КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Т.М. Жеребко

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Київ-2016

УДК 517.2

Рецензент: доц., канд.фіз.-мат. наук Єфіменко С. В.

Жеребко Т.М. Завдання для самостійних робіт з математичного аналізу: Методичний посібник для студентів кафедри «Радіотехніки та радіоелектронних систем» факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем./Жеребко Т.М. К.: КНУ--2016, 107ст.

Посібник можна використовувати як задачник при вивченні курсу „Вища математика" студентами кафедри «Радіотехніки та радіоелектронних систем» факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем. Він містить задачі та приклади розв'язань задач з математичного аналізу для самостійного розв'язування. На початку розділів наведені теоретичні відомості, необхідні для виконання завдань. Останній розділ містить основні відомості з курсу елементарної математики.

Затверджено
Вченою Радою факультету радіофізики,
електроніки та комп'ютерних систем.
Протокол № 1 від 29 вересня 2016 року

Самостійна робота 1.
1.Комплексні числа

Комплексне число – це впорядкована пара дійсних чисел $z=(x,y)$ або вираз вигляду $z=x+i\cdot y$, де $i=\sqrt{-1}$- **уявна одиниця**. $x=\operatorname{Re} z$ називають **дійсною частиною** комплексного числа (realis - дійсний), $y=\operatorname{Im} z$ називають **уявною частиною** (imaginarius - уявний).

Алгебраїчна форма комплексного числа: $z=x+i\cdot y$.

Тригонометрична форма комплексного числа: $\boxed{z=r(\cos\varphi+}\, i\sin\varphi)$,

де $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$- ***модуль*** комплексного числа;

$Arg\, z=\arg z+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ - його ***аргумент*** – визначений з точністю до довільного доданку, кратного 2π. Значення $\arg z$: $-\frac{\pi}{2}<\arg z\leq\frac{3\pi}{2}$ називається *головним значенням аргументу* .

$$\arg z=\begin{cases} arctg\,\frac{y}{x} \quad при \quad x>0; \\ arctg\,\frac{y}{x}+\pi \quad при \quad x<0; \\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y \quad при \quad x=0. \end{cases}$$

Показникова форма комплексного числа:

$z=re^{\boxed{i\varphi}}$.

Для обчислення аргументу випишемо значення арктангенса:

$$arctg\,0=0;\ arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6};\ arctg\,1=\frac{\pi}{4};\ arctg\,\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

Операції над комплексними числами

Нехай

$$z_1=x_1+iy_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1);\quad z_2=x_2+iy_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Додавання.

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Різниця.

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Добуток.

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)=$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))=r_1r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Частка.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Піднесення до степеня. Формула Муавра.

$$\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^n e^{in\varphi}.$$

Здобуття кореня.

Корінь комплексного числа є багатозначною функцією, а саме, який порядок кореня, стільки значень ми отримаємо.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},$$

$$k=0,1,\ldots,n-1;\quad n\in N.$$

Показникова функція.

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

$$e^{\pi i}=-1,\ e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2};\quad \left(e^{z_1}\right)^{z_2}=e^{z_1\cdot z_2};\quad e^{z+2k\pi i}=e^{z}.$$

Формули Ейлера.

$$\boxed{\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

Завдання 1.

Виконати дії:

1. 1. $(2-i)(2+i)^2-\dfrac{3-2i}{i}$. **1.2.** $\dfrac{(1+i)^3}{1-i}$. **1.3.** $\dfrac{(1-2i)^2(3-2i)}{i}$**.**

1.4. $\dfrac{(1-i)^3}{1+i}$ **.1.5.** $\dfrac{2(3-5i)^2}{1-3i}$ **.** **1.6.** $\dfrac{(2+4i)^3}{-3+5i}$ **. 1.7.** $\dfrac{1}{(3+2i)^2}+\dfrac{1}{(3-2i)^2}$**.**

1.8 $\dfrac{(2-3i)^3}{1-3i}$**. 1.9** $(1-2i)(2+i)^3-\dfrac{4}{i}$**. 1.10** $\left(\dfrac{3}{i}-i\right)\left(1-3i^5\right)^3$**.**

1.11. $\dfrac{(2+i)^2}{2-i}-\dfrac{3+2i}{i}$ **.** **1.12.** $\dfrac{(1-i)^3 i}{1+i^{211}}$ **. 1.13.** $\dfrac{(1+2i)^2}{i^{215}(3-2i)}$ **.**

1.14.$\dfrac{(-1+i)^5}{1+i^{2016}}$**. 1.15.** $\dfrac{(1+2i)(3-5i)^2}{1-3i}$**. 1.16**. $\dfrac{(-2+3i)^3}{3+5i}$.

1.17. $\dfrac{1}{(1+2i)^2}-\dfrac{1}{(1-2i)^2}$. **1.18** $\dfrac{(1+3i)^3}{2i^{2014}-3i}$. **1.19** $\left(1-\dfrac{2}{i}\right)(2+i)^3+\dfrac{4}{i}$.

1.20. $\left(\dfrac{3}{i^5}-i\right)\left(1-3i^5\right)^2$.

Завдання 2. Представити наступні комплексні числа у тригонометричній і показниковій формах.

2.1. -3. **2.2.** $-i$. **2.3.** $1+i$. **2.4.** $-1+i\sqrt{3}$.

2.5. $2-5i$. **2.6.** $-2+2\sqrt{3}i$. **2.7.** $-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

2.8 $\sqrt{3}-i$. **2.9** $-3-\sqrt{3}i$. **2.10** $-5-2i$. **2.11.** $\sqrt{7}$. **2.12.** $\dfrac{\pi}{16}i$.

2.13. $4-4i$. **2.14.** $-2-i2\sqrt{3}$. **2.15.** $-3-4i$. **2.16.** $-2+\sqrt{12i}$.

2.17. $-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$. **2.18.** $-3+\sqrt{3}i$. **2.19.** $1+\sqrt{3}i$. **2.20**. $-2+5i$.

Завдання 3. Обчислити z_1z_2 та $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^{315}, якщо

3.1. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3.2. $z_1=4\left(\cos\dfrac{3\pi}{5}+i\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3.3 $z_1=3\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}+i\sin\dfrac{4\pi}{7}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{3\pi}{7}+i\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$.

3.4. $z_1=4\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3.5. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{15}+i\sin\dfrac{2\pi}{15}\right)$.

3.6. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$.

3.7. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{3\pi}{7}+i\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$.

3.8. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{9}+i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3.9. $z_1 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.10. $z_1 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$.

3.11. $z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.12. $z_1 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.13 $z_1 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$; $z_2 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{7} + i\sin\frac{11\pi}{7}\right)$.

3.14. $z_1 = 3\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$; $z_2 = 12\left(\cos\frac{22\pi}{3} + i\sin\frac{22\pi}{3}\right)$.

3.15. $z_1 = 14\left(\cos\frac{14\pi}{5} + i\sin\frac{14\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{12\pi}{15} + i\sin\frac{12\pi}{15}\right)$.

3.16. $z_1 = 4\left(\cos\frac{24\pi}{5} + i\sin\frac{24\pi}{5}\right)$; $z_2 = 16\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$.

3.17. $z_1 = 5\left(\cos\frac{41\pi}{5} + i\sin\frac{41\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{23\pi}{7} + i\sin\frac{23\pi}{7}\right)$.

3.18. $z_1 = 5\left(\cos\frac{34\pi}{9} + i\sin\frac{34\pi}{9}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.19. $z_1 = 7\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{32\pi}{3} + i\sin\frac{32\pi}{3}\right)$.

3.20. $z_1 = 7\left(\cos\frac{24\pi}{5} + i\sin\frac{24\pi}{5}\right)$; $z_2 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$.

Завдання 4. Знайти всі значення коренів:

4.1. $\sqrt[3]{8}$. **4.2.** $\sqrt[3]{i}$. **4.3.** $\sqrt[4]{81}$. **4.4.** $\sqrt[4]{-1}$. **4.5.** $\sqrt[3]{1-i}$

4.6 $\sqrt[4]{-4-4i}$. **4.7** $\sqrt[3]{-4+4i}$. **4.8** $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}i}$ **4.9** $\sqrt[3]{-1-i}$ **4.10** $\sqrt[4]{-1+i}$

4.11. $\sqrt[3]{-64}$. **4.12.** $\sqrt[3]{-8i}$. **4.13.** $\sqrt[4]{16}$. **4.14.** $\sqrt[4]{5i}$. **4.15.** $\sqrt[4]{4+4i}$

4.16. $\sqrt[3]{-5-5i}$. **4.17.** $\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}i}$. **4.18.** $\sqrt[4]{-5+5\sqrt{3}i}$ **4.19.** $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$

4.20. $\sqrt[3]{-2\sqrt{3}+2i}$

Завдання 5. Записати як суму $\sin$ і $\cos$ кратних кутів (використовуючи формули Ейлера):

5.1 $\sin^4\varphi\cos\varphi$. **5.2** $\sin^7\varphi$. **5.3** $\sin^6\varphi$. **5.4** $\sin^5\varphi\cos^2\varphi$.

5.5 $\cos^8\varphi$. **5.6** $\sin^2\varphi\cos^4\varphi$ **5.7** $\cos^5\varphi$ **5.8** $cos^6\varphi$

5.9 $\sin^4\varphi\cos^2\varphi$ **5.10** $\sin^8\varphi$ **5.11** $\sin^5\varphi\cos\varphi$. **5.12** $\cos^7\varphi$.

5.13 $\cos\varphi\sin^6\varphi$. **5.14** $\sin\varphi\cos^4\varphi$. **5.15** $\sin^8\varphi$. **5.16** $\sin\varphi\cos^5\varphi$

5.17 $\sin^3\varphi\cos^2\varphi$ **5.18** $\sin^6\varphi$ **5.19** $\sin^5\varphi\cos\varphi$ **5.20** $\sin^2\varphi\cos^3\varphi$

Самостійна робота 2.

2.Границі числових функціональних послідовностей.

Властивості границь

Припускаємо надалі, що усі границі існують і скінченні.

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to a}u_1(x)+\lim\limits_{x\to a}u_2(x)+\dots+\lim\limits_{x\to a}u_n(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\left(u_1(x)\cdot u_2(x)\times\dots\times u_n(x)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to a}u_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}u_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{x\to a}u_n(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}u(x)}{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a}v(x)\neq 0$.

4. (Теорема про двох міліціонерів.) Якщо значення трьох функцій $u=u(x), z=z(x), v=v(x)$ пов'язані нерівностями $u\le z\le v$, при цьому $u(x)$ і $v(x)$ при $x\to a$ (або $x\to\infty$) прямують до однієї границі b, то і $z=z(x)$ при $x\to a$ ($x\to\infty$) також прямує до границі b.

Символічне правило обчислення границь.

Невизначеними виразами вважаємо наступні вирази:

1) $\infty-\infty$; 2) $\dfrac{\infty}{\infty}$; 3) $\dfrac{0}{0}$; 4) $0\cdot\infty$;

5) 1^∞; 6) 0^0; 7) ∞^0.

Зручно користуватись формулами скороченого множення

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};\qquad \sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}=\frac{a\pm b}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}.$$

У математичному аналізі *означеними* виразами вважаються такі вирази (тут k - деяка стала; n - натуральне число):

1) $\infty + \infty = \infty$; 2) $k \cdot \infty = \infty$;

3) $\frac{k}{\infty} = 0$; 4) $\frac{\infty}{k} = \infty$;

5) $\frac{k}{0} = \begin{cases} +\infty, \text{якщо } k > 0; \\ -\infty, \text{якщо } k < 0. \end{cases}$ 6) $\infty^n = \infty$;

7) $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, \text{якщо } n - \text{парне}; \\ -\infty, \text{якщо } n - \text{непарне}. \end{cases}$ 8) $\sqrt[n]{\infty} = \infty$.

В цих рівностях вважається, що зліва стоїть деякий вираз під знаком границі. Наприклад, рівність (3) $\frac{k}{\infty} = 0$ означає, що маємо границю вигляду $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x) \to k$ при $x \to a$, а $g(x) \to \infty$ при $x \to a$ (a може дорівнювати $\pm\infty$). Правило твердить, що в цьому випадку $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Визначні границі та їх наслідки

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1. \ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Обчислити

$$\lim_{x\to\infty} \left(a(x)\right)^{b(x)} = \left\lceil 1^{\infty} \right\rceil = \lim_{x\to\infty} \left(\left(1 + \varepsilon(x)\right)^{\frac{1}{\varepsilon(x)}} \right)^{b(x)\varepsilon(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} b(x)\varepsilon(x)},$$

де $\varepsilon(x) := a(x) - 1 \to 0, x \to \infty$.

О-символіка

Нехай $\varphi(x), \psi(x)$- деякі функції, задані в околі точки x_0. Нехай $\psi(x) \neq 0$ в деякому околі U_{x_0} точки $x_0 (x \neq x_0)$.

Запис $\varphi(x) = O(\psi(x))$ при $x \to x_0$ означає, що існує константа $C > 0$, така, що $|\varphi(x)| \leq C|\psi(x)|$ при всіх значеннях x в певному околі точці x_0 (функція φ обмежена зверху функцією ψ з точністю до множника в околі точки x_0).

Запис $\varphi(x) = o(\psi(x))$ при $x \to x_0$ означає, що $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$ (функція φ є функією меншого степеня в порівнянні з функцією ψ в околі точки x_0).

Функції називаються **еквівалентними** ($\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \psi(x)$) при $x \to x_0$,

якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$.

Можна навести такі приклади нескінченно малих еквівалентних функцій при $x \to 0$:

$\sin x \sim x;$	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2};$	$tgx \sim x;$	$\arcsin x \sim x;$
$arctgx \sim x;$	$\ln(1+x) \sim x;$	$e^x - 1 \sim x;$	$(1+x)^a - 1 \sim ax.$

Завдання 1. Обчислити границі числових послідовностей.

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{n^3+3} - \sqrt[3]{n^3-1}\right)$. **1.2.** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{2+27n^3} - 3n\right)$.

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt[3]{n^3-4}\right)\cdot n\sqrt{n}$. **1.4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+6} - n\right)$.

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2}\right)$. **1.6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-6} - n\sqrt{n(n^2+4)}}{\sqrt{n}}$.

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt[3]{n^3-3}\right)$. **1.8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)} - \sqrt{n^2-3n+2}\right)$.

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+4)(n-1)} - \sqrt{(n+7)(n-4)}\right)$.

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n^4-4)} - \sqrt{n^5+1}\right)$.

1.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+1\right)\left(\sqrt[3]{8n^3-3} - \sqrt[3]{8n^3+1}\right)$.

1.12. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)\left(2n - \sqrt[3]{8n^3-3}\right)$. **1.13.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8+2n-n^3} + n\right)\cdot\sqrt{n}$.

1.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-5n+12} - 2n\right)$.

1.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n-1} - \sqrt{4n^2-2n+1}\right)$.

1.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+3n-6} - n\sqrt{n(n^2-4)}}{\sqrt{n-1}}$. **1.17.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{3-5n+n^2}\right)$.

1.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)} - \sqrt{n(n-3)}\right)$.

1.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n-5)}-\sqrt{(n-1)(n-3)}\right)$.

1.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3-2}\left(\sqrt{n(4n^4-4n^2-1)}-\sqrt{4n^5-4n^3+1}\right)$.

Завдання 2. Обчислити границі заданих функцій.

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^4+2x^3+1}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^3-3x+1}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^4-1}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-3x^3-3x+9}{-x^5+3x^4+4x-12}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+3x^2-6x}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{13}-x+1}{x^4+12x^3+1}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+1}{x^3-5x+1}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{2x^2-1}+\dfrac{1-x^4}{2x^2+1}\right)$.

2.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4+3x^3-3x-9}{x^5+3x^4-4x-12}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-4x^2+16}{x^4+2x^3+3x^2+6x}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+9x^2+9x+1}{x^3-x^2+2}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{3x^4-9x^3-4x+12}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^3-20x+25}{3x^3+10x^2-25x}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+16}{x^4+7x-2}$.

Завдання 3. Обчислити границі заданих функцій.

3.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{e^{3x}-1}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2\sin x)}{\sin 3x}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{e^{x^2}-1}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,\pi x}{\ln(1+2x)}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{1-\ln(e-x)}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\pi\left(1+x/3\right)\right)}{e^{6x}-1}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin 3x}}{\operatorname{tg} 2x}$. **3.8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x}}{\sin x^3}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x-3)-\ln(2x+1))$.

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+8)(\ln(3-2x)-\ln(6-2x))$. **3.11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 9x}{1-\sqrt{\cos 4x}}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x\cdot tg5x}$. **3.13.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 5x-2\sqrt{1+3x^2}}{e^{3x^2}-1}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x \operatorname{tg} 5x}{\ln(1+2x^2)}$. **3.15.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x^3}{\ln\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(3x^2+2x\right)}{e^{6x^2}-e^{5x}}$. **3.17.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x^2}-e^{\sin 3x^2}}{\cos 5x-\cos 3x}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 4x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} 4x}}{\ln\left(1+x^3\right)}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin 2x}\left(\ln\left(3-2x\right)-\ln\left(2x+1\right)\right)$.

3.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{x}}{\left(2x+1\right)^{\frac{1}{8}}}\left(\left(2x+3\right)^{\frac{1}{8}}-\left(2x-3\right)^{\frac{1}{8}}\right)$.

Завдання 4. Обчислити границі заданих функцій.

4.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3x}$. **4.2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{x}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$. **4.4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{x^2-3}\right)^{-4x}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x}{x^3-1}\right)^{-3x^2}$. **4.6.** $\lim\limits_{x\to 4}(9-2x)^{\frac{1}{x-4}}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{4x}{x+1}\right)^{\frac{7}{x^2+x}}$. **4.8.** $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{2}{x-1}}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 7}(8-x)^{\frac{x}{x-7}}$. **4.10.** $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right)^{1/(\sqrt{x}-2)}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{3x^2}$. **4.12.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+3x-1}{4x^2+4}\right)^{x}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{11+2x-7x^3}{4-7x^3}\right)^{3x^2+2}$. **4.14.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{x-x^2}{x^2-3}\right)^{-4x+3}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2x}{x^3-1}\right)^{1-3x^2}$. **4.16.** $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2}{x-3}}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+2}{x^2-5x+2}\right)^{\frac{-3}{x^2-x}}$. **4.18.** $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{2}{x^2-1}}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 6}(7-x)^{\frac{-x+1}{x-6}}$. **4.20.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x-3}{x+1}\right)^{1/(x^2-4)}$.

Самостійна робота 3.

3.Похідні та їх застосування

Таблиця похідних основних елементарних функцій.

Вважаємо u,v деякими диференційовними функціями аргументу x.

1.	$(u^{\alpha})' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$.	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2.	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.	$x'=1,\ c'=0$
3.	$(a^u)' = a^u\cdot u'\cdot\ln a;\quad (a>0, a\neq 1)$.	$(a^x)' = a^x\cdot\ln a;\quad (a>0, a\neq 1)$.
4.	$(e^u)' = e^u\cdot u'$.	$(e^x)' = e^x$.
5.	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{\ln a\cdot u}\cdot u'$.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln a\cdot x}$.
6.	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
7.	$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$.	$(\sin x)' = \cos x$.
8.	$(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$.	$(\cos x)' = -\sin x$.
9.	$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

10.	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
11.	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12.	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13.	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
14.	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
15.	$\left(u^{v(x)}\right)' = u^{v(x)}\left(v(x)\ln u(x)\right)' = u^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \dfrac{u'v(x)}{u}\right); \quad u > 0$.	
16.	$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$(cu)' = cu'$
17.	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	

Похідна параметрично заданої функції: $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t}$;

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{\frac{d}{dt}(y')}{\dot{x}_t}, \quad y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{\frac{d}{dt}(y'')}{\dot{x}_t}.$$

Повне дослідження функції:

1. Область значень.

2. Область визначення.

3. Точки перетину з осями: знайти y, коли x=0 та знайти x, коли y=0.

4. Парність функції: якщо $f(x) = f(-x)$ -- парна функція, $f(x) = -f(-x)$ -- непарна функція, в іншому разі функція є індиферентною, функція загального виду.

5. Періодичність функції.

6. Обчислюємо першу похідну: інтервали монотонності ($f'(x) > 0$, фукнція в цій точці зростає, $f'(x) < 0$, то спадає), критичні (не існує похідної в цій точці) та стаціонарні точки $f'(x) = 0$.

7. Обчислюємо другу похідну: інтервали опуклості ($f''(x)>0$ -- функція опукла вниз, $f''(x)<0$ -- увігнута, опукла вгору), точки перегину $f''(x)=0$ або точки в яких друга похідна не існує.

8. Асимптоти: горизонтальні $y=a_{1,2}$, де $a_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$; вертикальні $x=a$, якщо $\infty=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і похилі асимптоти $y=ax+b$, де $a_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-a_{1,2}x\right)$.

Завдання 1. Продиференціювати задані функції. Знайти $y'=\frac{dy}{dx}$ і в пунктах е) є) обчислити ще $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$.

1.1.а) $y=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$;

б) $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1+2\sin x}}$;

в) $y=\ln\left(e^{2x}+1\right)-2arctg\left(e^x\right)$;

г) $y=x^{\sin x}$;

д) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;

е) $y=e^{x^2}$;

є) $\begin{cases} x=2t^2; \\ y=3t^3. \end{cases}$

1.2. а) $y=(2+x)\sqrt{3-x}$;

б) $y=\ln(\arcsin 5x)$;

в) $y=\frac{x}{\sin\left(x^2+3\right)}$;

г) $y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$;

д) $xy=arctg\frac{x}{y}$;

е) $y=(\arcsin x)^2$;

є) $\begin{cases} x=e^{-3t}; \\ y=e^{3t}. \end{cases}$

1.3. а) $y=\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$;

б) $y=3^{ctg\frac{1}{x}}$;

в) $y=\arcsin(\ln x)$;

г) $y=x^{x^2}$;

д) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=5$;

е) $y=\left(1+x^2\right)arctgx$;

є) $\begin{cases} x=t-\sin t; \\ y=t-\cos t. \end{cases}$

1.4. а) $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$;

б) $y=\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;

в) $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$;

г) $y=(\arccos x)^{x^3}$;

д) $3^x+3^y=\sin y$;

е) $y=\sqrt{1+x^2}$;

є) $\begin{cases} x=t-\cos^2 t; \\ y=\sin^2 t. \end{cases}$

1.5. а) $y=\frac{1}{8}\frac{x^8}{\left(1-x^2\right)^4}$;

б) $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$;

в) $y=\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$;

г) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

д) $x=y+arctgy$;

е) $y=tgx$;

є) $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=t^2-1. \end{cases}$

1.6. а) $y=x\sqrt{x^2-1}$;

б) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

в) $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$;

г) $y=x^{\sqrt{x}}$;

д) $x^3=\frac{x-y}{x+y}$;

е) $y=x^3e^x$;

є) $\begin{cases} x=t^3; \\ y=\ln t^2. \end{cases}$

1.7. а) $y=\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^3$;

б) $y=\sin x\cdot\cos^3 x^2$;

в) $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$;

г) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$;

д) $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$;

е) $y=e^{-x^2}$;

є) $\begin{cases} x=t\cos t; \\ y=t\sin t. \end{cases}$

1.8. а) $y=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$;

б) $y=arctg\frac{1+x}{1-x}$;

д) $x\sin y+y\sin x=9$;

е) $y=ctgx$;

в) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ **;**

г) $y = x^{\ln x}$ **;**

є) $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

1.9. а) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$**;**

б) $y = arctg\sqrt{4x^4 - 1}$**;**

в) $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)$**;**

г) $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$**;**

д) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$**;**

е) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$**;**

є) $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right); \\ y = t^2. \end{cases}$

1.10. а) $y = \left(1 - 2\sqrt{x}\right)^4$**;**

б) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$ **;**

в) $y = \ln^5(1+\cos x)$**;**

г) $y = \left(x^2+4\right)^x$**;**

д) $3^x + 3^y = \cos y$**;**

е) $y = \arccos 2x$**;**

є) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{1+t^4}; \\ y = \dfrac{1-t^3}{1+t^4}. \end{cases}$

1.11. а) $y = \sqrt[3]{7+5x^3}$ **;**

б) $y = \arcsin\dfrac{2}{x}$**;**

в) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$**;**

г) $y = (\sin 3x)^x$**;**

д) $y = 5x + arctgy$**;**

е) $y = -\dfrac{5}{x+3}$**;**

є) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$

1.12. а) $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{1-x^4}}$ **;**

б) $y = \arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2}$**;**

в) $y = \ln\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3x}$ **;**

д) $\sin(xy) + \cos y = 0$**;**

е) $y = \sqrt{4-x^2}$ **;**

є) $\begin{cases} x = arctgt; \\ y = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$

г) $y = x^{\sin^2 x}$;

1.13. а) $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x}$;

б) $y = \sqrt{arctgx} - \arcsin 2x$;

в) $y = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3}$;

г) $y = (2x+1)^{\frac{3}{x}}$;

д) $y^2 = x \sin y$;

е) $y = \sqrt{tg3x}$;

є) $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

1.14. а) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x+2}{x-2}}$;

б) $y = \sin^2\left(x^3\right)$;

в) $y = \sqrt[3]{\ln^2 x + 5}$;

г) $y = \left(x^2 + 4\right)^{\sin x}$;

д) $x \ln y + \dfrac{y^2}{x} = 3$;

е) $y = e^{\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x = 5t^4 + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$

1.15.а) $y = \dfrac{1}{10x^5} - \dfrac{1}{4x^4}$;

б) $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

в) $y = \dfrac{1}{2} \ln tgx + \ln \cos x$;

г) $y = \left(\dfrac{x}{x+5}\right)^x$;

д) $y \sin y - \cos(x-y) = 0$;

е) $y = xe^{x^2}$;

є) $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

1.16. а) $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{4+x^2}}$;

б) $y = arctg^2 \dfrac{1}{x}$;

в) $y = \ln^7(\sin 2x)$;

г) $y = (\cos x)^{\sin x}$;

д) $x + \sqrt{xy} + y = 5$;

е) $y = \dfrac{1}{1+x^3}$;

є) $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

1.17. а) $y = \dfrac{5}{\left(x^2 - x + 1\right)^4}$;

д) $x^2 - 2xy + y^3 = 1$;

б) $y=\sin^3(\cos 4x)$;

в) $y=\dfrac{1}{\ln^5 x}$;

г) $y=x^{\sin(x+5)}$;

е) $y=\dfrac{1}{7+\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x=arctgt; \\ y=\ln(1+t^2). \end{cases}$

1.18.а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$;

б) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

в) $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$;

г) $y=(x^2+3)^{5x}$;

д) $x^2+3xy+y^3+1=0$;

е) $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

є) $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=t^3. \end{cases}$

1.19. а) $y=\dfrac{3}{x^2(x-2)}$;

б) $y=x\ln\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)$;

в) $y=(\arcsin x+2x^2)^7$;

г) $y=(x^2+7)^{\sin x}$;

д) $y^3-3y+10x=0$;

е) $y=\log_7 x$;

є) $\begin{cases} x=2\cos t; \\ y=\sin t. \end{cases}$

1.20. а) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}$;

б) $y=\dfrac{\cos x}{\ln\sin x}$;

в) $y=e^{-x^2}\cdot\ln x$;

г) $y=(\cos x)^{\ln x}$;

д) $y=\cos(x+y)$;

е) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

є) $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

Завдання 2. Дослідити задані функції за допомогою похідних першого порядку і побудувати ескізи графіків в околі їх екстремумів.

