Київський Національний університет імені Тараса Шевченка

Є. Д. Білоколос, Д. Д. Шека

Збірник задач з математичної фізики

Методична розробка
для студентів природничих факультетів

Київ — 2017

УДК 517.53

Є. Д. Білоколос, Д. Д. Шека **версія 3 березня 2017 р.**
Збірник задач з математичної фізики: Методична розробка для студентів природничих факультетів. — К., 2017.-73 с.

Збірник задач містить більше 500 задач різного рівня складності.
Для студентів фізико-математичних спеціальностей університетів.

Зміст

Передмова

За основу використано завдання, які впродовж багатьох років використовуються авторами на радіофізичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Основна частина задач складалася авторами спеціально для «Збірника», інші було запозичено з [6–8].

«Збірник» може бути рекомендовано студентам, аспірантам і викладачам фізичних та фізико–математичних спеціальностей вищих навчальних закладів. «Збірник» може бути корисним також і для самопідготовки.

Глава 1

Вступ

§ 1. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними:

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = \Phi(x,y,u,u_x,u_y). \tag{1.1}$$

Для проведення класифікації таких рівнянь суттєві ті властивості рівнянь, що не змінюються при перетвореннях координат. Такою інваріантною характеристикою є знак дискримінанту

$$\Delta \triangleq b^2 - ac, \tag{1.2}$$

тобто величина $\operatorname{sign}\Delta$. Ми класифікуємо рівняння за цією інваріантною величиною.

рівняння (1.1) називається:

1. *гіперболічним*, якщо $\Delta > 0$;
2. *еліптичним*, якщо $\Delta < 0$;
3. *параболічним*, якщо $\Delta = 0$.

Для приведення рівняння до канонічного вигляду введемо *характеристичну* функцію (1.1), або його *характеристику* $w(x,y)$, що задовольняє наступне характеристичне рівняння:

$$a(x,y)w_x^2 + 2b(x,y)w_xw_y + c(x,y)w_y^2 = 0. \tag{1.3}$$

Крива $w(x,y) = \mathrm{const}$, що є розв'язком характеристичного рівняння (1.3), має назву *характеристичної кривої*, а напрямок $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$ — *характеристичним напрямком*. З умови $w(x,y) = \mathrm{const}$ випливатиме, що $w_x\mathrm{d}x + w_y\mathrm{d}y = 0$, тобто характеристичний напрямок дуже просто пов'язаний з w: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{w_x}{w_y}$, звідки

$$\frac{\mathrm{d}y_+}{\mathrm{d}x} = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{a}, \tag{1.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_-}{\mathrm{d}x} = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{a}. \tag{1.4b}$$

Інтеграли рівнянь (1.4) є характеристиками $w(x,y) = \mathrm{const}$. В залежності від знаку Δ маємо різні типи характеристичних кривих (1.4). Розглянемо кожний з випадків окремо.

1. $\Delta > 0$, рівняння гіперболічного типу. Обидва розв'язки $y_+(x)$ та $y_-(x)$ дійсні та різні. В цьому випадку ми маємо дві сім'ї характеристик, $w_+(x, y) = \text{const}$ та $w_-(x, y) = \text{const}$. Заміною змінних

$$\xi = w_+(x, y), \quad \eta = w_-(x, y),$$

рівняння зводиться до так званої *першої канонічної форми* рівняння гіперболічного типу

$$u_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{1.5a}$$

Заміною

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta$$

можна привести рівняння до *другої канонічної форми*

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \tag{1.5b}$$

2. $\Delta < 0$, рівняння еліптичного типу. Розв'язки $y_+(x)$ та $y_-(x)$ є комплексно спряженими. В цьому випадку відповідні характеристики мають вигляд

$$w_\pm(x, y) = \xi(x, y) \pm i\eta(x, y).$$

В змінних $\xi(x, y), \eta(x, y)$ рівняння еліптичного типу приймає *канонічну форму*

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{1.5c}$$

3. $\Delta = 0$, рівняння параболічного типу. В цьому випадку характеристики $w_+(x, y)$ та $w_-(x, y)$ збігаються. Виберемо незалежні змінні у вигляді

$$\xi = w(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

де $\eta(x, y)$ — будь – яка функція, незалежна від $\xi(x, y)$. Таким чином ми отримаємо для рівняння параболічного типу *канонічну форму*

$$u_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{1.5d}$$

Приклад 1.1. $\triangleleft$ Дослідити тип рівняння Чаплигіна—Трікомі

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0 \tag{1.6}$$

та привести його до канонічного вигляду.
$\triangleright$

Розв'язання. ◀ Дискримінант рівняння (1.1) є $\Delta = -x$. Отже, рівняння Чаплигіна-Трікомі має різний тип в різних областях незалежних змінних: при $x < 0$ воно гіперболічне, при $x > 0$ еліптичне, а при $x = 0$ — параболічне. Розглянемо кожну з перелічених областей:

