varphi + 2\pi k = \operatorname{Arg} z$ – аргумент комплексного числа.

Приклад 8 Обчислити вираз: $z = \frac{(5-5i)^{2016}}{(-\sqrt{3}+i^{217})^{90}}$.

Розв'язання. Спочатку запишемо для кожного комплексного числа показникові форми: отже, $z_1 = 5 - 5i = 5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ з попереднього прикладу 7, в знаменнику у нас число $z_2 = -\sqrt{3} + i^{217} = -\sqrt{3} + i = i^{216} + i = i$, оскільки 216 ділиться на 4 націло. Отже друге комплексне число $z_2 = -\sqrt{3} + i$, $a = -\sqrt{3} < 0$, $b = 1$ тому $|z_2| = 2$, $\operatorname{arg} z_2 = \pi + \operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{5\pi}{6}$. Його показникова форма $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Чисельник $(5 - 5i)^{2016} = 5^{2016} 2^{1008} e^{-i54\pi} = 50^{1008} (\cos(-i54\pi) + i\sin(-i54\pi)) = 50^{1008}$.

Знаменник $z_2^{90} = 2^{90} e^{i\frac{450\pi}{6}} = 2^{90} e^{i75\pi} = 2^{90} (\cos 75\pi + i\sin 75\pi) = -2^{90}$. Отже вираз $z = \frac{(5-5i)^{2016}}{(-\sqrt{3}+i^{217})^{90}} = -\frac{50^{1008}}{2^{90}}$.

Знаходження кореня n-того степеня з комплексного числа.

Для знаходження кореня n-того степеня з комплексного числа нам потрібна показникова форма комплексного числа, але з великим аргументом, тобто $z = \rho e^{i(\phi + 2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

В комплексній площині корінь n-того степеня має n різних значень, а саме

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\phi + 2\pi k}{n}}, k = 0, n - 1.$$

Приклад 9 Розв'язати рівняння в комплексній площині: $z^4 + 1 = 0$. **Розв'язання.** Перепишемо рівняння $z^4 = -1$. Отже $z = \sqrt[4]{-1}$. Щоб визначити які це числа, потрібно записати -1 в показниковій формі: $a = -1 < 0$, $b = 0$ тому $|-1| = 1$, $\operatorname{Arg}(-1) = \pi + \operatorname{arctg} 0 + 2\pi k = \pi + 2\pi k$. Отже показникова форма $-1 = e^{i(\pi + 2\pi k)}$. І корені рівняння мають вигляд $z = \sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Випишемо їх алгебраїчний вигляд для кожного k:

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i);$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i);$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i);$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

Приклад 10 Розв'язати рівняння в комплексній площині: $z^4 - z^2 + 1 = 0$. **Розв'язання.** Зробимо заміну $z^2 = t$. Отримаємо рівняння $t^2 - t + 1 = 0$. Його розв'язками в комплексній множині є числа $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Тепер треба обчислити $\sqrt{t_{1,2}}$. Для цього знайдемо показникову форму для цих чисел. Модуль в них однаковий $|t_{1,2}| = 1$. Аргументи $\operatorname{Arg} t_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2\pi k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\operatorname{Arg} t_2 = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2\pi k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отже, показникові форми для цих чисел матимуть наступний вигляд $t_{1,2} = e^{\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k}$. Беремо квадратний корінь і виписуємо розв'язки: $z_{0,1} = e^{\pm \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}$, $z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.