2.1. $y=2x^3-3x^2+1$.

2.2. $y=2-3x^3+x^4$.

2.3. $y=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-1$.

2.4. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^3+\dfrac{7}{4}$.

2.5. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$. **2.6.** $y = -\frac{1}{16}(x-2)^2(x-6)^2$.

2.7. $y = \frac{27}{4}\left(x^3 + x^2\right) - 5$. **2.8.** $y = x^3(x+2)^2 + 1$.

2.9. $y = \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x$. **2.10.** $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

2.11. $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$. **2. 12.** $y = 4x^3 + 15x^2 + 12x + 1$.

2.13. $y = 3 - 6x + 15x^2 - 8x^3$. **2.14.** $y = 16x^3 - 12x^2 + 3$.

2.15. $y = -\frac{x^3}{5} + \frac{6}{5}x^2 + 3x - 12$. **2.16.** $y = x(1-x)^3$.

2.17. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **2.18.** $y = 4x^3 + 9x^2 - 12x - 5$.

2.19. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 10$. **2.20.** $y = \left(x^2 - 1\right)^3$.

Завдання 3. Провести повне дослідження і побудувати графіки функцій.

3.1. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$. **3.2.** $y = \frac{3}{x^2 + 3x}$.

3.3. $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$. **3.4.** $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$.

3.5. $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$. **3.6.** $y = \frac{1}{16x^4 - 1}$.

3.7. $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$. **3.8.** $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$.

3.9. $y = \frac{2x^2 + 1}{x^3 - x}$. **3.10.** $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$.

3.11. $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$. **3.12.** $y = \frac{x}{4 + 3x - x^2}$.

3.13. $y = \frac{3x - 4}{x^3}$. **3.14.** $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$.

3.15. $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x}$. **3.16.** $y = -\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$.

3.17. $y = -\frac{3x}{x^2 - 1}$. **3.18.** $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$.

3.19. $y = -\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^2$. **3.20.** $y = \frac{x^3 - 8}{x^2}$.

Самостійна робота 4.

4.Невизначені інтеграли

Таблиця основних невизначених інтегралів

1.	$\int 0dx = C$.
2.	$\int dx = x + C$.
3.	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$.
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\|dx + C; \quad (x \neq 0)$.
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad (0 < a \neq 1)$.
6.	$\int e^x dx = e^x + C$.
7.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$.
8.	$\int \cos x dx = \sin x + C$.
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$.
12.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C; \quad (a \neq 0)$.
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\| + C; \quad (a > 0)$.
14.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C; \quad (a \neq 0)$.
15.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$.
16.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$.
17.	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$.

18.	$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C;\quad (a>0).$

Формула інтегрування частинами.

Якщо $u(x),\ v(x)$ - неперервно-диференційовні функції на (a,b), і на (a,b) існує первісна для $v(x)u'(x)$, то на (a,b) існує первісна для $u(x)v'(x)$, а також справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx.$$

Формула заміни змінних.

Нехай змінну x можна представити у вигляді $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - неперервно-диференційовна функція, що має обернену. Тоді

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Метод невизначених коефіцієнтів (МНК).

Для інтегрування раціональних функцій $\frac{P_n}{R_m}$ перевіряємо, де більший степінь многочлена в чисельнику, чи в знаменнику. Якщо $n\geq m$, то ділимо многочлен на многочлен в стовпчик (виділяємо цілу частину дробу) , якщо $n<m$, то за допомогою МНК розбиваємо дріб на суму простих дробів:

$$\frac{P_n(x)}{R_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(a_1x+b_1)^{s_1}(a_2x+b_2)^{s_2}(x^2+c^2)^{s_3}}=$$

$$\frac{A_1}{(a_1x-b_1)^{s_1}}+\frac{A_2}{(a_1x-b_1)^{s_1-1}}+..+\frac{A_{s_1}}{(a_1x-b_1)}+\frac{B_1}{(a_2x-b_2)^{s_2}}+\frac{B_2}{(a_2x-b_2)^{s_2-1}}+..$$

$$+\frac{B_{s_2}}{(a_2x-b_2)}+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+c^2)^{s_3}}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+c^2)^{s_3-1}}+...+\frac{C_{s_3}x+D_{s_3}}{(x^2+c^2)},$$ де

$A_1,...,A_{s_1},B_1,...,B_{s_2},C_1,D_1,...,C_{s_3},D_{s_3}$ -- невизначені коефіцієнти, які шукаємо звівши суму до спільного знаменника, при цьому чисельник цього дробу прирівнюємо до P_n. Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів, отримуємо систему, з якої знаходимо невизначені коефіцієнти.

Інтегрування тригонометричних функцій.

Можливі заміни : $t=\sin x,\ dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$t=tg\frac{x}{2},dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t=tgx,\ dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Завдання 1. Обчислити невизначені інтеграли.

1.1 $\int\left(x^5-1\right)^3dx$.

1.2 $\int\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x^2}\right)x^{-3/2}dx$.

1.3 $\int\frac{dx}{3x-2}$

1.4 $\int\left(\sqrt{2x-5}-\sqrt[5]{5-3x}\right)dx$

1.5 $\int\frac{dx}{4-5x}$

1.6 $\int\frac{x}{x-1}dx$

1.7 $\int\sin\left(3x-2\right)dx$

1.8 $\int\cos\left(3-2x\right)dx$

1.9 $\int\frac{dx}{\sin^2\left(3x-5\right)}$

1.10 $\int\frac{dx}{cos^2\left(3-5x\right)}$

1.11 $\int 3^{3x-1}dx$

1.12 $\int e^{2x-1}dx$

1.13 $\int\frac{dx}{x^2+4}$

1.14 $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

1.15 $\int\frac{dx}{4x^2+1}$

1.16 $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

1.17 $\int tg^2\left(5x-2\right)dx$

1.18 $\int ctg^2\left(3x-4\right)dx$

1.19 $\int\sin 3x\cos 5xdx$

1.20 $\int\cos^2\left(4x+6\right)dx$

Завдання 2. Обчислити невизначені інтеграли.

2. 1. $\int(2x+5)e^{-3x}dx$.

2.2. $\int(6-x)\cos 2xdx$.

2.3. $\int\ln\left(9x+16\right)dx$.

2.4. $\int(3x+4)\sin\frac{x}{2}dx$.

2.5. $\int(x+1)^2\ln(x+1)dx$.

2.6. $\int\left(x^2-3\right)\cos 3xdx$.

2.7. $\int arctg\left(3x+5\right)dx$.

2.8. $\int\arcsin 2xdx$.

2.9. $\int\arccos 3xdx$.

2.10. $\int x^3\ln xdx$.

2.11. $\int 3^x xdx$.

2.12. $\int\left(x^2-5x+1\right)e^{-x}dx$.

2.13. $\int(2x+7)^2e^{4x}dx$.

2.14. $\int\left(4+x^2\right)\cos 7xdx$.

2.15. $\int(x-2)\ln^2(x-2)dx$.

2.16. $\int\left(x^2+6x-22\right)\sin 6xdx$.

2.17. $\int\left(x+3\right)\ln^2\left(x+3\right)dx$.

2.18. $\int(1-5x)^2\sin\frac{x}{5}dx$.

2.19. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

2.20. $\int\frac{\ln\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^4}dx$.

Завдання 3. Знайти невизначені інтеграли від виразів, що містять квадратний тричлен.

3.1. **а)** $\int \frac{(3+4x)dx}{x^2+6x+10}$. **б)** $\int \frac{(2x^4-x+3)dx}{x(x+1)(x-2)}$.

3.2. **а)** $\int \frac{(2x+5)dx}{4x^2+4x+5}$. **б)** $\int \frac{(x^4-5x^3+4x+1)dx}{x(x^2-1)}$.

3.3. **а)** $\int \frac{(x+6)dx}{x^2+4x+5}$. **б)** $\int \frac{(4x^3-13x^2+16x+5)dx}{(x-1)^3 x}$.

3.4. **а)** $\int \frac{(2x+7)dx}{4x^2+8x+7}$. **б)** $\int \frac{(x^3-8x^2+23x-16)dx}{x(x-2)^3}$.

3.5. **а)** $\int \frac{(3x+7)dx}{4x^2+6x+1}$. **б)** $\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+x+2)(x^2+2)}$.

3.6. **а)** $\int \frac{(3x+8)dx}{9x^2+6x+4}$. **б)** $\int \frac{(x^3+6x^2+9x+6)dx}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$.

3.7. **а)** $\int \frac{(5x+3)dx}{16x^2+4x-3}$. **б)** $\int \frac{(-4x^2+2x-9)dx}{(x^2+x+1)(x^2+4)}$.

3.8. **а)** $\int \frac{(2x+3)dx}{9x^2+3x+1}$. **б)** $\int \frac{(x^3+4x^2+4x+2)dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$.

3.9. **а)** $\int \frac{(2x+9)dx}{x^2+8x+17}$. **б)** $\int \frac{(3x^4-2x^3+5)dx}{(x-1)(x+1)(x-2)}$.

3.10. **а)** $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2+2x+3}$. **б)** $\int \frac{(x^4-2x^2+5)dx}{x(x-2)(x-3)}$.

3.11. **а)** $\int \frac{(4x+5)dx}{4x^2-4x+3}$. **б)** $\int \frac{(-3x^2+3x+18)dx}{x^2(x-3)^2}$.

3.12. **а)** $\int \frac{(3x+4)dx}{9x^2+6x+5}$. **б)** $\int \frac{(-5x^2+15x+40)dx}{(x-2)^2(x+3)^2}$.

3.13. **а)** $\int \frac{(6x-1)dx}{x^2-5x}$. **б)** $\int \frac{(2x^3+4x^2+2x+2)dx}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}$.

3.14. **а)** $\int \frac{(5x+1)dx}{4x^2-4x+1}$. **б)** $\int \frac{(4x^2+7x-2)dx}{(x^2-x+1)(x^2+4)}$.

3.15. **а)** $\int \frac{(x+7)dx}{16x^2+4x+5}$. **б)** $\int \frac{(x^4-5x+4)dx}{x^3-9x}$.

3.16. **а)** $\int \frac{(7x-6)dx}{9x^2-6x+5}$. **б)** $\int \frac{(2x^4-3x+3)dx}{x(x+1)(x-4)}$.

3.17 а) $\int \frac{2x-3}{3x^2-2x-8}dx$ **б)** $\int \frac{(2x^4-3x+3)dx}{(x+1)(x^2-4)}$.

3.18 а) $\int \frac{5x+2}{3x^2+11x-4}dx$ **б)** $\int \frac{(2x^3+4x^2+2x+2)dx}{(x^2+4)(x^2-x+1)}$.

3.19а) $\int \frac{5x+3}{2x^2-13x+15}dx$ **б)** $\int \frac{(2x^4+2)dx}{(x^2+2x)(x-3)}$.

3.20а) $\int \frac{2x-11}{2x^2+7x-15}dx$ **б)** $\int \frac{(2x^4+4x^2+2x+2)dx}{(x^2+x)(x^2+2x+2)}$.

Завдання 4. Знайти невизначені інтеграли.

4.1. $\int \cos 3x \cdot \sin^2 2x dx$. **4.2.** $\int \frac{10+tgx}{5\sin^2 x-9\cos^2 x+3}dx$.

4. 3. $\int \sin^2 x \cdot \cos 4x dx$. **4.4.** $\int \sin^6 \frac{x}{2} dx$.

4.5. $\int \frac{dx}{3+4tgx}$. **4.6.** $\int \frac{dx}{\cos x-6\sin x}$.

4.7. $\int \sin^4 4x \cdot \cos^2 4x dx$. **4.8.** $\int \frac{4+tgx}{2\cos^2 x-5}dx$.

4.9. $\int tg^4 x dx$. **4.10.** $\int \cos 3x \cdot \cos 5x dx$.

4.11. $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$. **4.12.** $\int \cos^4 x dx$.

4.13. $\int \frac{4-3tgx}{7\cos^2 x+3\sin^2 x}dx$. **4.14.** $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$.

4.15. $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x dx$. **4.16.** $\int \frac{7-2tgx}{(5\sin x+2\cos x)^2}dx$.

4.17 $\int \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}$ **4.18** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$.

4.19 $\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x+1}$ **4.20** $\int \cos^3 x \sin^6 x dx$

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли.

5.1. $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{2x+1}}$. **5.2.** $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$.

5.3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$.

5.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

5.5. $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-2}}$.

5.6. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+4}-3\sqrt[3]{x+4}}$.

5.7. $\int \sqrt{\frac{x-4}{x-11}}dx$.

5.8. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{1-5x}}$.

5.9. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{100-x^2}}$.

5.10. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx$.

5.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}$.

5.12. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{1-x}dx$.

5.13. $\int \frac{x^2dx}{\left(81-x^2\right)^{3/2}}$.

5.14. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+8}+\sqrt[3]{x+8}}$.

5.15. $\int \frac{dx}{\left(64+x^2\right)^{3/2}}$.

5.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$.

5.17. $\int \sqrt{9-x^2}dx$.

5.18. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$.

5.19 $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$.

5.20 $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx$.

5.Визначений інтеграл

Формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо функція $\mathrm{f}(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$, а $\mathrm{F}(x)$- її первісна, то

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b .$$

Формула інтегрування частинами.

Якщо існують $u(x),\ v(x)$ - неперервно-диференційовні функції на $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx .$$

Формула заміни змінних.

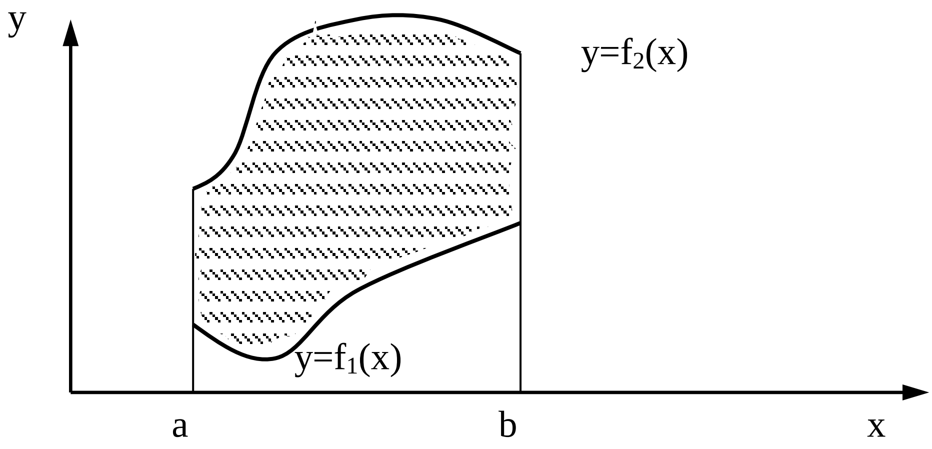
Якщо $\mathrm{f}(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, а $\varphi(t)$ - неперервно-диференційовна функція на (α,β), де $a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

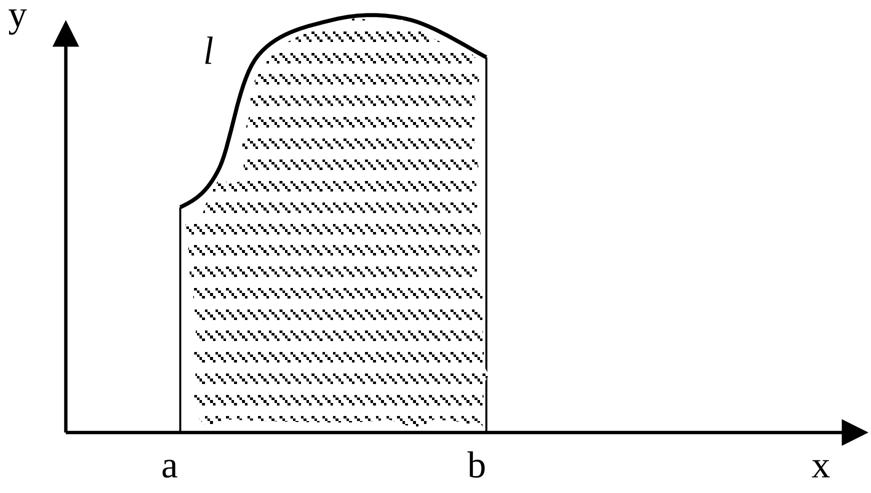
Застосування визначеного інтегралу

1.Обчислення **площ** в прямокутних координатах.

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$



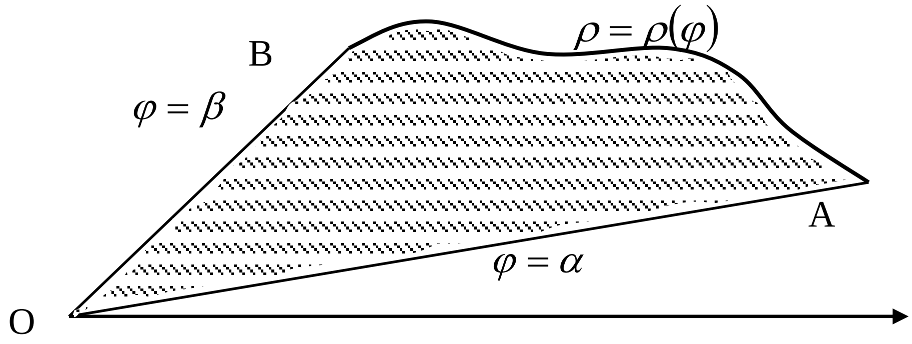
2. Обчислення **площ** при параметричному заданні кривої.



$$l : \begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta; \qquad \left| \begin{array}{l} \varphi(\alpha) = a; \\ \varphi(\beta) = b. \end{array} \right. \qquad S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

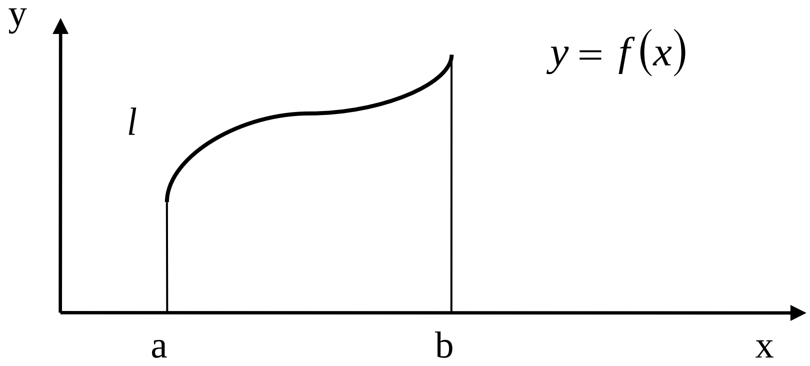
3.**Площа** криволінійного сектора в полярних координатах.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$



4.**Довжина дуги** кривої, заданої в Декартовій системі координат.

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$$

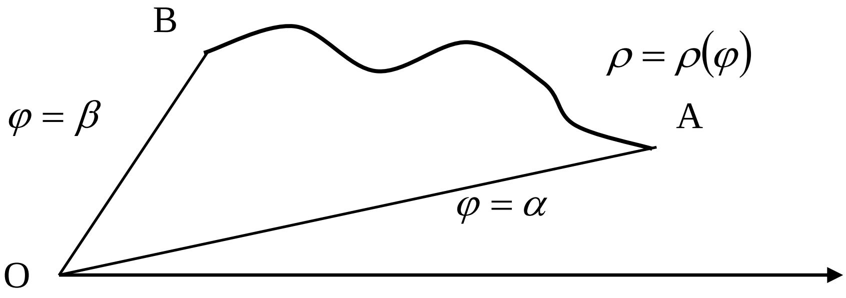


5.**Довжина дуги** кривої у випадку параметричного задання.

$$l:\begin{cases}x=\varphi(t);\\ y=\psi(t);\end{cases}\alpha\le t\le\beta;\qquad \left|\begin{matrix}\varphi(\alpha)=a;\\ \varphi(\beta)=b.\end{matrix}\right.\quad L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt.$$

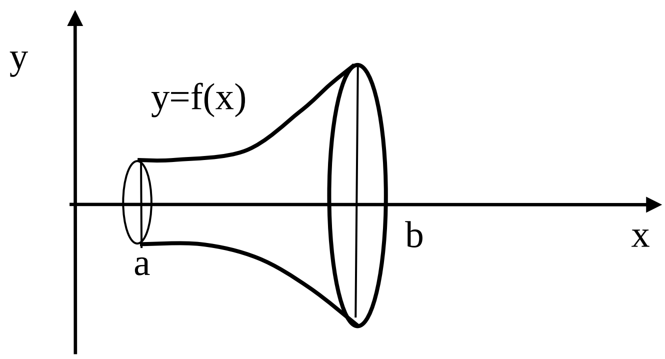
6.**Довжина дуги** кривої в полярних координатах.

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}d\varphi.$$



7.**Об'єм** тіла обертання.

Розглядаємо тіло, утворене обертанням навкруги вісі OX криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю OX та прямими $x = a; \quad x = b$. Об'єм такого тіла можна обчислити за формулою $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$. Якщо тіло утворене обертанням навкруги вісі OY криволінійної трапеції, обмеженої кривими $x = g(y); \; y = c; \; y = d$, справедлива аналогічна формула $V = \pi\int\limits_c^d g^2(y)dy$.



Завдання 1. Обчислити інтеграли.