Гіперболічний тип, $x < 0$. Рівняння характеристик має вигляд:

$$\frac{\mathrm{d}y_\pm}{\mathrm{d}x} = \pm(-x)^{1/2}.$$

Ці рівняння мають наступні інтеграли $w_\pm = \mathrm{const}$, що визначають його характеристики:

$$w_\pm(x, y) = y \mp \frac{2}{3}(-x)^{3/2}.$$

Отже, перетворенням координат

$$\xi = w_+(x, y) = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \qquad \eta = w_-(x, y) = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2} \tag{1.7}$$

рівняння приводиться до канонічного вигляду

$$u_{\xi\eta} = \frac{u_\xi - u_\eta}{6(\xi - \eta)}. \tag{1.8}$$

Еліптичний тип, $x > 0$. Рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y_\pm}{\mathrm{d}x} = \pm i x^{1/2}$$

має характеристики:

$$w_\pm(x, y) = y \pm i\frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Отже, перетворенням координат

$$\xi = \operatorname{Re} w_+(x, y) = y, \qquad \eta = \operatorname{Im} w_+(x, y) = \frac{2}{3}x^{3/2} \tag{1.9}$$

рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -\frac{3u_\eta}{\eta}. \tag{1.10}$$

Параболічний тип, $x = 0$. В незалежних змінних x, y рівняння Чаплигіна—Трікомі має канонічний вигляд

$$u_{xx} = 0. \tag{1.11}$$

►

В прикладах (1)–(29) треба дослідити тип рівнянь.

1. $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y = 0$.

2. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0$.

3. $4y^2u_{xx} - \exp(2x)u_{yy} - 4y^2u_x = 0$.

4. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

5. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$.

6. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$.

7. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$.

8. $u_{xx}\mathrm{sign}y + 2u_{xy} - u_{yy}\mathrm{sign}x = 0$.

9. $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \mathrm{sign}x)u_{yy} = 0$.

10. $u_{xx}\mathrm{sign}y + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

11. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.

12. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$.

13. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$.

14. $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$.

15. $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0.$

16. $u_{xx} - \left(1+y^2\right)^2 u_{yy} - 2y\left(1+y^2\right)u_y = 0.$

17. $u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)u_{yy} + \cos x u_y = 0.$

18. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - 3\cos x u_y = 0.$

19. $2xu_{xx} - yu_{xy} - 6xu_{yy} - e^x u_y = 0.$

20. $xu_{xx} - |y|u_{xy} - 6u_{yy} - |x|u_y = 0.$

21. $2\sin x u_{xx} - \cos x u_{xy} - 6\cos x u_{yy} - 12u_y + u_x - 11u = 0.$

22. $2(x+y)u_{xx} - 3xu_{xy} - 4xu_{yy} + 2u_y - 8u_x - u = 0.$

23. $2(x+y)u_{xx} - 3xu_{xy} - 4xu_{yy} + 2u_y - 8u_x - u = 0.$

24. $2(x+y)u_{xx} - 3xu_{xy} - xu_{yy} + 2u_y - 8u_x - u = 0.$

25. $(x+y)u_{xx} - (3x-y)u_{xy} - \frac{1}{2}(y-8)u_{yy} - 3u_y - 8u_x + 5u = 0.$

26. $(2x-y)u_{xx} - (3x-y)u_{xy} - 5xu_{yy} + 2u_y - 8u_x - u = 0.$

27. $\sin y u_{xx} - 5\cos y u_{xy} + 4\cos y u_{yy} - 2u_y + 4u_x - 7u = 0.$

28. $4\sin(x+y)u_{xx} + 5\cos(x+y)u_{xy} + 2\cos(x+y)u_{yy} - 5u_y + 14u_x - 6u = 0.$

29. $\operatorname{ch} y u_{xx} - \operatorname{sh} x u_{yy} - 3u_x = 0.$

Якщо в рівнянні (1.1) коефіцієнти є сталими, то після зведення до канонічного вигляду можна зробити подальше спрощення. Нехай рівняння зведено до однієї з канонічних форм (1.5) заміною змінних $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$. Якщо ввести невідому функцію $v(\xi,\eta)$ згідно з співвідношенням

$$u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)\cdot e^{\alpha\xi+\beta\eta}, \tag{1.12}$$

то вибираючи сталі α й β відповідним чином, завжди можна позбавитись в рівнянні однієї, або двох перших похідних функції $v(\xi,\eta)$.