1.1. $\int\limits_1^3 \operatorname{arctg} x dx$. **1.2.** $\int\limits_{-2}^1 \frac{xdx}{x^3+1}$.

1.3. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} x\sin xdx$. **1.4.** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} x^2\cos 3xdx$.

1.5. $\int\limits_{e/2}^{1} x^2 \ln 2x dx$.

1.6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{-x}}$.

1.7. $\int\limits_{0}^{4} \frac{(x+2)}{\sqrt{3x+4}+1} dx$.

1.8. $\int\limits_{-1}^{0} (2x-3)e^{3x} dx$.

1.9. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

1.10. $\int\limits_{2e}^{3e} \frac{dx}{x \ln x}$.

1.11. $\int\limits_{0}^{3} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$.

1.12. $\int\limits_{0}^{1} x \operatorname{arctg} 2x dx$.

1.13. $\int\limits_{0}^{10} \sqrt{100-x^2} dx$.

1.14. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2^3 \sin^2 x \cos^4 x dx$.

1.15. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x dx$.

1.16. $\int\limits_{0}^{3} x^2 \ln(x+4) dx$.

1.17. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos^2 3x dx$.

1.18. $\int\limits_{-16}^{-11} \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$.

1.19 $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2-x-3}$

1.20 $\int\limits_{4}^{9} \sqrt{x^2+9} dx$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, обмежених заданими кривими. Зробити схематичні малюнки.

2.1. $y = x^2 + 7x; \quad y = 4x + 4$. **2.2.** $y = 4 - x^2; \quad y = x^2 - 2x$.

2.3. $x = 9 - y^2; \quad x = y^2 - 3y$. **2.4.** $y = 3x^2 - 5x + 1; \quad y = 2x - 1$.

2.5. $xy = 7; \quad x + y = 8$. **2.6.** $y = x^2 - 3x - 2; \quad y = -2x$.

2.7. $y = x^2 + 4x; \quad y = 7x + 4$. **2.8.** $x^2 - 3y = 4; \quad x^2 + y = 8$.

2.9. $y = (x-1)^2; \quad y^2 = x - 1$. **2.10.** $y^2 + 4x = 4; \quad y^2 - 12x = 36$.

2.11. $y = 2x^2 + 7x + 1; \quad y = 2x - 1$.

2.12. $y = x^2 - 2x + 4; \quad 9x + y + 2 = 0$.

2.13. $y = 4x - 3x^2; \quad y + 3x - 2 = 0$. **2.14.** $y = x^2 - 3x; \quad y = 2x - 6$.

2.15. $y = x^2 - 2x + 1; \quad y = 3x - 5$. **2.16.** $y = 5x - 2x^2; \quad y = 2x - 2$.

2.17. $x^2 - 2y = 3; \quad x^2 - y = 4$. **2.18.** $y = 2x^2 + 6x + 5; \quad y = x + 3$.

2.19. $y = x^2 - 5x + 1; \quad 2x + y - 1 = 0$. **2.20.** $y^2 + 2x = 6; \quad y - 2x = 2$.

Завдання 3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями. заданими рівняннями в полярних координатах. Зробити схематичні малюнки.

3.1. $\rho = 3 - \cos\varphi; \quad \rho = 1$. **3.2.** $\rho = 2 + \cos\varphi; \quad \rho = 3$.

3.3. $\rho = 2 - \sin\varphi; \quad \rho = 1$. **3.4.** $\rho = \sin 3\varphi; \quad \varphi = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$.

3.5. $\rho^2 = \cos 2\varphi; \varphi = -\frac{\pi}{4}; \varphi = \frac{\pi}{4}$. **3.6.** $\rho = \varphi; \varphi = \frac{\pi}{3}; \varphi = \frac{\pi}{4}$.

3.7. $\rho = 4 + \cos\varphi; \rho = 3 - \cos\varphi$. **3.8.** $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$.

3.9. $\rho = 2(1 - \sin\varphi)$. **3.10.** $\rho = 3 + \sin\varphi; \quad \rho = 2$.

3.11. $\rho = 3\sin 2\varphi; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{4}$. **3.12.** $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{2}$.

3.13. $\rho = 2\cos 4\varphi$. **3.14.** $\rho^2 \cos 2\varphi = 1; \varphi = -\frac{\pi}{8}; \varphi = \frac{\pi}{8}$.

3.15. $\rho = 6 - \cos 2\varphi$. **3.16.** $\rho = 2\cos 6\varphi$.

3.17. $\rho = e^{\varphi}; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{4}$. **3.18.** $\rho = \frac{13}{2\pi}\varphi; \varphi = \frac{\pi}{12}; \varphi = \frac{\pi}{4}$.

3.19. $\rho = \sin\phi + \cos\phi; \phi = \pi; \phi = \frac{3\pi}{2}$. **3.20.** $\rho = 3\cos 2\phi$.

Завдання 4. Обчислити довжини дуг наступних кривих.

4.1. $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t; \\ y = 6\sin t - 8\cos t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

4.2. $y = \ln\sin x; \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

4.3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t); \\ y = 4(\sin t - t\cos t); \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$.

4.4. $\rho = 2(1 - \cos\varphi); \quad 0 \le \varphi \le \pi$.

4.5. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x; \; 0 \le x \le \frac{7}{9}$.

4.6. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t); \\ y = e^t(\cos t - \sin t); \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

4.7. $\rho = 3e^{\frac{3}{4}\varphi}; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

4.8. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t; \\ y = 2t\sin t + (2 - t^2)\cos t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$.

4.9. $\begin{cases} x = 4\sin t + 3\cos t; \\ y = 3\sin t - 4\cos t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}.$

4.10. $y = 1 - \ln\sin x; \quad \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

4.11. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t); \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t); \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

4.12. $\rho = 6\cos\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

4.13. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

4.14. $y = \arcsin e^{-x}; \quad 0 \le x \le 1$.

4.15. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t; \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

4.16. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}; \quad 0 \le x \le 2$.

4.17. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x; \quad 1 \le x \le 2.$

4.18. $\rho = 1 + \cos\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}.$

4.19 $\rho = 1 - \sin\varphi, \ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi.$

4.20 $y = x^2 \ln x, 1 \le x \le e.$

Завдання 5. Обчислити об’єми тіл, утворених поверхнями, отриманими при обертанні наступних ліній:

5.1. $y = 2\left(\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \ (0 \le x \le 3)$ навколо вісі OX .

5.2. $y = e^x; \ y = 1; \ x = \ln 2$ навколо вісі OX .

5.3. $x = 5 - y^2; \ \ x = 5 - 2y$ навколо вісі OY .

5.4. $y = -x^2 + 5x - 4; \ y = 0$ навколо вісі OX .

5.5. $x = 5y^2; \ x = 5$ навколо вісі OY .

5.6. $y = \ln x; \ y = 1; \ x = e^2$ навколо вісі OX .

5.7. $y=\sin x;\ y=2\sin x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ навколо вісі OX .

5.8. $y=e^{x};\ y=e^{-x};\ x=1$ навколо вісі OX .

5.9. $y=2x-x^{2};\ y=0$ навколо вісі OY .

5.10. $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1;\ x=3$ навколо вісі OX .

5.11. $y=xe^{x};\ x=1;\ y=0$ навколо вісі OX .

5.12. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ навколо вісі OY .

5.13. $y=e^{x}-1;\ y=4;\ x=0$ навколо вісі OX .

5.14. $y=x^{2};\ y^{2}=x$ навколо вісі OX .

5.15. $y=\arcsin x\ (0\le x\le 1)$ навколо вісі OX .

5.16. $x^4+y^4=x^2$ навколо вісі OX .

5.17. $x^2+y^2=5^2$ навколо вісі OX .

5.18. $y=e^{x};\ y=e^{-x};\ x=-1$ навколо вісі OX .

5.19. $y=x-x^{2};\ y=0$ навколо вісі OY .

5.20. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1;\ (-2\le x\le -1)$ навколо вісі OY .

6.Невласні інтеграли

Невласні інтеграли першого роду визначаються наступними рівностями

$$\boxed{\int\limits_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{B\to\infty}\int\limits_a^{B} f(x)dx;\qquad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^{b} f(x)dx}$$

, якщо написані границі існують. Якщо границі не існують або дорівнюють $\pm\infty$, тоді інтеграли називаються *розбіжними*.

Асимптотична ознака порівняння

Маємо невласні інтеграли $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$. Якщо $f(x)\underset{x\to\infty}{\sim} Cg(x)$, де C - стала, тоді ці інтеграли збігаються або розбігаються одночасно.

Асимптотично-степенева ознака порівняння

Якщо $f(x)\underset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{C}{x^{\alpha}}$, де C - стала, тоді при $\left| \begin{array}{l} \alpha > 1 \Rightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)dx \text{ збіжний;} \\ \alpha \le 1 \Rightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)dx \text{ розбіжний.} \end{array} \right.$

Нехай $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,c)$, а в околі точки с функція $f(x)$ необмежена, $\boxed{\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b \to c-0} \int\limits_a^b f(x)dx.}$ Якщо ж $f(x)$ має розрив в лівому кінці відрізка $[a,c]$, тоді $\boxed{\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b \to a+0} \int\limits_b^c f(x)dx}$. Такі інтеграли називаються невласними інтегралами другого роду.

Асимптотично-степенева ознака порівняння

Якщо $f(x) \underset{x \to b-0}{\sim} \dfrac{C}{(b-x)^{\alpha}}$, тоді при $\left| \begin{array}{l} \alpha \ge 1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{розбіжний;} \\ \alpha < 1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{збіжний.} \end{array} \right.$

Якщо $f(x) \underset{x \to a+0}{\sim} \dfrac{C}{(x-a)^{\alpha}}$, тоді при $\left| \begin{array}{l} \alpha \ge 1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{розбіжний;} \\ \alpha < 1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{збіжний.} \end{array} \right.$

Завдання 1.

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

1.1. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^4}$. **1.2.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}dx$. **1.3.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$.

1.4. $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{\ln x}{x}dx$. **1.5.** $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x}{(1+x)^3}dx$. **1.6.** $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1.7. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin x dx$. **1.8.** $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{arctgx}{x^2}dx$. **1.9.** $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.10. $\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{x^2-4x+3}$. **1.11.** $\int\limits_0^{1} x\ln x dx$. **1.12.** $\int\limits_0^{e^{-1}} \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

1.13 $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{arctg(x+1)dx}{x^2+2x+2}$. **1.14.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x}\sin 2x dx$. **1.15.** $\int\limits_6^{\infty} \dfrac{dx}{x^2-6x+8}$.

1.16. $\int_{5}^{\infty}\frac{\left(x^2+5\right)dx}{\sqrt{x^2-4}}$. **1.17.** $\int_{0}^{\infty}e^{-5x}\cos 3x dx$. **1.18.** $\int_{5}^{\infty}\frac{arctg\left(x-3\right)}{x^2-6x+10}dx$.

1.19. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{8-x^2-2x}}$. **1.20.** $\int_{0}^{5}\frac{dx}{x^2-3x-10}$.

Завдання 2.
Дослідити невласні інтеграли на збіжність.

2.1. $\int_{0}^{2}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{4-x^2}}dx$.

2.2. $\int_{0}^{\infty}\frac{x arctg\frac{x}{2}}{\sqrt[5]{x^2+4}}dx$.

2.3. $\int_{1}^{\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^3-x^2+1}dx$.

2.4. $\int_{0}^{\infty}\frac{x^{17}}{\left(x^5-x^3+1\right)^4}dx$.

2.5. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^{2x}-\cos 2x}$.

2.6. $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt[3]{x^2}dx}{4x-x^{7/6}}$.

2.7. $\int_{0}^{1}\frac{\cos x}{\sqrt[5]{1-x^2}}dx$.

2.8. $\int_{0}^{\infty}\frac{arctg 3x}{\sqrt[3]{9x^2+1}}dx$.

2.9. $\int_{1}^{\infty}\frac{x^6\sqrt[4]{x}-5\sqrt[3]{x^2}-1}{x^7-3x^2+6}dx$.

2.10. $\int_{0}^{\infty}\frac{2x^5-3x^2+1}{\left(x^3-3x+6\right)^4}dx$.

2.11. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{xe^x-\sin x}$.

2.12. $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{4\sqrt{x}-x^{5/6}}$.

2.13. $\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$.

2.14. $\int_{0}^{\infty}\frac{x arctg x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$.

2.15. $\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^3+1}dx$.

2.16. $\int_{0}^{\infty}\frac{x^{13}}{\left(x^5+x^3+1\right)^3}dx$.

2.17. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^x-\cos x}$.

2.18. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$.

2.19. $\int_{0}^{\infty}\frac{2x^3-1}{x^5+x^2+1}dx$.

2.20. $\int_{0}^{\infty}\frac{2x^8-2x^5-1}{\left(x^5-2x^3+34\right)^3}dx$.

Самостійна робота №5.

Функції багатьох змінних

Диференціалом du диференційовної в точці $M_0\left(a_1,a_2\right)$ функції $u=f\left(x_1,x_2\right)$ називається $\boxed{du\,|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(M_0\right)dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(M_0\right)dx_2}$.

Диференціалом du диференційовної в точці $M_0\left(a_1,a_2,\ldots a_m\right)$ функції $u=f\left(x_1,x_2,\ldots x_m\right)$ називається

$$\boxed{du\,|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(M_0\right)dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(M_0\right)dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\left(M_0\right)dx_m}.$$

Застосування диференціалу до наближених обчислень

Якщо точки $M\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$ та $M_0\left(a_1,a_2,\ldots a_m\right)$ близькі і містяться в області, де функція u диференційовна, тоді

$$f\left(x_1,x_2,\ldots x_m\right)\approx f\left(a_1,a_2,\ldots a_m\right)+\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(M_0\right)\Delta x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(M_0\right)\Delta x_2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\left(M_0\right)\Delta x_m,$$

де $\Delta x_1=x_1-a_1;\quad \Delta x_2=x_2-a_2;\ldots;\Delta x_m=x_m-a_m$.

Диференціювання складної функції

Розглянемо складну функцію вигляду $u=f\left(x_1,x_2,\ldots x_m\right)$, де

$$\begin{cases} x_1=x_1\left(t_1,t_2,\ldots,t_k\right), \\ x_2=x_2\left(t_1,t_2,\ldots,t_k\right), \\ \qquad\ldots \\ x_m=x_m\left(t_1,t_2,\ldots,t_k\right). \end{cases}$$

Якщо функції $x_i\left(t_1,t_2,\ldots,t_k\right);\quad i=\overline{1,m}$ диференційовні в деякій точці $M\left(\overline{t_1},\overline{t_2},\ldots,\overline{t_k}\right)$, а функція $u=f\left(x_1,x_2,\ldots x_m\right)$ диференційовна у відповідній точці $N\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots\overline{x_m}\right)$, де $\overline{x_i}=x_i\left(\overline{t_1},\overline{t_2},...,\overline{t_k}\right)$, тоді складна функція $u=f\left(x_1,x_2,\ldots x_m\right)$ диференційовна в точці $M\left(\overline{t_1},\overline{t_2},\ldots,\overline{t_k}\right)$. При цьому частинні похідні цієї складної функції в точці M визначаються формулами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_1}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_2}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{cases}$$

Для випадку, коли функція $u = f(x, y)$ залежить від двох змінних $x = x(t,s),\ y = y(t,s)$, її частинні похідні обчислюватимуться наступним чином $\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} \end{cases}}$.

Градієнт функції $u = f(x, y, z)$ в точці M_0: $grad u(M_0) = \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0), \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0), \dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0) \right\}$.

Похідна функції $u = f(x, y, z)$ **за напрямком** вектора $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ в точці M_0: $\dfrac{\partial u}{\partial a}(M_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cdot\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cdot\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cdot\cos\gamma =$

$$= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cdot a_x + \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cdot a_y + \dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cdot a_z}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}}.$$

Важливим застосуванням диференціювання ФВА є відшукання ***локальних та глобальних екстремумів функції***. Для цього спершу визначаємо критичні точки функції(точки в яких перші частинні похідні рівні 0 або не існують): складаємо систему, в якій кожна частинна похідна першого порядку прирівнюється до нуля. Наприклад у випадку коли змінних три матимемо наступну систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dx} = 0; \\ \dfrac{\partial u}{dy} = 0; \\ \dfrac{\partial u}{dz} = 0. \end{cases}$$ З неї шукаємо точки, які задовольняють цю систему, або точки в яких яка-небудь частинна похідна є невизначеною. Ці точки можуть бути точками екстремуму.

Другий крок: знаходимо диференціал другого порядку і перевіряємо в кожній точці чи цей диференціал додатньозначний(точка мінімуму) чи від'ємнозначний(точка максимуму), якщо знак форми другого диференціала не визначений, тоді точка не є точкою екстремума. Для цього скористайтеся критерієм Сильвестра.

Завдання 1. Задана функція двох змінних $z = z(x, y)$. Перевірити, чи задовольняє вона дане диференціальне рівняння в частинних похідних.

1.1. $z = \ln\left(\sqrt{x} - 3y\right)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

1.2. $z = x^y$; $\quad y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

1.3. $z = e^{xy}$; $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

1.4. $z = \sin(x + ay)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.5. $z = \dfrac{x}{y}$; $\quad x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

1.6. $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $\quad (x - y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1.7. $z = tg^2(2x - 3y)$; $\quad 3\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.8. $z = arctg\dfrac{x}{y}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.9. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2(x + y)}{x - y}$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.10. $z=\ln\left(x^2-y^2\right)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x+y}$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1.11. $z=\sqrt{x^2-3y^2}$; $3y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1.12. $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1.13. $z=\left(x^2+y^2\right)tg\dfrac{x}{y}$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1.14. $z=e^{-x-3y}\sin(x+3y)$**;** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$**.**

1.15. $z=\ln\dfrac{x}{y}+x^3-y^3$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=3\left(x^3-y^3\right)$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1.16. $z=\cos^2(x-4y)$**;** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$**.**

1.17. $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1.18. $z=\ln\dfrac{x-2y}{2x-y}$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1.19. $z=arctg\sqrt{xy}$; $\sqrt{\dfrac{x}{y}}\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1.20. $z=\sin^2(3x-2y)$; $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$

Завдання 2.

Обчислити значення виразу, замінивши приріст відповідної функції диференціалом.

2.1. $(1{,}03)^2(0{,}98)^3$**.**   **2.2.** $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$ **.**

2.3. $\dfrac{2{,}03}{(2{,}03)^4+(2{,}97)^2}$.   **2.4.** $\ln\left(\sqrt[5]{0{,}98}+\sqrt[4]{1{,}03}-1\right)$**.**

2.5. $arctg\dfrac{0{,}98}{1{,}01}$**.**   **2.6.** $1{,}04^{2{,}02}$**.**

2.7. $\sqrt{3{,}97^2+3{,}02^2}$ **.**   **2.8.** $1{,}02^{2{,}04}-\ln 1{,}02$**.**

2.9. $0{,}97^{5{,}03}$.

2.10. $\left(2-\sqrt{0{,}97}\right)^{3{,}02}$.

2.11. $\left(0{,}99\right)^{2}\left(0{,}98\right)^{3}$.

2.12. $\sqrt{1{,}01^{2}+1{,}97^{3}}$.

2.13. $\dfrac{2{,}01}{\left(2{,}01\right)^{4}+\left(2{,}98\right)^{2}}$.

2.14. $\ln\left(\sqrt[3]{0{,}97}+\sqrt[4]{1{,}01}+1\right)$.

2.15. $\arcsin\left(\sqrt{1{,}02}-0{,}49\right)$.

2.16. $0{,}98^{2{,}01}$.

2.17. $\sqrt[3]{7{,}97\ \ +8{,}02^{2}}$.

2.18. $1{,}02^{1{,}98}-\ln 0{,}97$.

2.19. $0{,}97^{5{,}93}$.

2.20. $\left(2-\sqrt{1{,}01}\right)^{2{,}97}$.

Завдання 3. Задана функція $u=u(x,y,z)$, точка $A(x_0,y_0,z_0)$ та вектор $\bar{s}$. Знайти:

а)градієнт функції u в точці A;

б)похідну функції u в точці A за напрямком вектора $\bar{s}$.

3.1. $u=x\cdot\arcsin\left(\dfrac{y}{z}\right)$; $A(-1,1,2)$; $\bar{s}=\{1,-1,1\}$.

3.2. $u=e^{xy-z}$; $A(-1,-2,0)$; $\bar{s}=\{5,6,2\}$.

3.3. $u=ar\cos\left(x+yz\right)$; $A\left(-1,-1,1\right)$; $\bar{s}=\{2,-3,11\}$.

3.4. $u=\ln\left(3\dfrac{x}{y}+z^{2}\right)$; $A(0,1,1)$; $\bar{s}=\{4,-3,1\}$.

3.5. $u=\mathrm{arc}\,tg\left(\dfrac{x\sqrt{z}}{y}\right)$; $A\left(1,2,4\right)$; $\bar{s}=\{1,-2,5\}$.

3.6. $u=4\dfrac{xy^{3}}{z}+yz^{3}$; $A\left(2,-1,1\right)$; $\bar{s}=\{5,-8,6\}$.

3.7. $u=\dfrac{3x+y-z}{x+2y+z}$; $A(3,-1,4)$; $\bar{s}=\{1,1,1\}$.

3.8. $u=\arccos\left(\dfrac{x^{2}+y^{2}}{z}\right)$; $A\left(0,\dfrac{1}{4},1\right)$; $\bar{s}=\{2,-5,2\}$.

3.9. $u=xy\cdot e^{yz}$; $A(1,1,-2)$; $\bar{s}=\{-5,0,8\}$.

3.10. $u=\ln\left(x^{2}-y^{3}+z^{4}+1\right)$; $A(5,1,2)$; $\bar{s}=\{0,1,1\}$.

3.11. $u=z\cdot arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $A(-1,1,2)$; $\bar{s}=\{1,-1,1\}$.

3.12. $u=e^{xyz}$; $A(-1,-2,0)$; $\bar{s}=\{5,6,2\}$.

3.13. $u=arctg(xyz)$; $A(-1,-1,6)$; $\bar{s}=\{2,-3,11\}$.

3.14. $u = \ln\left(3xy + 2xy^2 z + z^2\right)$; $A(0,1,1)$; $\bar{s} = \{4,-3,1\}$.

3.15. $u = \arcsin\left(\dfrac{xz}{\sqrt{y}}\right)$; $A\left(\sqrt{2},4,\dfrac{1}{2}\right)$; $\bar{s} = \{1,-2,5\}$.

3.16. $u = 4x^4 z + 2xy^3 + yz^3$; $A(2,1,0)$; $\bar{s} = \{5,-8,6\}$.

3.17. $u = \dfrac{3x + y - z}{x + 2y + z}$; $A(3,-1,4)$; $\bar{s} = \{1,1,1\}$.

3.18. $u = \arccos\left(\dfrac{x^2 + y^2}{z}\right)$; $A\left(0,\dfrac{1}{4},1\right)$; $\bar{s} = \{2,-5,2\}$.

3.19. $u = xy \cdot e^{yz}$; $A(1,1,-2)$; $\bar{s} = \{-5,0,8\}$.

3.20. $u = \ln\left(x^2 - y^3 + z^4 + 1\right)$; $A(5,1,2)$; $\bar{s} = \{0,1,1\}$.

Завдання 4.

Знайти локальні екстремуми даних функцій.

4.1. $u = x^2 + y^2 + xy - 2x - y - 11$. **4.2.** $u = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

4.3. $u = x^3 + y^3 - 9xy$. **4.4.** $2x^3 + 2y^3 - 36xy + 50$.

4.5. $u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

4.6. $u = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$. **4.7.** $u = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

4.8. $u = 6x^2 - x^3 + y^2 - 2y$. **4.9.** $u = x^3 + xy^2 + 6xy$.

4.10. $u = x^3 y^2 (6 - x - y)$. **4.11.** $u = 2x^2 - y(x-1)^2$.

4.12 $u = 4x^2 + 4y^2 + 2xy - 2x - y - 5$. **4.13.** $u = x^3 + 3y^3 - 9xy + 6$.

4.14. $2x^3 + 2y^3 - 24xy - 47$. **4.15.** $u = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 15$.

4.16 $u = x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x + 5y + 7$.

4.17. $u = x^2 + y^2 - 4x - 4y - 27$. **4.18.** $u = 6x^2 - 12x^3 + y^2 - 2y - 1$.

4.19. $u = y^3 + 6xy - 3y^2 x + 7$. **4.20.** $u = x^3 y^2 - x^3 y - 13$.

Завдання 5.

Знайти умовний екстремум функції $u = f(x, y)$, якщо рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$.

5.1 $u = x^2 - 3y^2 - 3$ $\varphi(x, y) = 2x + 6y - 4 = 0$

5.2. $u = x^2 - y^2$; $\varphi(x, y) = 2x - 3y - 1 = 0$.

5.3. $u = x^2 - xy + y^2 - 4x$; $\varphi(x, y) = 2x + 3y - 12 = 0$.

5.4. $u=\frac{1}{2}x^2-xy$; $\varphi(x,y)=y-\frac{1}{3}x^2=0$.

5.5. $u=x^2+y^2+xy-2x-y$; $\varphi(x,y)=x-2y+3=0$.

5.6. $u=4x-4y-x^2-y^2$; $\varphi(x,y)=2x-y=0$.

5.7. $u=(x-1)^2+2y^2$; $\varphi(x,y)=x+y+1=0$.

5.8. $u=4y^3+3x^2+y^2-4y$; $\varphi(x,y)=x-1=0$.

5.9. $u=x^2-y^2-4x$; $\varphi(x,y)=x^2+y^2=9$.

5.10 $u=2x^2+3y^2-x-8y-17$ $\varphi(x,y)=4x+6y+1=0$.

5.11 $u=x^2+3y^2+5$ $\varphi(x,y)=2x-y+5=0$

5.12. $u=7-x^2+y^2-3xy$; $\varphi(x,y)=x+y-1=0$.

5.13. $u=x^2-2xy+y^2-4x-3$; $\varphi(x,y)=2x+y-8=0$.

5.14. $u=\frac{1}{2}y^2-xy-9$; $\varphi(x,y)=x-\frac{1}{3}y^2=0$.

5.15. $u=x^2+y^2-x-2y-7$; $\varphi(x,y)=x-2y+7=0$.

5.16. $u=2x-2y+x^2-y^2-4$; $\varphi(x,y)=2x-y=0$.

5.17. $u=2(y-1)^2+x^2$; $\varphi(x,y)=x-y+1=0$.

5.18. $u=4x^3+x^2+3y^2-4y-3$; $\varphi(x,y)=y-x-1=0$.

5.19. $u=2x^2-y^2-4x-4$; $\varphi(x,y)=x^2+y^2=4$.

5.20. $u=3x^2+4y^2-6x-8y+18$ $\varphi(x,y)=2x-3y+1=0$.

Завдання 6. Перевірити, чи є функція $u=u(x,y,z)$ розв'язком даного диференціального рівняння (φ та ψ - довільні , достатню кількість разів диференційовні функції).

6.1. $u=x+\varphi(xy)$; $x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}-x=0$.

6.2. $u=x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$; $2x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0$.

6.3. $u=\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$; $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

6.4. $u=\varphi(x-y,y-z)$; $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

6.5. $u=\varphi\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$; $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

6.6. $u=\varphi(x)\psi(y)$; $\quad u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

6.7. $u=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$; $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

6.8. $u=x\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)+y\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0$.

6.9. $u=\varphi(xy)+\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\quad x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

6.10. $u=x+y+\varphi(xy)$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}-x+y=0$.

6.11. $u=\sqrt{x^2+y^2}\,\varphi\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

$(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0$.

6.12. $u=\sin y+\varphi(\sin x-\sin y)$; $\quad \sec x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial u}{\partial y}-1=0$.

6.13. $u=x^5\varphi\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}-5z=0$.

6.14. $u=y\varphi\left(x^2-y^2\right)$; $\quad y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+xy\dfrac{\partial u}{\partial y}-xu=0$.

6.15. $u=xy+\varphi(x-y)$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-x-y=0$.

6.16. $u=\varphi(x-2)\psi(y+2)$; $\quad u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

6.17. $u=\varphi(2x+y)+\psi(x-2y)$; $\quad 2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial xy}=0$.

6.18. $u=x\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\quad \dfrac{x}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{x}{y}u=0$.

6.19. $u=\dfrac{x}{y}\varphi(xy)$; $\quad y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}-\left(\dfrac{x^2+y^2}{y^2}\right)u=0$.

6.20. $u=x-y+\varphi(xy)$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}-x+y=0$.

Самостійна робота № 6.

7.Числові ряди

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ **-- числовий ряд**, $a_n \in \mathbb{R}$ -- *загальний член* числового ряду.

Необхідна умова збіжності ряду.

Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

збіжний (сума дорівнює скінченному числу), то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

!!! Наслідок. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$,то ряд розбіжний.

Якщо ряд знакосталий, тоді для дослідження його збіжності використовується одна з наступніх ознак.

Узагальнена ознака порівняння.

Якщо $a_n \sim C \cdot \frac{1}{n^p}, \quad n \to \infty$, де C, p - деякі сталі, то ряд збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$.

Ознака Даламбера.

Якщо $a_n > 0, \ n = 1,2,\ldots$ і $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$.

Ознака Коші радикальна.

Якщо $a_n \ge 0, \ n = 1,2,\ldots$ і $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$.

Ознака Коші інтегральна. $a_n = a(n) > 0$. Ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ і інтеграл $\int_{n_0}^{\infty} a(n)dn$ збігаються і розбігаються одночасно.

Якщо ж ряд знакозмінний, тоді для збіжності використовуємо поняття абсолютної та умовної збіжності. Якщо ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a|_n$ збігається, тоді ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **збігається абсолютно**. Якщо ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a|_n$ розбігається, а ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

збігається, тоді ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **збігається умовно**. Для ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a|_n$ використовуємо вищезгадані ознаки, а якщо він розбігається, тоді для знакозмінного $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ використовуємо наступні ознаки.

Якщо ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, тоді застосовуємо

Ознака Лейбніца збіжності знакозмінного ряду.

Нехай виконуються умови: 1) $a_n \geq 0,\ n = 1,2,\ldots$;

2) $a_n \geq a_{n+1} \forall n \geq n_0$; 3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ збіжний.

Для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, використовуємо

Ознака Діріхле збіжності знакозмінного ряду.

Нехай виконуються умови: 1) $a_n \to 0, n \to \infty$ монотонно, 2) $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists C > 0 : \left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| < C$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається.

Завдання 1. Дослідити ряди на збіжність.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n(n+1)}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

1.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

1.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}$.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$.

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$.

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg\frac{1}{n}\right)^n$.

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$.

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$.

1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$.

1.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

1.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n-2)}$.

1.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\sqrt{n}}$.

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg\,\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^2+1}$.

1.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(3^{-n}\right)}{n^2}$.

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(arctg\,\frac{1}{n}\right)^2}{n\sqrt{n}}$.

1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(3^{-n}\right)}{n^2}$

Завдання 2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3n}{2n+5}\right)^n$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n^n}{n!4^{n-1}}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)(n+2)}$.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)!}{n^n}$.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n^{10}}{(\ln n)^n}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2^n}{n!}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-10)^{-n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n^2}$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)!}{(2n-1)!}$.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n+1}\,e^{-n^2+2n}$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2}$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,arctg\,n}{n^3+3n}$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{7n^3-3n+1}$.

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 3n}{n^3+3}$.

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n^2-1\right)}{n^5+n^2+1}$

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{n}{n^3-1}\right)$.

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cos 5n}{5n^3-2n^2+1}$

8.Функціональні ряди

Степеневі ряди

Для кожного **степеневого ряду**

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

існує **інтервал збіжності** $|x - x_0| < R$, всередині якого даний ряд збіжний, а зовні розбіжний, на межах інтервала збіжність ряду досліджуються окремо. **Радіус збіжності** R можна знайти за допомогою формул

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{або} \quad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Всередині свого інтервалу збіжності степеневі ряди можна почленно диференціювати і інтегрувати.

Завдання 3. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$ **.**

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$ **.**

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n n}{3^n + 5^n}$ **.**

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3x-4)^n}{3^n}$ **.**

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot (2x-3)^n$ **.**

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+\cos \pi n)(2x)^n}{\sqrt{n}}$ **.**

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$ **.**

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{(-2)^n + 3^n}$ **.**

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x-4)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ **.**

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^n}{\ln n}$ **.**

3.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{2^{n^2}}$ **.**

3.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi^n}{8^n} \cdot (x-2)^n$ **.**

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi}{4^n} \cdot (\pi x - 1)^n$ **.**

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^{n-1}}{n^2+1} \cdot (3x)^n$ **.**

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\, \frac{\pi^n}{2^{2n}} \cdot (x+1)^n$ **.**

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(4^n + \frac{\cos \pi n}{n}\right) \cdot (x-\pi)^n$ **.**

3.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^3}(x+1)^n$. **3.18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi^n}{6^n}\cdot(x-2)^n$.

3.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n n^2}{2^n+7^n}$. **3.20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3+1)(2x+1)^n}{3^n}$.

Ряди Тейлора.

Нехай функція $f(x)$ має похідні усіх порядків в околі точки x_0 і залишковий член формули Тейлора для функції $f(x)$ в точці x_0 задовольняє співвідношення $R_n(x)\to 0, n\to\infty$. Тоді $f(x)$ може бути записана у вигляді степеневого ряду за степенями $(x-x_0)$:

$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$ -- **ряд Тейлора**.

Якщо $x_0=0$, то відповідний степеневий ряд називають *рядом Маклорена*: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$.

Розклад у ряд Маклорена основних елементарних функцій:

$$(1)\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(R=\infty).$$

$$(2)\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad(R=\infty).$$

$$(3)\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\quad(R=\infty).$$

$$(4)\ (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\qquad(R=1).$$

$$(5)\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \qquad (R=1).$$

І додатково запишемо ще одну формулу, яка часто використовується

$$(6)\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ (R=1)$$

Завдання 4. Розкласти задані функції в ряд Маклорена і вказати радіус збіжності.

4.1. $f(x)=3^x$.

4.2. $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^2}$. Вказівка. Розкласти $\frac{1}{(1-x)^2}$ по степенях x, а потім його домножити на $(1+x)$.

4.3. $f(x)=4^{-x^3}$.

4.4. $f(x)=\cos^2 x$.

4.5. $f(x)=\sin x^2$.

4.6. $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

4.7. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.8. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

4.9. $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$.

4.10. $f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}$. Вказівка. Розкласти даний дріб в суму найпростіших.

4.11. $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$.

4.12. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

4.13. $f(x)=\frac{2}{1-3x^2}$.

4.14. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$.

4.15. $f(x)=\frac{2}{1+3x^2}$.

4.16. $f(x)=\cos 3x^3$.

4.17. $f(x)=x\sin x^4$.

4.18. $f(x)=x\sqrt[3]{1+x^2}$.

4.19. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[6]{1-3x^5}}$.

4.20. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x^3}}$.

Завдання 5.

5.1. Розкласти $f(x)=\ln x$ у ряд Тейлора за степенями $(x-1)$.

5.2. Розкласти $f(x)=\dfrac{1}{x}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+1)$.

5.3. Розкласти $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+4)$.

5.4. Розкласти $f(x)=e^x$ у ряд Тейлора за степенями $(x+2)$.

5.5. Розкласти $f(x)=\sqrt{x}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+4)$.

5.6. Розкласти $f(x)=\cos x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.7. Розкласти $f(x)=\cos^2 x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5.8. Розкласти $f(x)=chx$ у ряд Маклорена.

5.9. Розкласти $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$ у ряд Маклорена.

5.10. Розкласти $f(x)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dx$ у ряд Маклорена.

5.11. Розкласти $f(x)=\ln(x+2)$ у ряд Тейлора за степенями $(x+1)$.

5.12. Розкласти $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+5)$.

5.13. Розкласти $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+2)$.

5.14. Розкласти $f(x)=e^{-x}$ у ряд Тейлора за степенями $(x-2)$.

5.15. Розкласти $f(x)=\sqrt[3]{x}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+4)$.

5.16. Розкласти $f(x)=\sin 2x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.17. Розкласти $f(x)=\sin^2 x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.18. Розкласти $f(x)=shx$ у ряд Маклорена.

5.19. Розкласти $f(x)=\ln\left(x^2-7x+6\right)$ у ряд Маклорена.

5.20. Розкласти $f(x)=\int\limits_0^x \sin t^2 dx$ у ряд Маклорена.

Ряди Фур'є.

Якщо функція $\mathrm{f}(x)$ є кусково-гладенькою на інтервалі $(-\pi,\pi)$, періодичною з періодом $2l$, то функція $\mathrm{f}(x)$ у кожній точці x неперервності може бути представлена своїм рядом Фур'є :

$$\boxed{\mathrm{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)},\text{ де}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,2,\ldots,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \mathrm{n}=1,2,\ldots$$

Розклад парної функції.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ парна функція з періодом $2l$, то

$$\boxed{\mathrm{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}},\text{ де } a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}\mathrm{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,2,\ldots$$

Розклад непарної функції.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ непарна функція з періодом $2l$, то

$$\boxed{\mathrm{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}},\quad\text{ де } b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}\mathrm{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \mathrm{n}=1,2,\ldots$$

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)$. Зобразити графік функції і суми ряду Фур'є.

6.1. $f(x)=\begin{cases}x+2\pi, & -\pi<x\le 0;\\ x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

6.2. $f(x)=\pi-x, x\in(0,2\pi)$**.**

6.3. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, x\in(-\pi,\pi)$ **.**

6.4. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0;\\ 0, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

6.5. $f(x)=|x|, -\pi<x<\pi$ **.**

6.6. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0;\\ 2, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

6.7. $f(x)=\pi+x, -\pi<x<\pi$**.**

6.8. $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & -\pi<x\le 0;\\ x-\pi, & 0<x<\pi.\end{cases}$

6.9. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0;\\ 2x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

6.10. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0;\\ 2, & 0<x<\pi.\end{cases}$

6.11. $f(x)=\begin{cases}\pi+x, -\pi<x\le 0;\\ \pi-x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$ **6.12.** $f(x)=\dfrac{x}{\pi}, x\in(-\pi,\pi)$.

6.13. $f(x)=\begin{cases}\pi, \quad -\pi<x\le 0;\\ \pi-x, 0<x<\pi.\end{cases}$

6.14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+x, \quad -\pi<x\le 0;\\ \dfrac{\pi}{2}-x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

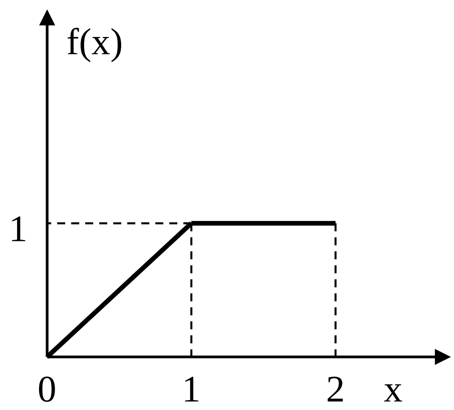
6.15. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, x\in(0,2\pi)$. **6.16.** $f(x)=2x, x\in(0,2\pi)$.

6.17. $f(x)=\begin{cases}2x, \quad -\pi<x\le 0;\\ -2x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$ **6.18.** $f(x)=\begin{cases}x, \quad 0<x<\pi;\\ \pi, \quad \pi\le x<2\pi.\end{cases}$

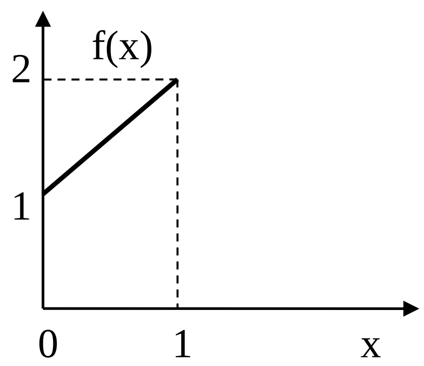
6.19. $f(x)=|\cos 2x|$. **6.20.** $f(x)=x, x\in(-\pi,\pi)$.

Завдання 7. Функцію $f(x)$, зображену графічно на інтервалі $(0,T)$, розкласти в ряд Фур’є: а) з періодом T ; б) за косинусами; в) за синусами.

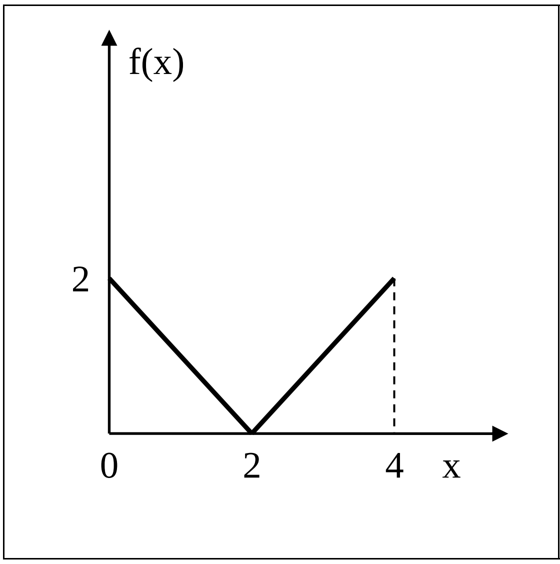
7.1.

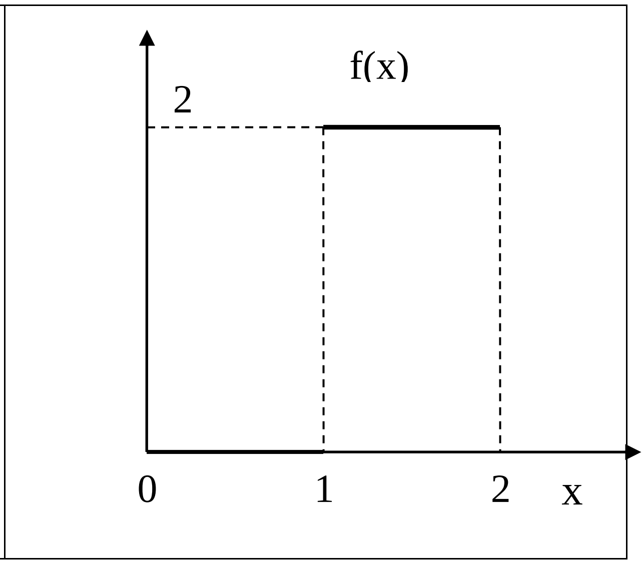


7.2.

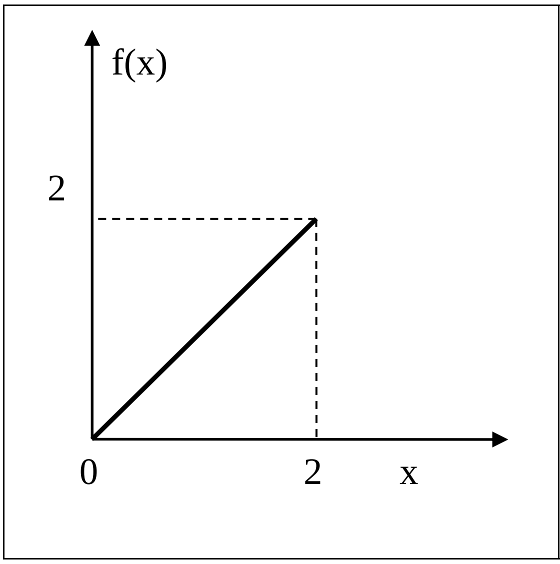


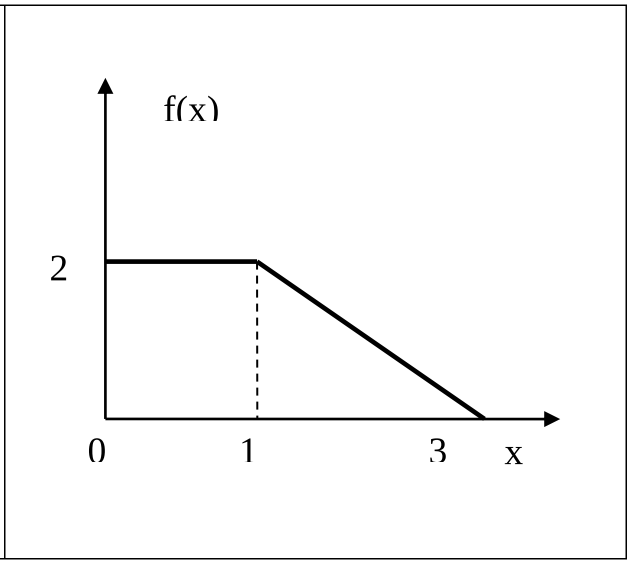
7.3. **7.4.**



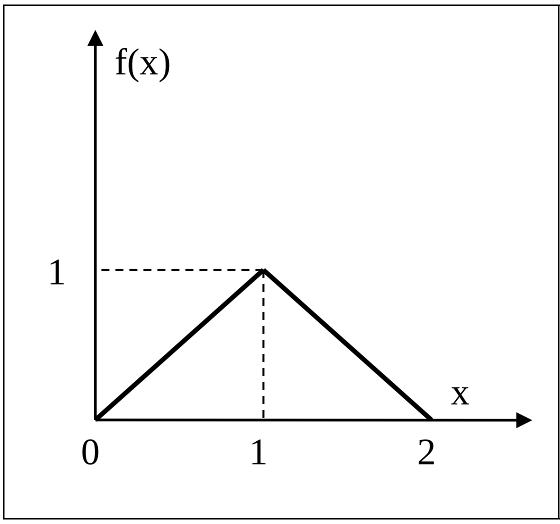


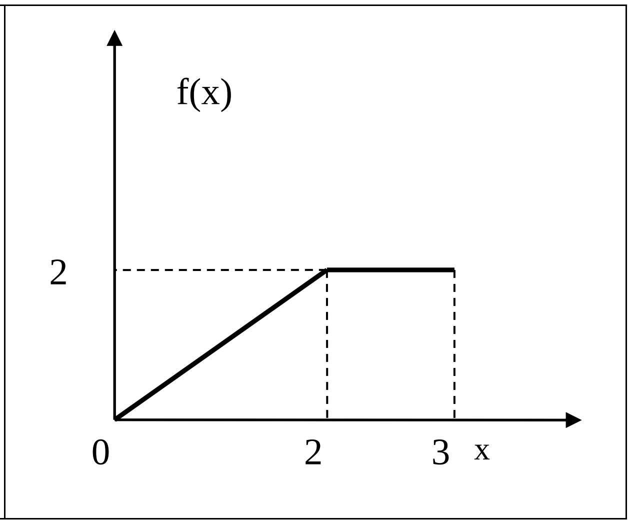
7.5. **7.6.**



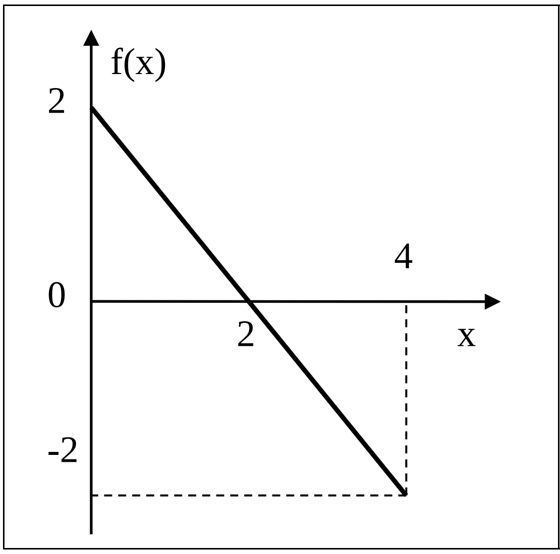


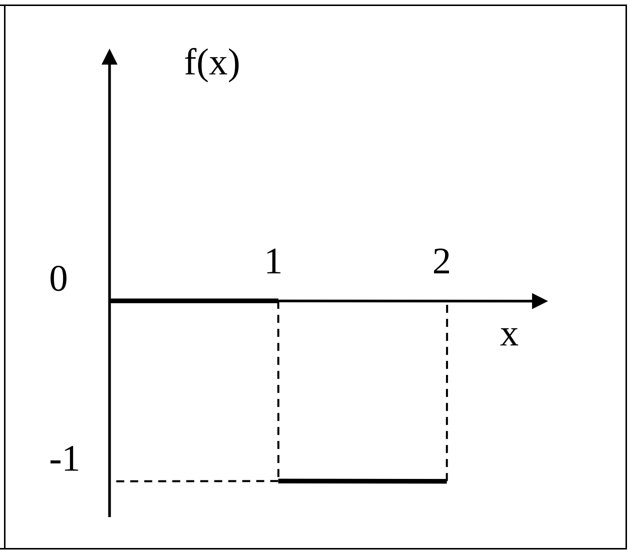
7.7. **7.8.**



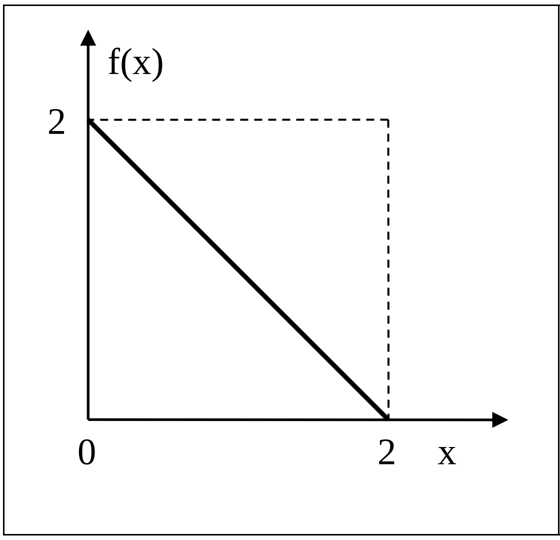


7.9. **7.10.**

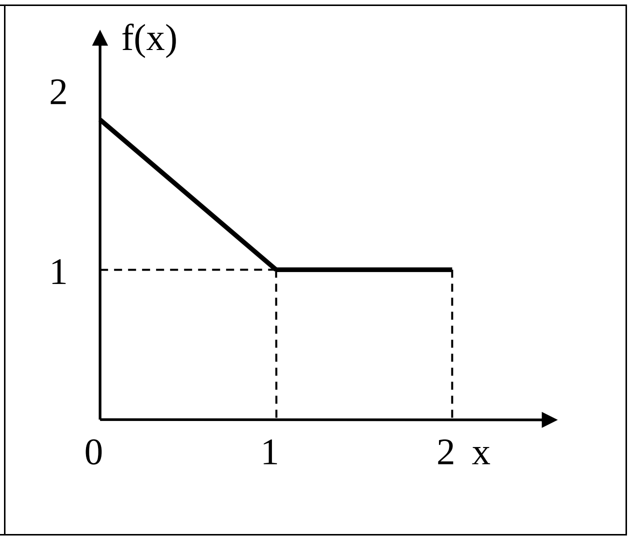




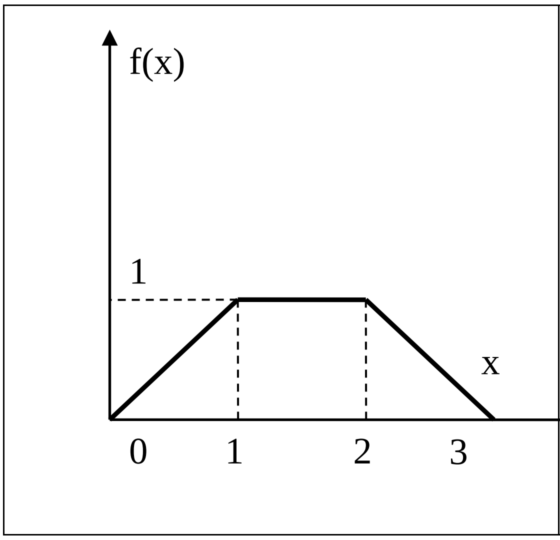
7.11.



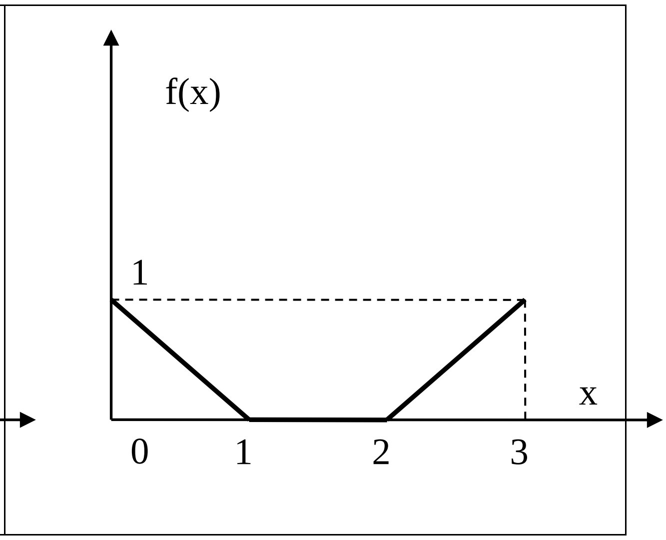
7.12



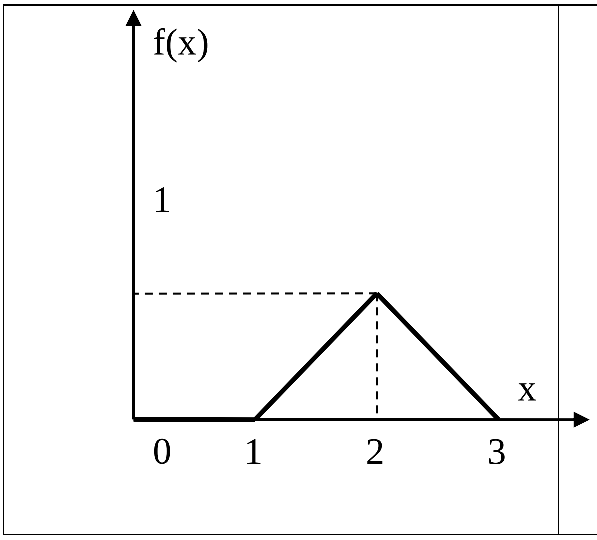
7.13.



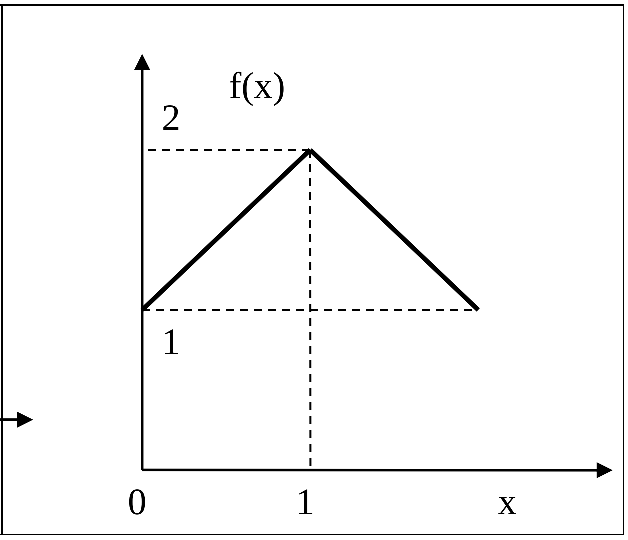
7.14.



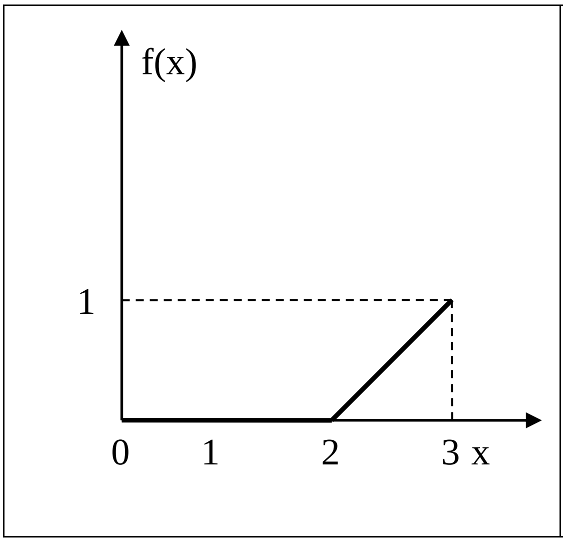
7.15.



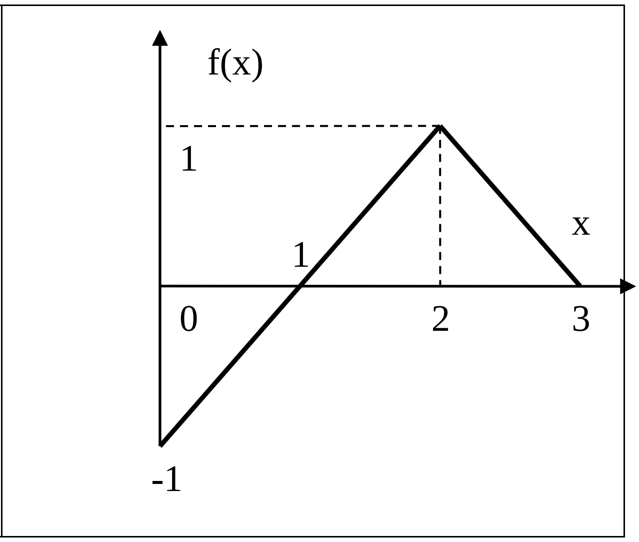
7.16.



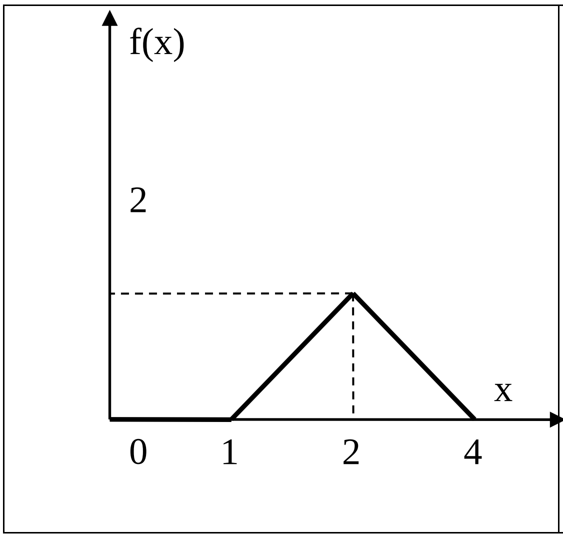
7.17.



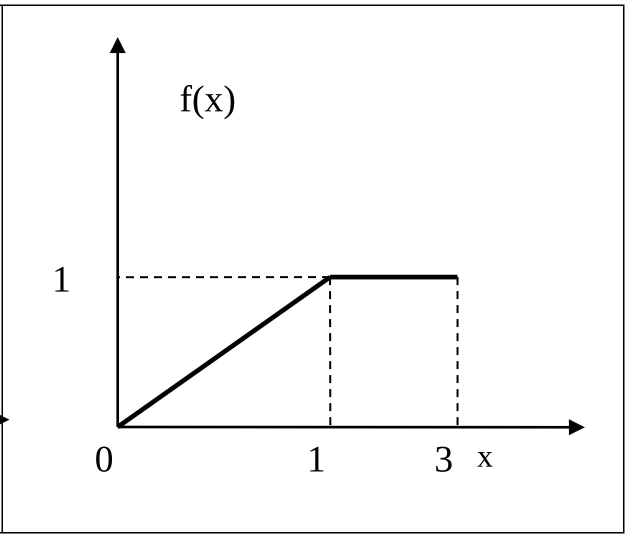
7.18.



7.19



7.20



Самостійна робота №7.

10.Кратні інтеграли

Нехай $D \subset \mathrm{R}^2$ - замкнена область, яка може бути задана нерівностями: $a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)$, де $y_1(x), y_2(x)$ - неперервні на відрізку $[a,b]$ функції. Тоді *подвійний інтеграл* по області D від неперервної функції $\mathrm{f}(x,y)$ обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_D \mathrm{f}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{f}(x,y)dy$$

Інтеграл $\iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$ чисельно дорівнює *площі* області D.

Нехай $V \subset \mathrm{R}^3$ - область, яка може бути визначена нерівностями: $x_1 \le x \le x_2, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x),\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, де $y_1(x), y_2(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ - неперервні функції. Тоді *потрійний інтеграл* по області V від неперервної функції $\mathrm{f}(x,y,z)$ обчислюється за формулою:

$$\iiint\limits_V \mathrm{f}(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathrm{f}(x,y,z)dz.$$

Інтеграл $\iiint\limits_V \mathrm{f}(x,y,z)dxdydz$ чисельно дорівнює *об'єму* області V.

Завдання 1. Обчислити подвійні інтеграли.

1.1. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}} dxdy \qquad D: 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0, y \le 0.$

1.2. $\iint\limits_D (x+y)dxdy \qquad D: 3 \le x+y \le 5,\ 2 \le xy \le 4.$

1.3. $\iint\limits_D e^{-x}\cos y dxdy \quad D: x \le y \le 2x,\ y \le \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$

1.4. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$ D обмежена кривими $x^2+y^2=2x,$ $x^2+y^2=2x+2y.$

1.5. $\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} dxdy \quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0, y \le x.$

1.6. $\iint_D (x-y)\,dxdy \quad D: 3 \le x-y \le 5,\ 2 \le xy \le 4.$

1.7. $\iint_D e^{-x}\sin(x-y)\,dxdy \quad D: x \le y \le 2x,\ y \le \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}.$

1.8. $\iint_D e^{\left(x^2+y^2\right)}dxdy$ D обмежена кривими $x^2+y^2=4x+2y-4,$ $x^2+y^2=2x+2y.$

1.9. $\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy \quad D: 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ 1 \le \frac{x}{y} \le 2.$

1.10. $\iint_D dxdy$ D обмежена кривими $y=1-x,\ y=x-1$ $y=\sqrt{1-x^2+2x}.$

1.11. $\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}} dxdy \quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0, y \le 0$

1.12. $\iint_D 3dxdy \quad D: 1 \le x+y \le 3,\ 2 \le xy \le 5$

1.13. $\iint_D e^{(y-x)}dxdy \quad D: x \le y \le 4x,\ y \le x+3, x \le 4$

1.14. $\iint_D \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy$ D обмежена кривими $x^2+y^2=-2x,$ $x^2+y^2=-1-2x-2y.$

1.15. $\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}} dxdy \quad D: 4 \le x^2+y^2 \le 9, -x \le y \le x$

1.16. $\iint_D dxdy \quad D: 1 \le x-y \le 3,\ 2 \le xy \le 4$

1.17. $\iint_D \frac{dxdy}{(y+x-1)^3} \quad D: 2-x \le y \le 5-x,\ y=0, 2 \le x \le 5$

1.18. $\iint_D \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, D обмежена кривими $x^2+y^2=-2x,$ $x^2+y^2=-2x+4y-1.$

1.19. $\iint_D \frac{dxdy}{1+\left(x^2+y^2\right)^2} \quad D:\ 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ 1 \le \frac{x}{y} \le 2.$

1.20. $\iint\limits_D dxdy$ D обмежена кривими $y=-x,\ x=0$

$y=-\sqrt{1-x^2+2x}$.

Завдання 2. Обчислити потрійні інтеграли.

2.1. $\iiint\limits_V ydxdydz;\qquad V: x=0; x=2; y=0; y=1; z=0; z=1-y.$

2.2. $\iiint\limits_V xdxdydz;\qquad V: y=0; x=1; y=10x; y=1; z=0; z=xy.$

2.3. $\iiint\limits_V zdxdydz;\qquad V: x=0; y=0; z=0; x^2+y^2+z^2=1.$

2.4. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^2};\qquad V: x=0; y=0; z=0; x+y+z=1.$

2.5. $\iiint\limits_V \sqrt{2}zdxdydz;\qquad V: y=2x^2; y+z=2; z=0.$

2.6. $\iiint\limits_V xdxdydz;\qquad V: y=0; y=x; x=1; z=0; z=\sqrt{xy}.$

2.7. $\iiint\limits_V \left(\frac{9}{16}\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)dxdydz;\qquad V: x=4y^2; x=4; z=0; z=y^2.$

2.8. $\iiint\limits_V 6xdxdydz;\qquad V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=x^2+y^2.$

2.9. $\iiint\limits_V (2x+3y)dxdydz;\qquad V: x=0; y=0; x+3y=6; z=0; z=\frac{y}{3}.$

2.10. $\iiint\limits_V x^2ydxdydz;\qquad V: x=0; y=1; y=\sqrt{x}; z=0; z=1-y^2.$

2.11. $\iiint\limits_V 2(x^2+2y^2)dxdydz;\ V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=3y.$

2.12. $\iiint\limits_V y^2dxdydz;\qquad V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=10(y+3x).$

2.13. $\iiint\limits_V xdxdydz;\qquad V: y=\sqrt{x}; y=2\sqrt{x}; x+2z=4; z=0.$

2.14. $\iiint\limits_V xdxdydz;\qquad V: x+6y=6; x=0; y=0; z=0; z=9-x^2\ (x\ge 0).$

2.15. $\iiint\limits_V 4zdxdydz;\qquad V: x=0; y=0; 3x+y=6; z=0; z=\frac{1}{4}y^2.$

2.16 $\iiint\limits_V ydxdydz;\qquad V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=x^2+y^2.$

2.17. $\iiint\limits_V x^2dxdydz;\quad V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=3(y+4x).$

2.18. $\iiint\limits_V ydxdydz;\qquad V: y=0; y+x=1; z=0; z=\sqrt{xy}.$

2.19. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x-y+2z)^2};\qquad V: x=0; y=0; z=0; x-y+2z=1.$

2.20. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz; V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=x^2+y^2.$

11.Векторний аналіз

Криволінійні інтеграли першого роду

Криволінійним інтегралом першого роду називається $\int\limits_L f(x,y)dl$, якщо $f(x,y,z)$ - функція, визначена і неперервна в точках гладенької кривої L.

Нехай $L: \begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t); \\ z=z(t); \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$ задається параметрично, тоді

криволінійний інтеграл першого роду зводиться до визначеного інтегралу

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

!!! Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку кривої L.

Механічне застосування криволінійного інтегралу першого роду:

Якщо $\gamma=\gamma(x,y,z)$ - лінійна густина в точці (x,y,z) кривої L, *то маса* кривої L дорівнює

$$M=\int\limits_L \gamma(x,y,z)dl.$$

Довжину l кривої L знаходять за формулою $l=\int\limits_L dl$.

Завдання 3.

Обчислити криволінійні інтеграли першого роду

3.1. $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$; L – відрізок, що з'єднує точки $A(0,0)$ та $B(1,2)$.

3.**2.** $\int\limits_L (x-y)dl;\quad L:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos t; \\ y=\dfrac{1}{2}\sin t; \end{cases}\qquad 0\le t\le 2\pi.$

3.3. $\int\limits_L xyzdl;\qquad L:\begin{cases} x=t; \\ y=\dfrac{2}{3}\sqrt{2t^3}; \\ z=\dfrac{1}{2}t^2; \end{cases}\qquad 0\le t\le 1.$

3.4. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^n dl;\quad n\in N;\quad L:\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=a\sin t; \end{cases}\qquad 0\le t\le \pi.$

3.5. $\int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)dl;\quad L:\begin{cases} x=5\cos^3 t; \\ y=5\sin^3 t; \end{cases}\qquad 0\le t\le 2\pi.$

3.6. $\int\limits_L zdl;\qquad L:\begin{cases} x=t\cos t; \\ y=t\sin t; \\ z=t; \end{cases}\qquad 0\le t\le 1.$

3.7. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dl;\qquad L:\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=a\sin t; \\ z=bt; \end{cases}\qquad 0\le t\le 2\pi.$

3.8. $\int\limits_L xyzdl;$ L – відрізок, що з’єднує точки $A(1,1,1)$ та $B(4,4,4)$.

3.9. $\int\limits_L xdl;\qquad L:\begin{cases} x=3t; \\ y=3t^2; 0\le t\le 1. \\ z=2t^3; \end{cases}$

3.10. $\int\limits_L x^2ydl,$ де L – границя трикутника з вершинами в точках $O(0,0);\quad A(2,0);\quad B(1,2).$

3.11. $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{1+4x^2}}$; **L :** $y=x^2, x\in[0;1]$ **.**

3.2. $\int\limits_L (x+y)dl;\quad L:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos t; \\ y=\dfrac{1}{2}\sin t; \end{cases}\qquad 0\le t\le \pi.$

3.13. $\int\limits_L \dfrac{x^2}{yz}dl;\qquad L:\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}\sqrt{t^3}; \\ y=t; \\ z=\dfrac{1}{2}t^2; \end{cases}\qquad 0\le t\le 1.$

3.14. $\int\limits_L \dfrac{dl}{\left(x^2+y^2\right)^4};\qquad L:\begin{cases} x=4\cos t; \\ y=4\sin t; \end{cases}\qquad 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}.$

3.15. $\int\limits_L xydl;\quad L:\begin{cases} x=1-\cos 2t; \\ y=1+\cos 2t; \end{cases}\qquad 0\le t\le \dfrac{\pi}{4}.$

3.16. $\int\limits_L \left(x-y\right)dl;\qquad L:\begin{cases} x=t+\cos^2 t; \\ y=t+\sin^2 t; \\ z=t; \end{cases}\qquad 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}.$

3.17. $\int\limits_L z\sin\left(x^2+y^2-z^2\right)dl;\qquad L:\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=a\sin t; \\ z=bt; \end{cases}\qquad 0\le t\le 2\pi.$

3.18. $\int\limits_L zdl;$ L – відрізок, що з’єднує точки $A\left(1,-2,3\right)$ та $B\left(3,-3,6\right)$.

3.19. $\int\limits_L \dfrac{xy}{z}dl;\qquad L:\begin{cases} x=2t; \\ y=t^2; \quad -2\le t\le 0. \\ z=\dfrac{1}{3}t^3; \end{cases}$

3.20. $\int\limits_L \dfrac{x^2}{yz}dl,$ де $L:\begin{cases} x=e^t\cos t; \\ y=e^t\sin t; \qquad -1\le t\le 1. \\ z=e^t \end{cases}$

Криволінійні інтеграли другого роду.

Криволінійним інтегралом другого роду називається інтеграл $\int\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$,де функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні в точках гладенької кривої L .

Якщо крива задана параметрично $L:\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t); \quad \alpha \le t \le \beta, \\ z=z(t); \end{cases}$

що проходиться в напрямку зростання параметру t, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right)dt.$$

!!!При зміні напрямку обходу кривої L цей інтеграл змінює свій знак на обернений.

У випадку плоскої кривої :

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt$$

Механічне застосування криволінійного інтегралу другого роду.

Роботу сили $\overline{F}=\{P,Q,R\}$ вздовж кривої L можна обчислити за допомогою формули

$$A=\int\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

Незалежність інтегралу від шляху інтегрування. Нехай контур інтегрування L цілком лежить у деякій однозв'язній області D, в якій функції $P(x,y),Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми похідними першого порядку. Інтеграл $\int\limits_L Pdx+Qdy$ не залежить від шляху інтегрування тоді і тільки тоді, коли в усіх точках D

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Формула Гріна. Нехай L - замкнений простий кусково-гладенький контур, що обмежує однозв'язну область D, функції $P(x,y),Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми похідними першого порядку в області D і на її границі. Тоді має місце формула Гріна

$$\boxed{\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy}.$$

Завдання 4.

4.1. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по просторовій кривій L, що задана параметрично

$$\int\limits_L xydx + x^2zdy + xyzdz; \qquad L:\begin{cases} x = e^t; \\ y = e^{-t}; \\ z = t^2; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

4.2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по просторовій кривій L, що задана параметрично

$$\int\limits_L \frac{yz}{x}dx + e^y dy + \sin zdz; \qquad L:\begin{cases} x = t^3; \\ y = t; \\ z = t^2; \end{cases} \quad 2 \le t \le 3.$$

4.3. Обчислити $\int\limits_L \cos xdx + e^{-y}dy + z^2dz$, де L - відрізок прямої від точки $(-1,2,4)$ до точки $(6,0,-2)$.

4.4. Обчислити $\int\limits_L (x^2 - y^2)dx + (x^2 + 2y^2)dy$, де L – частина кола $x^2 + y^2 = 9$ від точки $A(0,-3)$ до точки $B(3,0)$.

4.5. Обчислити $\int\limits_L 2xyz^3dx + (x^2z^2 + 2y)dy + 3x^2yz^2dz$, де L – відрізок прямої від точки $(0,0,0)$ до точки $(1,2,3)$.

4.6. Знайти роботу сили $\bar{F} = (2xy + y)\bar{i} + (x^2 + xy)\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y = 4 - 2x^2$ від точки $A(\sqrt{2},0)$ до точки $B(-\sqrt{2},0)$.

4.7. Знайти роботу сили $\bar{F} = 2y\bar{i} - 3x\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ від точки $A(-2,0)$ до точки $B(0,2)$.

4.8. Знайти роботу сили $\bar{F} = 4xy\bar{i} + 2y\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y = \sin x$ від точки $A(\pi,0)$ до точки $B(0,0)$.

4.9. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (x+y)dx - (x-y)dy$ по еліпсу $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, застосовуючи формулу Гріна.

4.10. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (xy + x + y)dx - (xy + x - y)dy$ по колу $L: x^2 + y^2 = 2x$, застосовуючи формулу Гріна.

4.11. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y\right)^2 dy$, де L – контур трикутника з вершинами в точках $A(1,1); B(2,2); C(1,3)$, застосовуючи формулу Гріна.

4.12. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L y^2dx-x^2dy$ по колу $L: x^2+y^2=2y$, застосовуючи формулу Гріна.

4.13. Знайти роботу сили $\overline{F}=2y\overline{i}-\left(x^3+2x^2\right)\overline{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y=\ln x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

4.14. Знайти роботу сили $\overline{F}=e^{y-x}\overline{i}-e^{x-y}\overline{j}$ при переміщенні вздовж прямої від точки $A(1,1)$ до точки $B(3,2)$.

4.15. Знайти роботу сили $\overline{F}=\left(x+\sqrt{2y}\right)\overline{i}-\left(y+2x\right)\overline{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y=\dfrac{x^2}{2}$ від точки $A(2,2)$ до точки $B\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

4.16. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} yxdx+\dfrac{x^2-y^2}{2}dy$ не залежить від шляху і обчислити його.

4.17. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} -(x-y)dx+(x-y)dy$ не залежить від шляху і обчислити його.

4.18. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy$ не залежить від шляху і обчислити його.

4.19. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(2,4)}\left(x^2+y^2\right)xdx-\left(x^2+y^2\right)ydy$ не залежить від шляху і обчислити його.

4.20. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(-1,1)}^{(2,2)}\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$ не залежить від шляху і обчислити його. (Шлях інтегрування не проходить через початок координат.)

Поверхневі інтеграли першого роду.

Поверхневим інтегралом першого роду від функції $f(x,y,z)$ по кусково-гладенькій поверхні σ називається $\iint\limits_\sigma f(x,y,z)d\sigma$.

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна на гладкій поверхні σ, що задається рівнянням $z = z(x,y)$ і однозначно проектується на площину OXY в область D_{XY}, то поверхневий інтеграл першого роду можна обчислити за формулою

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{XY}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Справедливі аналогічні формули у випадку, коли поверхня σ однозначно проектується на площину OYZ чи OXZ.

Площу S поверхні σ можна знайти таким чином: $S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D_{XY}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$

Випадок параметричного задання поверхні

Якщо σ - кусково-гладенька двостороння поверхня , задана параметрично

$$\sigma:\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v); \quad (u,v)\in\Omega, \\ z = z(u,v); \end{cases}$$

$f(x,y,z)$ - функція, неперервна в точках поверхні σ, то

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{\Omega} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$ де

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Відповідно площа S поверхні σ знаходиться так: $S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$

Завдання 5.

5.1. Обчислити $\iint_{S}(x^2+z)d\sigma$, де S - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2; \quad z\geq 0$.

5.2. Обчислити $\iint\limits_S (6x+4y+3z)d\sigma$, де S - частина площини $x+y+2z=1$, що лежить в першому октанті.

5.2. Обчислити $\iint\limits_S yd\sigma$, де S - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2$, що лежить в першому октанті.

5.3. Обчислити $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{(1+x+z)^3}$, де S - частина площини $x+y+z=1$, що лежить в першому октанті.

5.4. Обчислити $\iint\limits_S x^2 d\sigma$, де S - бічна поверхня конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}; \quad 0\le z\le 2$.

5.5. Знайти площу частини поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, розташованої всередині циліндра $2y=x^2+y^2$.

5.6. Знайти площу частини поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вирізаної з неї поверхнею $2x=x^2+y^2$.

5.7. Обчислити $\iint\limits_S (x^2+y^2)d\sigma$ де S - частина поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}; \quad 0\le z\le 1$.

5.8. Знайти площу частини площини $z=4+2x+3y$, вирізаної з неї поверхнями $x^2+y^2=4; \quad y=0; \quad y=2x$ (І октант).

5.9. Обчислити $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{x^2+y^2+z^2}$ де S - частина циліндричної поверхні $x^2+y^2=R^2$, обмежена площинами $z=0$ і $z=h$.

5.10. Обчислити $\iint\limits_S x^2 yz d\sigma$, де S - частина площини $x+y+z=1$, розташована в першому октанті.

5.11. Знайти площу поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0, z=3$.

5.12. Обчислити $\iint\limits_S yd\sigma$, де S - півсфера $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

5.13. Обчислити площу поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z=x, x+y=1, y=0, x=0$.

5.14. Знайти площу частини параболічного циліндру $y^2=6x$, що задовольняє умовам $0\le z\le 2; 0\le x\le 2$. (Спроектувати поверхню на площину OYZ.)

5.15. Обчислити $\iint\limits_S y d\sigma$, де S - частина параболічного циліндру $y^2 = 6x$, що задовольняє умовам $0 \le z \le 2;\ 0 \le x \le 2$.

5.16. Обчислити $\iint\limits_S \frac{\partial\sigma}{\sqrt{1-x^2}}$, де S - частина циліндру $x^2 + y^2 = 1$, що задовольняє умовам $-2 \le z \le 2;\ y \ge 0$.

5.17. Обчислити $\int\limits_S \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, де S - границя тетраедра $x + y + z \le 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0$.

5.18. Знайти площу частини площини $z = 4 + 2x + 3y$, вирізаної з неї поверхнями $x^2 + y^2 = 4;\quad y = x;\quad y = 2x$(I октант).

5.19. Обчислити $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{x^2 + y^2}$ де S - частина циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 4$, обмежена площинами $z = 0$ і $z = 5$.

5.20. Обчислити $\iint\limits_S (x + y + z) d\sigma$, де S - частина площини $x + y + z = 2$, розташована в першому октанті.

Поверхневі інтеграли другого роду.

Нехай σ - кусково-гладенька двостороння поверхня, σ^+ - її сторона, що характеризується напрямком нормалі $\bar{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. На поверхні σ задана і неперервна векторна функція $\bar{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$. Поверхневим інтегралом другого роду по зовнішній стороні поверхні σ від функції $\bar{F}$ називається $\iint\limits_{\sigma_+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$. Поверхневий інтеграл другого роду так виражається через поверхневий інтеграл першого роду:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma}$$

При переході до поверхні σ^- інтеграл змінює свій знак на обернений.

Якщо поверхня σ задана в параметричному вигляді, то направляючі косінуси нормалі до поверхні визначаються за формулами

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \text{де}$$

$$A=\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad B=\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad C=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Поверхневий інтеграл другого роду можна також звести до суми трьох подвійних. Нехай σ однозначно проектується на координатні площини OXY, OXZ та OYZ відповідно в області D_{XY}, D_{XZ}, D_{YZ}, тобто може бути задана рівнянням $z=z(x,y), y=y(x,z), x=x(y,z)$. Тоді

$$\iint\limits_{\sigma^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{YZ}} f\left(x(y,z),y,z\right)dydz \pm$$

$$\pm\iint\limits_{D_{XZ}} Q\left(x,y(x,z),z\right)dxdz \pm \iint\limits_{D_{XY}} R\left(x,y,z(x,y)\right)dxdy,$$

де знаки перед подвійним інтегралом беруться відповідно ті самі, що й у $\cos\alpha, \cos\beta$ і $\cos\gamma$ відповідно.

Зауваження. Якщо поверхня задана у вигляді $z=f(x,y)$, де $f(x,y)$- диференційовна функція, то одна з нормалей до неї може бути знайдена так: $\bar{n}=\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right\}$.

Фізичний зміст поверхневого інтегралу

Поверхневий інтеграл другого роду також називають **потоком вектора** $\bar{V}=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$ **через поверхню** σ**.** Його можна розглядати як кількість рідини чи газу, що протікає через задану поверхню σ за одиницю часу зі швидкістю $\bar{V}$.

Завдання 6.

6.1. Обчислити $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$, де S - зовнішня сторона бічної поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2};\quad 0\le z\le H$.

6.2. Обчислити $\iint\limits_S 2xdydz+ydxdz+zdxdy$, де S - трикутник, утворений перетином площини $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ з координатними площинами (нормаль зовнішня).

6.3. Обчислити $\iint\limits_S zdxdy$, де S - верхня сторона поверхні $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}; \quad 0\le z\le 1$, що лежить у першому октанті.

6.4. Обчислити $\iint\limits_S xdydz$, де S - верхня сторона поверхні півсфери $x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z\ge 0)$.

6.5. Обчислити $\iint\limits_S xdydz+4ydxdz+5zdxdy$, де S - верхня сторона поверхні $x+2y+\dfrac{z}{2}=1$, що лежить у першому октанті.

6.6. Обчислити $\iint\limits_S z^2dxdy$, де S - верхня частина поверхні параболоїда $z=\dfrac{3}{4}\left(x^2+y^2\right); \quad z\le 3$.

6.7. Знайти потік векторного поля $\overline{F}=\{2z-x, x-y, 3x+z\}$ через замкнену поверхню $S: x+y+2z=2; x=0; y=0; z=0$.

6.8. Обчислити $\iint\limits_S xydxdy$, де S - нижня сторона трикутника $x+2y+z=1; \quad x=0; \quad y=0; \quad z=0$.

6.9.Обчислити $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+(z-2)dxdy$, де S - нижня частина поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що вирізається площиною $z=1$.

6.10. Обчислити $\iint\limits_S xz^2dxdy$, де S - зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=1$, розміщеної в першому октанті.

6.11. Обчислити $\iint\limits_S xdydz+5ydxdz+5zdxdy$, де S - нижня частина площини $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+z=1$, розташована в першому октанті.

6.12. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

$$\vec{a}=(x+xy)\vec{i}+(y-yx)\vec{j}+(z-1)\vec{k} \quad S: z=\sqrt{x^2+y^2} \quad P: z=2.$$

6.13. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

$$\vec{a}=xy\vec{i}-3x^2\vec{j}+4\vec{k} \quad S: z=-\sqrt{x^2+y^2} \quad P: z=-1.$$

6.14. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями). $\vec{a} = 2xyz\,\vec{\mathrm{i}} - x^2 z\vec{j} + 2\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0$

6.15. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

$$\vec{a} = (x + yz)\vec{\mathrm{i}} + y\vec{j} + (z - xy)\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = -2\sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = -2.$$

6.16. Обчислити $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

6.17. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

$$\vec{a} = x\,\vec{\mathrm{i}} - y\vec{j} + 4\vec{k} \quad \mathrm{S}: z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad \mathrm{P}: z = 0.$$

6.18. Обчислити $\iint\limits_S xydzdx$, де S - нижня сторона трикутника $x + 2y + 3z = 1; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0$.

6.19. Обчислити $\iint\limits_S xz^2 dxdy$, де S - зовнішня сторона частини сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \le 0, y \le 0, z \ge 0.$$

6.20. Знайти потік векторного поля $\overline{F} = \{2z, x + y, 3x\}$ через замкнену поверхню $S: x + 2y + 2z = 2; x = 0; y = 0; z = 0$.

Формули Стокса і Остроградського. Елементи векторного поля.

Нехай $u(x, y, z)$--скалярне поле є функцією, неперервно – диференційовною в розглядуваній області. **Градієнт функції** $u(x, y, z)$ позначатимемо $\boxed{\nabla u = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{\mathrm{k}}}$, де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathrm{k}}$ („набла”).

Нехай $\overline{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ - неперервно – диференційовне векторне поле.

Дивергенцією векторного поля $\overline{F}$ називається вираз

$$\boxed{\operatorname{div} \overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\overline{F}, \nabla)}.$$

Ротором векторного поля називається вектор

$$\boxed{\operatorname{rot}\overline{F}=[\nabla,\overline{F}]=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}}.$$

Векторне поле $\overline{F}$ є *потенціальним*, якщо $rot\,\overline{F}=0$. Векторне поле $\overline{F}$ є *соленоїдним*(в полі немає ні джерела, ні стоку), якщо $div\,\overline{F}=0$. Якщо $rot\,\overline{F}=0$, то векторне поле $\overline{F}$ безвихрове.

Теорема Остроградського.Якщо замкнена поверхня S є кусково-гладенькою і обмежує об'єм V, $\vec{n}$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до S, $\overline{F}$ - неперервно – диференційовне векторне поле в області V і на поверхні S, то має місце формула

$$\boxed{\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{F}dxdydz}$$

Теорема Стокса.Якщо замкнена крива L, що обмежує поверхню S, обходиться в додатньому напрямку, а векторне поле $\overline{F}$ - неперервно-диференційовне, то має місце формула Стокса:

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\left(\operatorname{rot}\overline{F}\cdot\vec{n}\right)dS=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS,$$

де $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S. векторне поле.

Завдання 7.

7.1. $\iint\limits_S xzdydz+xydxdz+yzdxdy$, де S - зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+2y+4z=12$.

7.2. $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$, де S - зовнішня сторона поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2};\quad 0\le z\le H$.

7.3. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, де S - зовнішня поверхня кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$.

7.4. $\iint\limits_S \left(z^n-y^n\right)dydz+\left(x^n-z^n\right)dxdz+\left(y^n-x^n\right)dxdy$, де S - зовнішня поверхня кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$.

7.5. Знайти потік вектора $\overline{a} = 2x\overline{i} - y\overline{j}$ через циліндричну поверхню $x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq H \leq z$ у напрямку зовнішньої нормалі.

7.6. Знайти потік вектора $\overline{a} = x^2\overline{i} + x\overline{j} + xz\overline{k}$ через поверхню тіла, обмеженого параболоїдом $y = x^2 + z^2$ і площинами $x = 0, y = 1, z = 0$, орієнтовану в напрямку зовнішньої нормалі.

7.7. Знайти потік вектора $\overline{a} = y\overline{i} + z^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ через усю поверхню тіла $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$, орієнтовану в напрямку зовнішньої нормалі.

7.8. Функція $u = u(x, y, z)$, для якої виконується $\Delta u = 0$, називається *гармонічною.* Довести, що для гармонічної функції трьох змінних виконується

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x} dydz + \frac{\partial u}{\partial y} dzdx + \frac{\partial u}{\partial x} dxdy = 0,$$

де S - деяка замкнена гладенька поверхня.

7.9. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F} = xy\overline{i} + x\overline{j} + y^2\overline{k}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ z = y. \end{cases}$.

7.10. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F} = x\overline{i} + z^2\overline{j} + y\overline{k}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1; \\ z = 2x - y - 1. \end{cases}$

7.11. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F} = 7x\overline{i} - x\overline{j} + yz\overline{k}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 6; \\ z = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

7.12. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (x - 2z)\overline{i} + (x + 3y + z)\overline{j} + (5x + y)\overline{k}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x + y + z = 1; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$

7.13. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (x^2 - yz)\overline{i} + (y^2 - xz)\overline{j} + (z^2 - xy)\overline{k}$ вздовж замкненого контуру

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

7.14. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F}=\left(y+xz\right)\vec{\mathrm{i}}+2x\vec{j}+\left(z^2-xy\right)\vec{k}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ z=3. \end{cases}$$

7.15. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F}=\left(y-\sin z\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(2x-y^2\right)\vec{j}+\left(x-2z\right)\vec{k}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$$

7.16. За допомогою формули Стокса обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, де L- еліпс, заданий параметрично: $x=a\sin^2 t,\ y=2a\sin t\cos t,\quad z=a\cos^2 t,\ 0\le t\le \pi$.

7.17. Перевірити потенціальність векторного поля $\overline{F}=\left\{2xy+z, x^2+z, x+y\right\}$ та знайти його потенціал.

7.18. Перевірити потенціальність векторного поля $\overline{F}=\left\{\dfrac{2x}{x^2+z^2}, 2z, \dfrac{2z}{x^2+y^2}+2y\right\}$ та знайти його потенціал.

7.19. Перевірити потенціальність векторного поля $\overline{F}=\left\{x^2-\dfrac{y}{x}, 2ye^z-\ln x, y^2e^z-\cos z\right\}$ та знайти його потенціал.

7.20. Перевірити потенціальність векторного поля $\overline{F}=\left\{\dfrac{zy^2}{x}-\cos\left(x-z\right), 2zy\ln x, y^2\ln x+\cos\left(x-z\right)\right\}$ та знайти його потенціал.

Приклади розв'язання задач.
Самостійна робота 1. Комплексні числа.

1. Виконати дії $\dfrac{\left(7-5i^{207}\right)^{3}\left(-2+3i\right)^{7}}{\left(3i^{16}+3i^{21}\right)^{200}}$.

Розглянемо кожну дужку окремо. Отже, $z_1 = 7-5i^{207} = 7-5ii^{206} =$
$=\left|\begin{matrix}206 \div 4\\ i^{206}=-1\end{matrix}\right| = 7+5i$. Знайдемо модуль і головне значення аргументу цього комплексного числа: $x_1 = 7>0,\ y_1 = 5,\ \ |z_1| = \sqrt{84},\ \ \arg z_1 = arctg\dfrac{5}{7}$.

Знайдемо модуль і аргумент другого комплексного числа $z_2 = -2+3i$:
$x_2 = -2<0,\ y_2 = 3,\ |z_2| = \sqrt{13},\ \arg z_2 = \pi - arctg\dfrac{3}{2}$.

Третя дужка містить комплексне число $z_3 = 3i^{16}+3i^{21} = 3i^{16}+3ii^{20} =$
$=\left|\begin{matrix}20\div 4\\ 16\div 4\\ i^{20}=1\end{matrix}\right| = 3+3i$.

$$x_3 = 3>0,\ y_2 = 3,\ |z_3| = 3\sqrt{2},\ \ \arg z_3 = arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, як відповідь ми отримаємо комплексне число в показниковій формі, а саме

$$\frac{\left(7-5i^{207}\right)^{3}\left(-2+3i\right)^{7}}{\left(3i^{16}+3i^{21}\right)^{200}} =$$

$$=\frac{\sqrt{84^{3}}\sqrt{13^{7}}}{3^{200}2^{100}}\exp\left\{i\left(3arctg\frac{5}{7}+7\pi-7arctg\frac{3}{2}-\frac{200\pi}{4}\right)\right\}=$$
$$\left|\begin{matrix}7\pi-50\pi=-43\pi\\ \exp\{-43\pi i\}=\exp\{\pi i\}\end{matrix}\right| = \frac{\sqrt{21^{3}}\sqrt{13^{7}}}{3^{200}2^{97}}\exp\left\{i\left(3arctg\frac{5}{7}-7arctg\frac{3}{2}+\pi\right)\right\}.$$

2. Знайти всі значення кореня: $z=\sqrt[5]{-1+\sqrt{3}i}$.

Розглянемо комплексне число $\varsigma = -1+\sqrt{3}i$ і випишемо його в показниковій формі: $x=-1<0,\ y=\sqrt{3},\ |\varsigma| = 2,$
$A\mathrm{rg}\, z = \pi - arctg\sqrt{3}+2\pi k = \pi-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k = \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$. Отже,

$\zeta = 2\exp\left\{ i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right) \right\}$. Наше завдання можна переписати як

$$z = \zeta^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} \exp\left\{ i \frac{\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right)}{5} \right\}, \text{ k=0,1,2,3,4.}$$

3. Понизити степінь у функції $\sin^3\varphi$ за допомогою формул Ейлера:

$$\sin^3\varphi =$$

$$= \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^3 = \left| \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} \right| = -\frac{e^{3i\varphi} - 3e^{2i\varphi}e^{-i\varphi} + 3e^{i\varphi}e^{-2i\varphi} - e^{-3i\varphi}}{8i} =$$

$$-\frac{e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi} - 3\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)}{8i} = -\frac{2i\sin 3\varphi - 3(2i\sin\varphi)}{8i} = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$$

Самостійна робота 2. Границі.

1. Обчислити наступні границі

а)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1} \right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\left(\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-2}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} \right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{1 - 1/n^2} + \sqrt{1 + 1/n^2}} \right) = -1.$$

б)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1} \right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} \right) = =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} \right) = 0.$$

в)

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{1/n^2-1/n^4}+\sqrt{1/n^2+1/n^4}}\right)=0.$$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^3-2x-1}{2x^2-x-1}$.

Спосіб 1.

Виконаємо заміну $x-1=t$ у виразі

$$\lim_{t\to0}\frac{3(t+1)^3-2(t+1)-1}{2(t+1)^2-(t+1)-1}=\lim_{t\to0}\frac{3t^3+9t^2+9t+3-2t-2-1}{2t^2+4t+2-t-1-1}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{3t^3+9t^2+7t}{2t^2+3t}=\lim_{t\to0}\frac{3t^2+9t+7}{2t+3}=\frac{7}{3}$$

Спосіб 2.

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^3-2x-1}{2x^2-x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|\overset{\text{лапіталь}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\left(3x^3-2x-1\right)'}{\left(2x^2-x-1\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{9x^2-2}{4x-1}=\frac{9-2}{4-1}=\frac{7}{3}$$

Спосіб 3.

Оскільки? при підстановці у вираз $x=1$ в чисельнику і в знаменнику отримуємо 0, це означає, що $x=1$--корінь многочленів з чисельника і знаменника, отже можна поділити ці многочлени на $x-1$.

Маємо, $3x^3-2x-1=(x-1)\left(3x^2+3x+1\right)$, а $2x^2-x-1=$ $=(x-1)(2x+1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^3-2x-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(3x^2+3x+1\right)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2+3x+1}{2x+1}=\frac{7}{3}.$$

3.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\sin^2 2x\right)}{e^{-x^2}-\cos 2x}.$$

При безпосередній підстановці $x=0$ отримуємо $\frac{0}{0}$. Застосуємо табличку еквівалентних функцій, коли $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2 2x\right)}{e^{-x^2}-\cos 2x}=\left|\begin{array}{l} e^{-x^2}\sim 1-x^2 \\ \cos 2x\sim 1-{(2x)^2}/{2} \\ \sin 2x\sim 2x \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+(2x)^2\right)}{-x^2+2x^2}=$$

$$=\left|\ln\left(1+4x^2\right)\sim 4x^2\right|=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=4.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)^{3x^3-1}$.

Спосіб 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)^{3x^3-1}=\left|(1)^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}-1\right)\right)^{3x^3-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}\right)^{\frac{x^4+2x+3}{-2x-4}}\right)^{\left(3x^3-1\right)\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}}=e^{-6}.$$

Степінь -6 отримали як ділення коефіцієнтів біля старших степенів чисельника і знаменника (ці степені мають бути однаковими, в даному випадку вони рівні 4).

Спосіб 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)^{3x^3-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\ln\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\ln\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\ln\left(1+\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}\right)=$$

$$=\left|\ln\left(1+\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}\right)\sim\frac{-2x-4}{x^4+2x+3},\, x\to 0\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}=-6.$$

Самостійна робота №3. Похідна функціїі однієє змінної.

1. Обчислити першу похідну y' для наступних функцій, у випадку г), д) обчислити $y',\ y''$.

а) $y(x)=\arcsin\left(2x^2-3\right)\ln\left(4x-1\right)$; **б)** $y(x)=\dfrac{tg\sqrt{8x-5}}{e^{-2x+4}-5}$;

в) $y(x)=\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)^{arctg\frac{1}{x}}$; **г)** $\sin\left(xy\right)-e^{\frac{y}{x}}=\ln\left(y^2-x^2\right)$

д) $\begin{cases} x(t)=\sqrt{1-t^2}, \\ y(t)=\sqrt{1+t^2} \end{cases}$.

а) Скористаємося формулою для обчислення похідної добутку $y'(x)=\left(\arcsin\left(2x^2-3\right)\right)'\ln\left(4x-1\right)+\arcsin\left(2x^2-3\right)\left(\ln\left(4x-1\right)\right)'=$

$$=\ln\left(4x-1\right)\frac{\left(2x^2-3\right)'}{\sqrt{1-\left(2x^2-3\right)^2}}+\arcsin\left(2x^2-3\right)\frac{\left(4x-1\right)'}{4x-1}=$$

$$=\ln\left(4x-1\right)\frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2-3\right)^2}}+\arcsin\left(2x^2-3\right)\frac{4}{4x-1}.$$

б) Скористаємось формулою для обчислення похідної частки

$$y'(x)=\frac{\left(e^{-2x+4}-5\right)\left(tg\sqrt{8x-5}\right)'-tg\sqrt{8x-5}\left(e^{-2x+4}-5\right)'}{\left(e^{-2x+4}-5\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(e^{-2x+4}-5\right)\dfrac{\left(\sqrt{8x-5}\right)'}{\cos^2\left(\sqrt{8x-5}\right)}-tg\sqrt{8x-5}\left(e^{-2x+4}\right)\left(-2x+4\right)'}{\left(e^{-2x+4}-5\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(e^{-2x+4}-5\right)\frac{(8x-5)'}{2\sqrt{8x-5}\cos^2\left(\sqrt{8x-5}\right)}-tg\sqrt{8x-5}\left(e^{-2x+4}\right)(-2)}{\left(e^{-2x+4}-5\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(e^{-2x+4}-5\right)\frac{4}{\sqrt{8x-5}\cos^2\left(\sqrt{8x-5}\right)}+2tg\sqrt{8x-5}\left(e^{-2x+4}\right)}{\left(e^{-2x+4}-5\right)^2}.$$

в) Скористаємось формулою для обчислення похідної показниково-степеневої функції

$$y'(x)=$$

$$=\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)^{arctg\frac{1}{x}}\left(\ln\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)\left(arctg\frac{1}{x}\right)'+arctg\frac{1}{x}\frac{\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)'}{\cos\left(8x^2-3\right)}\right)=$$

$$=\left(\ln\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)\frac{(1/x)'}{1+(1/x)^2}-arctg\frac{1}{x}\frac{\sin\left(8x^2-3\right)\left(8x^2-3\right)'}{\cos\left(8x^2-3\right)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)^{arctg\frac{1}{x}}=$$

$$=\left(\ln\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)\frac{\left(-1/x^2\right)}{1+(1/x)^2}-arctg\frac{1}{x}tg\left(8x^2-3\right)16x\right)\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)^{arctg\frac{1}{x}}.$$

г) Замінимо в рівності $y=y(x)$ і візьмемо похідну лівої і правої частини

$$\left(\sin\left(xy(x)\right)-e^{\frac{y(x)}{x}}\right)'=\left(\ln\left(y(x)^2-x^2\right)\right)'\Rightarrow$$

$$\left(\left(xy(x)\right)'\cos\left(xy(x)\right)-\left(\frac{y(x)}{x}\right)'e^{\frac{y(x)}{x}}\right)=\frac{\left(y^2(x)-x^2\right)'}{y^2(x)-x^2}\Rightarrow$$

$$\left(\left(x'y(x)+xy'(x)\right)\cos\left(xy(x)\right)-\left(\frac{xy'(x)-x'y(x)}{x^2}\right)e^{\frac{y(x)}{x}}\right)=\frac{\left(2y(x)y'(x)-2x\right)}{y^2(x)-x^2}\Rightarrow\left|x'=1\right|$$

$$\left(\left(y+xy'\right)\cos\left(xy\right)-\left(\frac{xy'-y}{x^2}\right)e^{\frac{y}{x}}\right)=\frac{\left(2yy'-2x\right)}{y^2-x^2}.$$ Виражаємо з цього

рівняння y'.

$$y' = \left(y\cos(xy) + \frac{y}{x^2} e^{y/x} + \frac{2x}{y^2 - x^2} \right) \Bigg/ \left(-x\cos(xy) + \frac{e^{y/x}}{x} + \frac{2y}{y^2 - x^2} \right).$$

д)

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{1-t^2}, \\ y(t) = \sqrt{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow x'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, y'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}.$$

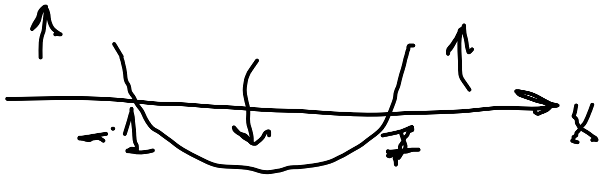
Обчислимо другу похідну $y''(x) = \dfrac{\dfrac{d(y'(x))}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{\left(-\sqrt{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\right)'_t}{-t \Big/ \sqrt{1-t^2}} =$

$$= \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)' \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2} \frac{1}{2} = \frac{-2}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Дослідити функцію $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + 5$ за допомогою похідних першого, другого (де треба) порядків і намалювати ескізи графіків в околі точок екстремума.

Обчислимо першу похідну: $y'(x) = x^2 - 6x - 7$. Знайдемо критичні та стаціонарні точки $x^2 - 6x - 7 = 0,\ x_1 = 7,\ x_2 = -1$. В цих точках функція набуває значень

$$y_1 = y(7) = \frac{1}{3}7^3 - 3\cdot 49 - 7\cdot 7 + 5 = -76\frac{2}{3},\ y_2 = y(-1) = 8\frac{2}{3}.$$



спадання $(-1;7)$. Точка $\left(-1;8\dfrac{2}{3}\right)$ є точкою максимума, точка $\left(7;-76\dfrac{2}{3}\right)$ – мінімума.

Розглянемо другу похідну : $y''(x)=2x-6$. Для всіх $x\in(-\infty;3)$ $y''(x)<0$, на цьому інтервалі графік функції опуклий вгору, і $y''(x)>0, \forall x\in(3;+\infty)$ -- графік опуклий вниз.

3. Провести повне дослідження функції $y(x)=\dfrac{x^2+1}{2x+1}$.

1) $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) Точки перетину з віссю $0y$: $x=0,\ y=1$.

3) $y(-x)=\dfrac{x^2+1}{-2x+1}$ -- не є парною, не є непарною (функція загального виду).

4) Функція неперіодична.

5) Обчислимо першу похідну, її стаціонарні та критичні точки:

$y'(x)=\dfrac{2\left(x^2+x-1\right)}{(2x+1)^2}$ похідна невизначена при $x=-\dfrac{1}{2}$ -- критична точка,

$\dfrac{2\left(x^2+x-1\right)}{(2x+1)^2}=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ -- стаціонарні точки (окремо підраховуємо значення функції в цих точках $y_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$).

6) Запишемо інтервали зростання і спадання функції:

$y'(x)>0, x\in\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ -- інтервали зростання функції, і відповідно $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$-- інтервал спадання функції. Отже точка $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ -- локальний максимум, а $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$-- локальний мінімум.

7) Знайдемо точки перегину. Для цього обчислимо другу похідну: $y''(x)=\frac{10}{(2x+1)^3}$. Є критична точка $x=-\frac{1}{2}$ -- точка перегину.

$y''(x)<0,\ x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, тому функція опукла вгору, а для $x\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ $y''(x)>0$ функція опукла вниз.

8) Залишається розглянути питання асимптот і поведінку функції на нескінченності і в точках розриву.

Якщо $x\to\pm\infty$, то $y\to\pm\infty$.

Розглянемо поведінку функції в точці розриву $y\left(-\frac{1}{2}\pm 0\right)=\pm\infty$, це точка розриву другого роду.

Отже. маємо вертикальну асимптоту $x=-\frac{1}{2}$, горизонтальної немає.

Похила асимптота: $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-ax\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+2-2x^2-x}{4x+2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Похила асимптота $y=ax+b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Функцію досліджено.

Самостійна робота № 4. Інтегрування функції однієї змінної.

1. Обчислити інтеграл $\int\frac{\ln x}{x^7}dx$.

Обчислювати даний інтеграл будемо за допомогою інтегрування частинами $\int udv=uv-\int vdu$.

$$\int \frac{\ln x}{x^7}dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = \dfrac{dx}{x^7} \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^{-6}}{6} \end{matrix} \right| = \frac{x^{-6}}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^7} = \frac{x^{-6}}{6}\ln x - \frac{x^{-6}}{36} + c.$$

2. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{2x-3}{3x^2+2x+4}dx.$

В тричлені у знаменнику виділимо повний квадрат:

$$3x^2+2x+4 = \left(\sqrt{3}x\right)^2 + 2\sqrt{3}x\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4 - \frac{1}{3} = \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{3}$$

Тепер зробимо заміну в інтегралі $t = \sqrt{3}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ x = \dfrac{t}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{3},\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{3}}$

$$\int \frac{2x-3}{3x^2+2x+4}dx = \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{11}{3}}{t^2+\frac{11}{3}}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{t}{t^2+\frac{11}{3}}dt - \frac{11}{3}\int \frac{1}{t^2+\frac{11}{3}}dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(t^2+\frac{11}{3}\right)}{t^2+\frac{11}{3}} - \frac{11}{3}\int \frac{1}{t^2+\frac{11}{3}}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t^2+\frac{11}{3}\right| - \sqrt{\frac{11}{3}}arctg\sqrt{\frac{3}{11}}t + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x^2+2x+4\right| - \sqrt{\frac{11}{3}}arctg\,\frac{3x+1}{\sqrt{11}} + c.$$

3. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{\left(2x^2-1\right)dx}{x^4-1}.$

В чисельнику степінь многочлена 2, а в знаменнику 4, виділяти цілу частину не треба. За допомогою МНК розкладемо підінтегральний дріб на суму простих дробів. Знаменник $x^4-1 = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

$\dfrac{2x^2-1}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$. Якщо многочлен першого порядку у знаменнику, то в чисельнику нульового (стала), якщо другого у знаменнику, то в чисельнику першого(лінійна функція з невідомими коефіцієнтами). Праву сторону зведемо до спільного знаменника і отриманий чисельник прирівняємо до чисельника лівої сторони:

$$2x^2-1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+Cx(x^2-1)+D(x^2-1)$$

$$2x^2-1=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+C(x^3-x)+D(x^2-1)$$

Два многочлени рівні, якщо рівні всі коефіцієнти біля відповідних степенів, тому

$x^3: 0=A+B+C;$

$x^2: 2=A-B+D;$

$x: 0=A+B-C;$

$x^0: -1=A-B-D.$

Розв’яжемо дану систему: $\begin{matrix}(1)+(3): A+B=0\\ (2)+(4): A-B=\dfrac{1}{2}\end{matrix}$, тому $A=\dfrac{1}{4}, B=-\dfrac{1}{4}.$

$C=-A-B=0,$

$D=A-B+1=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}.$

Отже,

$$\frac{2x^2-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x^2+1}.$$

$$\int\frac{(2x^2-1)dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{3}{2}arctgx+c.$$

Самостійна №5. Диференціювання ФВА.

1. Чи є функція $z(x,y)=\sin xy-\cos xy$ розв’язком рівняння $x^2z''_{xx}-y^2z''_{yy}=0.$

Обчислимо перші частинні похідні $z'_x=y\cos xy+y\sin xy$,

$z'_y = x\cos xy + x\sin xy$. А тепер випишемо другі частинні похідні

$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = y^2\left(-\sin xy + \cos xy\right)$ і аналогічно

$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = x^2\left(-\sin xy + \cos xy\right)$. Тепер порахуємо ліву частину рівняння

$x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} = x^2 y^2\left(-\sin xy + \cos xy\right) - y^2 x^2\left(-\sin xy + \cos xy\right) = 0.$

Отже, дана функція є розв'язком заданого рівняння.

2. Обчислити значення виразу $\arccos\left(0{,}99 \cdot 0{,}02\right)$, замінивши приріст відповідної функції диференціалом.

Формула малих приростів, яку ми застосуємо виглядає наступним чином $f\left(x, y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + \dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\Delta y$. Функція у нас $f\left(x, y\right) = \arccos\left(xy\right)$, точки з відомим точним значенням функції $x_0 = 1,\ y_0 = 0$, тоді $\Delta x = -0.01$, а $\Delta y = 0.02$ і $f\left(x, y\right) = \arccos\left(0\right) = \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57$. Обчислимо перші частинні похідні в точці $(1;0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1;0) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(xy\right)^2}}\, y\,\Big|_{(1;0)} = 0$;

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1;0) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(xy\right)^2}}\, x\,\Big|_{(1;0)} = -1.$ Отже,

$\arccos\left(0{,}99 \cdot 0{,}02\right) \approx 1{,}57 + 0 * 0{,}01 - 1 * 0{,}02 = 1{,}55.$

За допомогою калькулятора отримаємо

$\arccos\left(0{,}0198\right) = 1.5509950328.$

3. Задана функція $u = \ln\left(z - \dfrac{x}{y}\right)$, точка $A\left(1, -2, 3\right)$ та вектор $\bar{s}$.

Знайти:

а)градієнт функції u в точці A;

б)похідну функції u в точці A за напрямком вектора $\bar{s} = grad\, u\left(A\right)$.

Обчислюємо перші частинні похідні:

$u'_x = -\dfrac{y}{zy - x}\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{zy - x}\Big|_{A(1,-2,3)} = -\dfrac{1}{7},$

$$u'_y = \frac{y}{zy-x}\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y(zy-x)}\Big|_{A(1,-2,3)} = \frac{-1}{14},\ u'_z = \frac{y}{zy-x}\Big|_{A(1,-2,3)} = \frac{2}{7}.$$

Отже

$$grad\, u(1;-2;3) = \left(-\frac{1}{7}; -\frac{1}{14}; \frac{2}{7}\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{(grad u)^2}{|grad u|} = |grad u| = \sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{14}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{1}{14}\sqrt{21}.$$

4. Знайти локальні екстремуми функції

$$u(x,y) = x^2 - 2xy + y^3 - 3y - 7.$$

Спершу для заданої функції знайдемо критичні точки, тобто, точки в яких перші частинні похідні дорівнюють 0 або не існують.

$$\begin{cases} u'_x = 2x - 2y = 0, \\ u'_y = -2x + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y, \\ 3y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Отже, маємо дві наступні критичні точки: $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}; \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$ та $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}; \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$. Щоб перевірити чи це точки екстремуму та визначити які, треба обчислити другий диференціал: $\begin{cases} u''_{xx} = 2, \\ u''_{xy} = -2, \\ u''_{yy} = 6y \end{cases}$

$d^2u = 2dx^2 - 4dxdy + 6ydy^2$, нас цікавить наступна матриця $\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{xy} & u''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}$. Її визначник дорівнює $12y - 4$.

Підставляємо наші точки і маємо для $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}; \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$ $u''_{xx} = 2 > 0$, $12\frac{1-\sqrt{10}}{3} - 4 = -4\sqrt{10} < 0$, за критерієм Сильвестра другий диференціал не є додатньо чи від'ємно визначеним, отже точка не є екстремумом. Перевіремо точку $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}; \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$ $u''_{xx} = 2 > 0$,

$12\frac{1+\sqrt{10}}{3}-4=4\sqrt{10}>0$, за критерієм Сильвестра другий диференціал додатньовизначений, отже, в точці досягається мінімум функції.

5. Знайти умовний екстремум функції $u=2x^2-10xy-3y^2+$ $+5x-y-7$, якщо рівняння зв'язку $x+2y=9$.

1спосіб. Рівняння зв'язку лінійне, одну змінну можна легко виразити через іншу, скористаємося цим $x=9-2y$. І підставимо цей х в функцію

$$u(9-2y,y)=2(9-2y)^2-10y(9-2y)-3y^2+5(9-2y)-y-7=$$

$=25y^2-173y+200$. Це парабола, вітки якої напрямлені вгору, тому критична точка буде мінімумом. Критичну точку нової функції шукаємо з $u'_y=0\Rightarrow 50y-173=0\Rightarrow y=\frac{173}{50}$. Тоді $x=9-2y=\frac{52}{25}$.

Точка $\left(\frac{52}{25};\frac{173}{50}\right)$ є точкою умовного мінімуму.

2 спосіб. У більшості випадків умова така, що важко виразити якунебудь змінну однозначно через інші змінні, тоді на допомогу приходить метод множників Лагранжа. Спершу випишемо функцію Лагранжа для заданої задачі: $L(x,y,\lambda)=u(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=$ $=2x^2-10xy-3y^2+5x-y-7+\lambda(x+2y-9)$. Зауважимо, що умову потрібно переписувати у вигляді $\varphi(x,y)=0$, тому λ домножається саме на $x+2y-9$. Для цієї функції шукаємо критичні точки з системи

$$\begin{cases} L'_x=0, \\ L'_y=0, \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} . \begin{cases} 4x-10y+5+\lambda=0, \\ -10x-6y-1+2\lambda=0\Rightarrow \\ x+2y-9=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{46+18\lambda}{124}=\frac{23+9\lambda}{62}, \\ x=\frac{1}{4}\left(-5-\lambda+\frac{115+45\lambda}{31}\right), \\ \frac{-155-31\lambda+115+45\lambda+92+36\lambda}{124}=9 \end{cases} \Rightarrow \lambda=\frac{1064}{50}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{23 \cdot 25 + 9 \cdot 532}{31 \cdot 50} = \dfrac{173}{50}$, аналогічно попередньому методу знаходимо $x = 9 - 2y = \dfrac{52}{25}$. Ми знайшли критичну точку, тепер треба дослідити, чи вона екстремум і який вона екстремум. Виписуємо другий диференціал для функції Лагранжа $d^2L = 4dx^2 - 20dxdy - 6dy^2$ і продиференціювавши умову маємо $dx = -2dy$, підставляємо цей результат в $d^2L\,|_{dx=-2dy} = 16dy^2 + 40dy^2 - 6dy^2 > 0$. Отже дана точка умовний мінімум заданої функції.

6. Перевірити, чи є функція $u = \varphi\left(xy - z, xz\right)$ розв'язком диференціального рівняння $xzu'_z - x^2u'_x + \left(xy + z\right)u'_y = 0$ (φ - довільна, достатню кількість разів диференційовна функція).

Обчислимо потрібні нам в рівнянні похідні. $u'_x = \varphi'_1 \cdot y + \varphi'_2 \cdot z$, $u'_y = \varphi'_1 \cdot x$, $u'_z = -\varphi'_1 + \varphi'_2 \cdot x$. Тепер підставимо отримане в рівняння. $-xz\varphi'_1 + xz\varphi'_2 \cdot x - x^2\varphi'_1 \cdot y - x^2\varphi'_2 \cdot z + xy\varphi'_1 \cdot x + z\varphi'_1 \cdot x = 0$. Отже, дана функція є розв'язком даного диференціального рівняння.

Самостійна робота № 6. Числові та функціональні ряди.

1. Дослідити ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \dfrac{25n-34}{2n^3-5n+6}}{\ln\left(\dfrac{n^3+n-1}{n^3+1}\right)}$ на збіжність.

Розглянемо, якій функції еквівалентний загальний член цього ряду на нескінченності $a_n = \dfrac{\sin^2 \dfrac{25n-34}{2n^3-5n+6}}{\ln\left(\dfrac{n^3+n-1}{n^3+1}\right)}$. Дріб $\dfrac{25n-34}{2n^3-5n+6} \to 0$, $n \to \infty$, отже, $\sin^2 \dfrac{25n-34}{2n^3-5n+6} \sim \left(\dfrac{25n-34}{2n^3-5n+6}\right)^2 \sim \left(\dfrac{25n}{2n^3}\right)^2 = \dfrac{25^2}{4n^4}$, $n \to \infty$. Дріб $\dfrac{n^3+n-1}{n^3+1} = 1 + \dfrac{n-2}{n^3+1} \to 1$, $n \to \infty$, отже

$$\ln\left(1+\frac{n-2}{n^3+1}\right)\sim\frac{n-2}{n^3+1}\sim\frac{1}{n^2},\ n\to\infty.$$ Тепер маємо,

$$a_n\sim\frac{25^2}{4n^4\frac{1}{n^2}}=\frac{25^2}{4n^2},$$ за асимптотично степеневою ознакою заданий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\dfrac{25n-34}{2n^3-5n+6}}{\ln\left(\dfrac{n^3+n-1}{n^3+1}\right)}$$ збігається, оскільки збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25^2}{4n^2}$.

2. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ на абсолютну та умовну збіжність.

Для абсолютної збіжності досліджується ряд з модулями, отже розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Загальний член $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},n\to\infty$,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний (степінь менше 1). Отже, абсолютної збіжності немає. Дослідимо умовну збіжність. Це ряд типу $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Можна використати ознаку Лейбніца. Для цього треба довести, що $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ монотонна нескінченно мала величина при $n\to\infty$.

$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0, n\to\infty$, для доведення монотонності розглянемо

функцію $y(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, похідна $y'(x)=-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{(2x+1)^3}}<0$

зберігає знак для всіх $x\geq 1$, отже послідовність монотонна. За ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ збіжний.

3. Знайти радіус та інтервал збіжності узагальнено-степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^2}e^{-nx}.$$

Виконаємо заміну $e^{-x}=t\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^2}t^n$. Знайдемо радіус збіжності

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^3}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^2}=(1)^{\infty}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{-2}3n^2\frac{-2}{n^2+1}}=$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}e^{-\frac{6n^2}{n^2+1}}=e^{-6}.$$ Отже $R=e^6$. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^2}e^{-nx}$ збігається для всіх x таких, що виконується $e^{-x}<e^6\Rightarrow x>-6$.

4. Розкласти функцію $f(x)=\frac{2x^4}{x^2+2x-3}$ в ряд Маклорена і вказати радіус збіжності.

Щоб розкласти функцію $f(x)=\frac{2x^4}{x^2+2x-3}$ в ряд Маклорена розглянемо частину цієї функції, а саме $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{(x+3)(x-1)}$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)\overset{(6)}{=\!=}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(-1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^n$$, для двох дробів використовували формулу (6) рядів Маклорена. Для нього радіус збіжності дорівнює 1. Отже для першого ряду радіус 1 і $|x|<1$, для другого $\left|\frac{x}{3}\right|<1\Rightarrow|x|<3$ радіус 3. Отже обидва ряди збігаються, коли $|x|<1$. Тепер згадаємо про нашу задану функцію

$$f(x)=\frac{2x^4}{x^2+2x-3}=2x^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(-1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(-1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^{n+4}$$ і радіус збіжності $R=1$.

5. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\ln\left(\frac{6-x}{x+2}\right)$ у ряд Тейлора за степенями $(x-1)$.

Виконаємо спершу заміну змінної $t = x-1,\ \mathrm{f}(t)=\ln\left(\frac{5-t}{t+3}\right)$ цю функцію будемо розкладати в ряд Маклорена відносно нової змінної.

$$\mathrm{f}(t)=\ln\left(\frac{5-t}{t+3}\right)=\ln(5-t)-\ln(t+3)=\ln 5+\ln\left(1-\frac{t}{5}\right)-\ln 3-\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)\underline{\underline{(5)}}$$

$$=$$

$$\ln\frac{5}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{t}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{t}{3}\right)^n=\ln\frac{5}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\left(\frac{1}{5}\right)^n+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)t^n$$

Ми застосували до функції логариф натуральний формулу (5) з радіусом збіжності 1. Тому перший який ми отримали збігається для $\left|\frac{t}{5}\right|<1\Rightarrow|t|<5$, а другий ряд -- $\left|\frac{t}{3}\right|<1\Rightarrow|t|<3$. Обидва ряди збігаються для $|t|<3$. Радіус збіжності 3. Виконуючи обернену заміну отримаємо

$$\mathrm{f}(x)=\ln\left(\frac{6-x}{x+2}\right)=\ln\frac{5}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\left(\frac{1}{5}\right)^n+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)(x-1)^n.$$

6. Розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну функцію

$$f(x)=\begin{cases}2x-1,-\pi<x<0,\\ x,0\le x<\pi\end{cases}.$$

Щоб виписати ряд Фур'є треба обчислити коефіцієнти. Отже,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(2x-1)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}u=2x-1 & dv=\cos nxdx\\ du=2dx & v=\frac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}u=x & dv=\cos nxdx\\ du=dx & v=\frac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((2x-1)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{s}innxdx+x\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n^2}(\cos 0-\cos n\pi)+\frac{1}{n^2}(\cos n\pi-\cos 0)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)\right).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(2x-1)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}x\mathrm{s}innxdx\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} u=2x-1 & dv=\sin nxdx \\ du=2dx & v=\dfrac{-\cos nx}{n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u=x & dv=\sin nxdx \\ du=dx & v=\dfrac{-\cos nx}{n} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-(2x-1)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(\cos 0+(-2\pi-1)\cos n\pi\right)-\frac{1}{n}\left(\pi\cos n\pi\right)\right)=\frac{1}{\pi n}\left(1-(\pi+1)(-1)^{n}\right).$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(2x-1)dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(2x-1)^2}{4}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-2\pi-1)^2}{4}+\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{-\pi-2}{2}$$

В точках неперервності ряд Фур'є $F(x)$збігається до функції

$$f(x)=\begin{cases}2x-1,-\pi<x<0,\\ x,0\le x<\pi\end{cases}=$$

$$=\frac{-\pi-2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx+\frac{1}{\pi n}\left(1-(\pi+1)(-1)^n\right)\sin nx\right).$$

$$F(0+2\pi k)=\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2}.$$

$$F(\pi+2\pi k)=\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}=\frac{2\pi-1+\pi}{2}=\frac{3\pi-1}{2}.$$

$$F(-\pi+2\pi k)=\frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2}=\frac{-2\pi-1-\pi}{2}=-\frac{3\pi+1}{2}.$$

7. Функцію $f(x)=x$, $x\in(0;2)$ розкласти в ряд Фур'є: а) з періодом 1; б) за косинусами; в) за синусами.

а) Щоб розкласти функцію $f(x)=x, x\in(0;2)$ з періодом 1, шукаємо коефіцієнти наступним чином, у формулах $l=1$.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx==\int_{0}^{2}x\cos n\pi xdx=x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{0}^{2}+\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_{0}^{2}=0$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx=\int_0^2 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\int_0^2 x\sin n\pi x dx=-x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^2+\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^2=\frac{-2}{n\pi}$$

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\sin n\pi x,\ x\in(0,2).$$

Б) Щоб розкласти дану функцію за косинусами, треба її парно продовжити вліво і розглянути парну функцію $f(x)=\begin{cases}x, x\in(0,2);\\ -x, x\in(-2;0)\end{cases}.$

Одразу випишемо $b_n=0$.

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left(x\frac{2\sin\frac{n\pi x}{2}}{n\pi}+\frac{4\cos\frac{n\pi x}{2}}{(n\pi)^2}\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{4(\cos n\pi-\cos 0)}{(n\pi)^2}=\frac{4\left((-1)^n-1\right)}{(n\pi)^2}.$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2.$$

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left((-1)^n-1\right)}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2},\ x\in(0,2)$$

В) Щоб розкласти дану функцію за синусами, треба її непарно продовжити вліво і розглянути непарну функцію $f(x)=x,\ x\in(-2;2)$.

Одразу випишемо $a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left(-x\frac{2\cos\frac{n\pi x}{2}}{n\pi}+\frac{4\sin\frac{n\pi x}{2}}{(n\pi)^2}\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{-4(\cos n\pi)}{n\pi}=\frac{-4\left((-1)^n\right)}{n\pi}.$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2},\ x\in(0,2).$$

12. Відомості з елементарної математики

Арифметична прогресія:

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \dots, a_n = a_1 + (n-1)d,$$

d – **різниця** арифметичної прогресії.

Формула n–го члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Формула суми n *перших членів* арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Характеристична властивість арифметичної прогресії:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрична прогресія:

$$b_1, b_2 = b_1 q, b_3 = b_1 q^2, \dots, b_n = b_1 q^{n-1},$$

q – **знаменник** геометричної прогресії.

Формула n–го члена геометричної прогресії:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суми n *перших членів* геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Формула суми нескінченої кількості членів геометричної прогресії:

$$S_\infty = \frac{b_1}{1-q}, |q|<1.$$

Характеристична властивість геометричної прогресії:

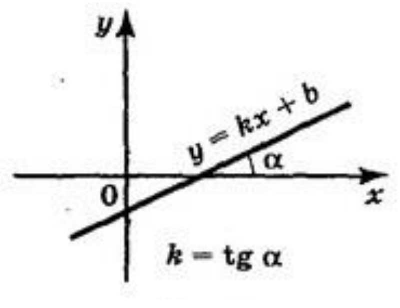
$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

Формули скороченого множення:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

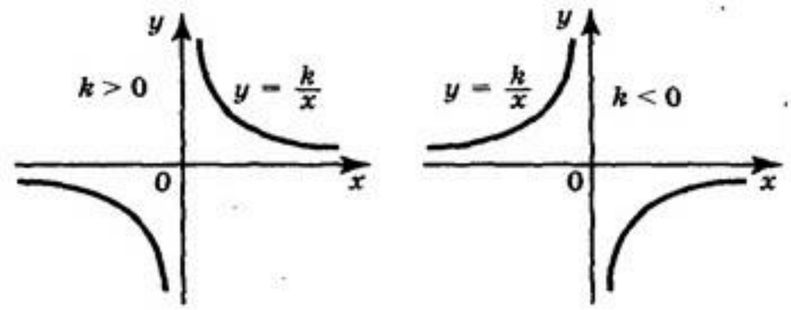
Графіки елементарних функцій

Лінійна функція: $y = kx + b$



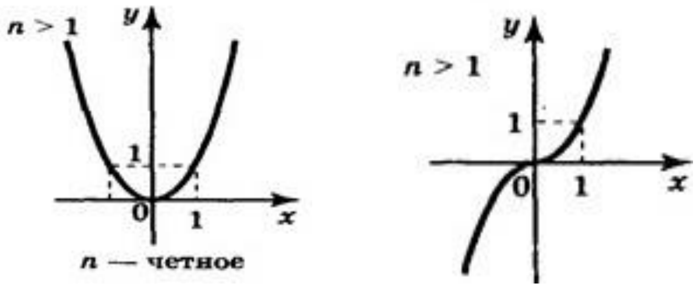
Функція $y = kx + b$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Вона зростає при $k > 0$, спадає – при $k < 0$. Функція є неперервною на множині визначення. Графік лінійної функції можна побудувати по двом точкам.

Функція оберненої пропорційності: $y = \dfrac{k}{x}$



Функція $y = \dfrac{k}{x}$ визначена на $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, множиною значень є $(-\infty; \infty)$. Вона спадає при $k > 0$, зростає – при $k < 0$ на $(-\infty; 0)$ та $(0; \infty)$. Ця функція є непарною. Функція є неперервною на множині визначення, має розрив в точці 0.

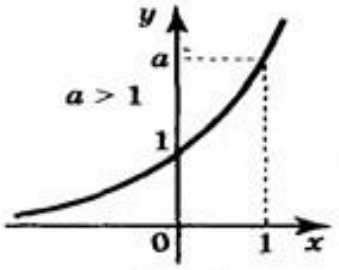
Степенева функція: $y = x^k,\ k \in \mathbb{R}$

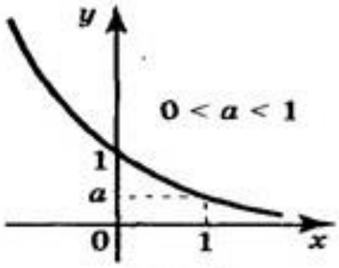


Функція $y = x^{2n},\ n \in \mathbb{N}$ визначена на $(-\infty; \infty)$, множиною значень є $[0; \infty)$. Вона зростає при $x > 0$, спадає – при $x < 0$. Ця функція є парною $(-x)^{2n} = x^{2n}$. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція $y = x^{2n-1},\ n \in \mathbb{N}$ визначена на $(-\infty; \infty)$, множиною значень є $(-\infty; \infty)$. Вона зростає при всіх x. Ця функція є непарною $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$. Функція є неперервною на множині визначення.

Показникова функція: $y = a^x$





Функція $y = a^x$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $(0;\infty)$. Ця функція зростає при $a > 1$, спадає – при $0 < a < 1$. Функція є неперервною на множині визначення.

Властивості степенів:

1.$a^0 = 1$. 2.$a^1 = 1$.

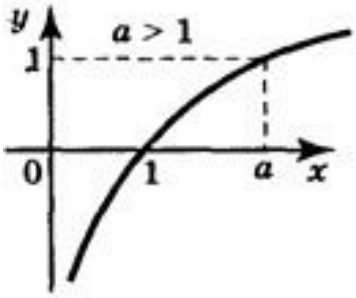
3.$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. 4.$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

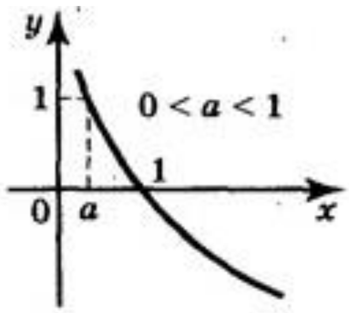
5.$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$. 6.$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

7.$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. 8.$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Означення **логарифма**: $b = a^{\log_a b}$, $b > 0, a > 0, a \neq 1$.

Логарифмічна функція: $y = \log_a x$





Функція $y = \log_a x, x > 0$ визначена на $(0;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Ця функція зростає при $a > 1$, спадає при $0 < a < 1$. Функція є неперервною на множині визначення.

Зауважимо, що логарифмічна функція $y = \log_a x$ є оберненою до степеневої функції $y = a^x$, тобто мають місце наступні тотожності $a^{\log_a x} = x, \quad \log_a(a^x) = x, \quad x > 0$ при допустимих значеннях a.

Властивості логарифмів при $b > 0, a > 0, a \neq 1$:

1. $\log_a 1 = 0.$ 2. $\log_a a = 1.$

3. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc).$ 4. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}.$

5. $\log_a b^n = n \log_a b.$ 6. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b.$

7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$ 8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

Рівняння

1. $x^2 = a, \ a > 0$

$x = \pm\sqrt{a}.$

2. $ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0,$

$$D = b^2 - 4ac : x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

!!!! Квадратичний тричлен можна розкласти на множники за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$

4. $\sqrt{x} = a, \ a > 0$

$x = a^2.$

5. $a^x = b, \ b > 0, \ a > 0, \ a \neq 1$

$x = \log_a b.$

6. $x^n = a, \ a > 0$

$x = \sqrt[n]{a}.$

7. $|x| = a,\ a > 0$

$x = \pm a.$

Нерівності

1. $|x| \geq a,\ a > 0$

$x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty).$

$|x| < a,\ a > 0$

$x \in (-a; a).$

2. $a^x \leq b,\ b > 0,\ a > 1$

$x \leq \log_a b.$

$a^x > b,\ b > 0,\ 0 < a < 1$

$x < \log_a b.$

3. $\log_a x \geq \log_a y,\ a > 1$

$x \geq y > 0.$

$\log_a x < \log_a y,\ 0 < a < 1$

$x > y > 0.$

4. $a^x \geq a^y,\ a > 1$

$x \geq y;$

$a^x < a^y,\ 0 < a < 1$

$x > y.$

5. $$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}.$$

6. $$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

Метод інтервалів

* Розв’язуючи нерівність $(x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{\alpha_n} \wedge 0$, $a_i \neq a_j,\ i \neq j$, розставимо числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на числовій прямій. Ці числа розбивають дійсну вісь на $n+1$ інтервали, на кожному з яких вираз у лівій частині нерівності зберігає знак. Підставляючи по одному значенню з кожного інтервалу, визначаємо чи даний інтервал задовільняє нашу нерівність.

* Розв'язуючи нерівність $\frac{P(x)}{Q(x)} \wedge 0$, де $P(x), Q(x)$ – многочлени, заміняємо на еквівалентну $P(x)Q(x) \wedge 0$, знаходимо всі дійсні корені многочленів $P(x)$, $Q(x)$ і впорядкуємо їх за зростанням $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Розставимо знайдені корені на числовій осі. Ці числа розбивають дійсну вісь на $n+1$ інтервали, на кожному з яких дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ зберігає знак. Підставляючи по одному значенню з кожного інтервалу, визначаємо, які з інтервалів задовольняють даній нерівності. Не забуваємо відкинути ті точки де $Q(x) = 0$.

Теорема Безу

Теорема. Залишок від ділення $P(x)$ на лінійний двучлен $x - a$ дорівнює значенню многочленна в точці a, числу $P(a)$.

Наслідок. Для того щоб многочлен $P(x)$ ділився націло на лінійний двучлен $x - a$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $P(a) = 0$, тобто щоб число a було коренем многочленна $P(x)$.

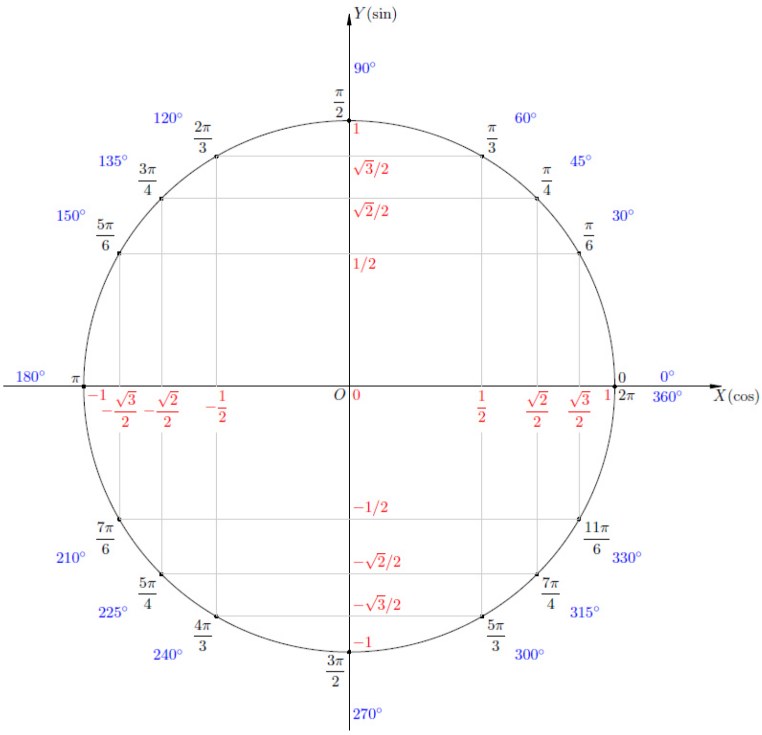
Тобто, розв'язуючи рівняння $P(x) = 0$, знаходимо корінь многочлена $P(x)$ – число a. Теорема Безу стверджує, що многочлен $P(x)$ ділиться на $x - a$. Тому вихідне рівняння переписується у вигляді $(x-a)Q(x) = 0$. Таким чином понижується степінь многочлена, корені якого потрібно знайти.

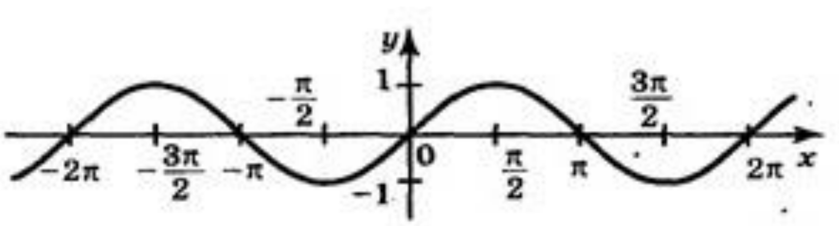
Наприклад, рівняння $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ переписується у вигляді $(x+1)(x^2 - 4) = 0$, корені якого $x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$.

Тригонометрія

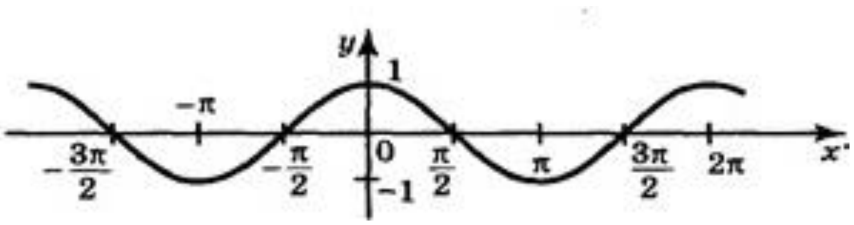
Поняття $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ для всіх дійсних x визначаються за допомогою одиничного кола. Нехай одиничний радіус пересунувся на кут x проти руху годинникової стрілки (за рухом – у випадку від'ємного значення x), тоді $\sin x$ – проекція відповідної точки одиничного кола на вісь OY, $\cos x$ – проекція відповідної точки одиничного кола на вісь OX,

$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$.

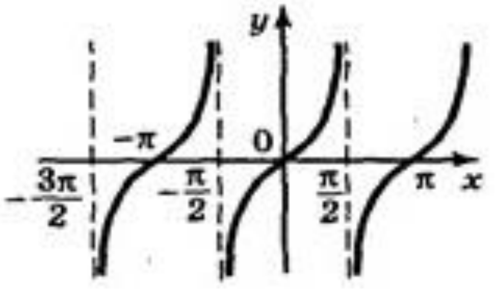


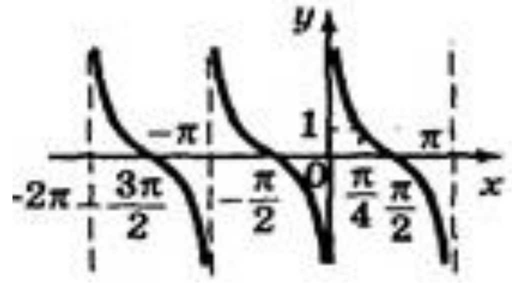


Функція $y = \sin x$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $[-1;1]$. Ця функція є непарною ($\sin(-x) = -\sin x$), періодичною з періодом $T = 2\pi$. Функція є неперервною на множині визначення.



Функція $y = \cos x$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $[-1;1]$. Ця функція є парною ($\cos(-x) = \cos x$), періодичною з періодом $T = 2\pi$. Функція є неперервною на множині визначення.





Функція $y = tgx$ визначена на інтервалах $(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Ця функція є непарною $(tg(-x) = -tgx)$, періодичною з періодом $T = \pi$. Функція є неперервною на кожному з інтервалів $(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$.

Функція $y = ctgx$ визначена на інтервалах $(\pi k; \pi + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Ця функція є непарною $(ctg(-x) = -ctgx)$, періодичною з періодом $T = \pi$. Функція є неперервною на кожному з інтервалів $(\pi k; \pi + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$.

Формули зведення

Розглянемо співвідношення, за допомогою яких значення тригонометричних функцій аргументів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ виражаються через значення $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

Формули зведення описуються наступними правилами:

1) якщо у формулах містяться кути π і 2π, то найменування функції не змінюється; якщо ж у формулах містяться кути $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$, тоді функція змінюється на ко-функцію (синус – на косинус, тангенс – на котангенс і навпаки);

2) щоб визначити знак у правій частині формули («+» або « –») досить, вважаючи кут α гострим, визначити знак вихідної функції кута вихідного аргументу $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \quad \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$. Одержаний знак ставлять перед ко-функцією кута α у рівності.

Приклад. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha.$

Основні тригонометричні тотожності:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \; tgx \cdot ctgx = 1.$$

1. $\sin(-x) = -\sin x; \; \cos(-x) = \cos x;$
   $tg(-x) = -tgx; \; ctg(-x) = -ctgx.$

2. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x; \; \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x;$
   $tg(\frac{\pi}{2} - x) = ctgx; \; ctg(\frac{\pi}{2} - x) = tgx.$

3. $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x; \; \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x;$
   $tg(\frac{\pi}{2} + x) = -ctgx; \; ctg(\frac{\pi}{2} + x) = -tgx.$

4. $\sin(\pi - x) = \sin x; \; \cos(\pi - x) = -\cos x;$
   $tg(\pi - x) = -tgx; \; ctg(\pi - x) = -ctgx.$

5. $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x; \; \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x;$
   $tg(\frac{3\pi}{2} - x) = ctgx; \; ctg(\frac{3\pi}{2} - x) = tgx.$

6. $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x; \; \cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x;$
   $tg(\frac{3\pi}{2} + x) = -ctgx; \; ctg(\frac{3\pi}{2} + x) = tgx.$

7. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$
   $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$

8. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$
   $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

9. $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta};$
   $ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}.$

10. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

12. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

13. $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

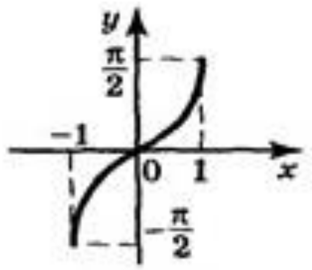
14. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right];$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right];$$

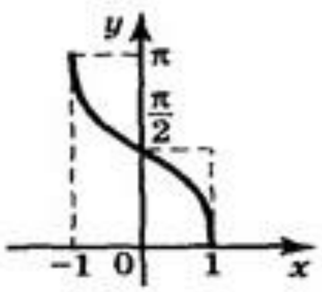
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right].$$

Обернені тригонометричні функції

$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



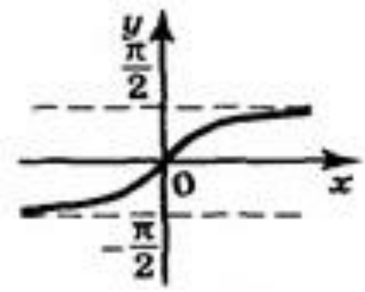
Функція $y = \arcsin x,$ визначена на $[-1;1]$, множиною значень якої є $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ – обернена до функції $y = \sin x,$ тобто мають місце рівності:

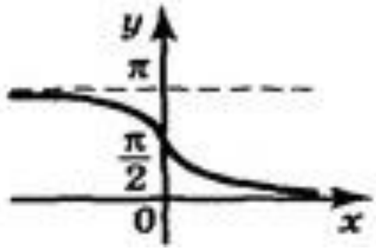
$\arcsin(\sin x) = x,\ x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}];\quad \sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1;1]$. Ця функція є непарною ($\arcsin(-x) = -\arcsin x$), не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція $y = \arccos x,$ визначена на $\left[-1;1\right]$, множиною значень якої є $\left[0;\pi\right]$ – обернена до функції $y = \cos x,$ тобто мають місце рівності:

$\arccos(\cos x) = x,\ x \in [0;\pi];\quad \cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1;1]$. Ця функція не є ні парною, ні непарною ($\arccos(-x) = \pi - \arccos x$), не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

$y = \mathrm{arc}\,tgx$ $\qquad\qquad$ $y = \mathrm{arc}\,ctgx$





Функція $y = \mathrm{arc}\,tgx,$ визначена на $\left(-\infty;\infty\right)$, множиною значень якої є $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ – обернена до функції $y = tgx,$ тобто мають місце рівності:

$arctg(tgx) = x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right);\quad tg(arctgx) = x,\ x \in (-\infty;\infty)$. Ця функція є непарною ($arctg(-x) = -arctgx$), не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція $y = \mathrm{arc}\,ctgx,$ визначена на $\left(-\infty;\infty\right)$, множиною значень якої є $\left(0;\pi\right)$ – обернена до функції $y = tgx,$ тобто мають місце рівності:
$arcctg(ctgx) = x,\ x \in \left(0;\pi\right);\quad ctg(arcctgx) = x,\ x \in (-\infty;\infty)$. Ця функція не є ні парною, ні непарною ($arcctg(-x) = \pi - arcctgx$), не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

Тригонометричні рівняння

1. $\sin x = a,\ -1 \le a \le 1$

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$

2. $\cos x = a,\ -1 \le a \le 1$

$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z.$

3. $tgx = a,\ a \in \mathbb{R}$

$x = \mathrm{arc}\,tga + \pi n, n \in Z.$

4. $ctgx = a,\ a \in \mathbb{R}$

$x = arcctga + \pi n, n \in Z.$

Окремо наведемо розв'язки деяких стандартних тригонометричних рівнянь:

5. $\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

6. $\sin x = -1$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

7. $\sin x = 0$

$x = \pi n, n \in Z.$

8. $\cos x = 1$

$x = 2\pi n, n \in Z.$

9. $\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$

10. $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

Література

1.Берман Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа. – М., 1977.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник. – М., 1987.

3.Гаврильченко Х.И., Кривой А.Ф., Кропивянский П.С. и др. Высшая математика: сборник задач. – К., 1991.

4.Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Т.2. – Л., 1949.

5.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1973.

6.Дубовик В.П., Юрик І.І, Вовкодав І.П. та ін. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник. – К., 2004.

7.Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т.1,2 – М., 2001.

8.Пискунов Н.Е. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1,2. - М., 1972.

9.Єфіменко С.В., Кривошея С.А. Контрольні завдання з математичного аналізу. – К.: „Київський університет", 2002.

10.Єфіменко С.В., Кривошея С.А., Придатченко Ю.В., Янішевський А.Т. Комплексні числа. – К.: „Київський університет", 1997.

11.Єфіменко С.В., Сугакова О.В., Індивідуальні завдання з математичного аналізу для самостійної роботи. – К.: „Київський університет", 2006.

12.Клепко В.Ю. Методичні вказівки до вивчення розділу „Функції багатьох змінних". – К.:ЕКОМЕН, 1998.

13.Кривошея С.А., Моторна О.В., Майко Н.В., Прощенко Т.М. Математичний аналіз. Завдання для самостійної роботи студентів ч.1,2 –К. Київський університет, 2013.

Зміст