Приклад 1.2. $\triangleleft$ Звести до канонічного вигляду та спростити наступне рівняння:

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0. \tag{1.13}$$

$\triangleright$

Розв'язання. ◀ Дискримінант рівняння (1.13) дорівнює нулеві, отже маємо рівняння параболічного типу. Рівняння характеристик

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3$$

має наступний інтеграл:

$$w(x,y) = y + 3x,$$

отже перетворенням координат

$$\xi = y + 3x, \qquad \eta = x$$

рівняння приводиться до канонічного вигляду:

$$u_{\eta\eta} = u_\xi - u_\eta.$$

Для того, щоб спростити це рівняння далі, скористаємось підстановкою (1.12), звідки маємо:

$$v_{\eta\eta} = v_\xi - v_\eta(2\beta - 1) - v\left(\beta^2 - \alpha + \beta\right). \tag{1.14}$$

Оберемо сталі α і β таким чином, щоб позбутися останніх двох доданків в рівнянні (1.14). Для цього покладемо $\alpha = 1/4$ і $\beta = -1/2$. Таким чином, заміною

$$u(\xi,\eta) = e^{\frac{\xi-2\eta}{4}} v(\xi,\eta) = e^{\frac{x+y}{4}} v(\xi,\eta)$$

рівняння (1.13) зводиться до наступного спрощеного канонічного вигляду:

$$v_{\eta\eta} = v_{\xi}. \tag{1.15}$$

►

В прикладах (30)–(57) звести рівняння до канонічного вигляду та спростити.

30. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$

31. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0.$

32. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$

33. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$

34. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$

35. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$

36. $u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10u + x = 0$

37. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$

38. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y + u = 0$

39. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y + 64u = 0$

40. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y + 27u = 0$

41. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x+y) = 0$

42. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0$

43. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$

44. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0$

45. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$

46. $3u_{xx} - u_{xy} - u_{yy} + 5u_x + u_y - 5u = 0$

47. $2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_x + 7u = 0$

48. $3u_{xx} + 9u_{xy} + 27u_{yy} - 2u_x + 7u_y - 2u = 0$

49. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 17u_{yy} + 5u_x - 2u_y - 7u = 0$

50. $u_{xx} - 8u_{xy} + 7u_{yy} + u_x + 4u_y - 5u = 0$

51. $u_{xx} + 6(x+2y)u_{xy} + yu_{yy} + 15u_x + 12u_y - u = 0$

52. $3xu_{xx} + 6yu_{xy} + 2(x-3y)u_{yy} + 4u_x + u_y - 21u = 0$

53. $xu_{xx} + 5yu_{xy} + (3x-2y)u_{yy} - 2u_x + u_y - 4u = 0$

54. $3xu_{xx} + 6yu_{xy} + xu_{yy} + 2u_x + 3u_y - 4u = 0$

55. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} + 4u_x - 3u_y - 15u = 0$

56. $11u_{xx} - 7u_{xy} + 7u_{yy} + u_x - 8u_y + 5u = 0$

57. $7xu_{xy} + 3u_{yy} - 11u_x + 2u_y - 3u = 0$

Глава 2

Метод відокремлення змінних

Метод відокремлення змінних для диференціальних рівнянь з частинними похідними зводиться до задачі Штурма—Ліувілля для функції від однієї незалежної змінної.

§ 2. Задача Штурма–Ліувілля

§ 2.1. Регулярна задача Штурма–Ліувілля

В цьому параграфі ми розглянемо так звану регулярну задачу Штурма—Ліувілля (ШЛ). Постановка задачі: знайти нетривіальні (тобто не рівні тотожньо нулеві) розв'язки задачі

$$\left\| \begin{array}{l} -\left(p(x)X'(x)\right)' + q(x)X(x) = \nu\rho(x)X(x), \qquad x \in (a,b) \\ \alpha_1 X(a) + \beta_1 X'(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0 \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

При постановці задачі ШЛ вважається, що $p \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $q \in \mathcal{C}[a,b]$ та $p(x) > 0$ при $x \in [a,b]$.

Перелічимо деякі важливі властивості розв'язків задачі ШЛ:

- існує злічена множина власних чисел $\nu_1 \le \nu_2 \le \ldots$, які відповідають власним функціям $X_1(x)$, $X_2(x)$, $\ldots$. При цьому $\nu_k \ge 0$, якщо $q(x) \ge 0$.

- власні функції X_{n_1} та X_{n_2}, що відповідають різним нумерам n_1 та n_2 є ортогональними з вагою $\rho(x)$:

$$(X_{n_1}, X_{n_2}) \equiv \int\limits_a^b \overline{X}_{n_1}(x) X_{n_2}(x)\rho(x)\mathrm{d}x = \|X\|^2 \delta_{n_1 n_2}, \tag{2.2}$$

$$\|X\| = \sqrt{(X,X)} = \left(\int\limits_a^b |X(x)|^2 \rho(x)\mathrm{d}x \right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

- система власних функцій $\{X_n(x)\}$ є повною, тобто будь-яку функцію $f(x) \in \mathcal{L}^2[a,b]$ можна подати у вигляді збіжного в середньому квадратичному *ряду Фур'є* за розв'язками задачі ШЛ:

$$f(x) = \sum_n C_n X_n(x), \tag{2.4}$$

де коефіцієнти Фур'є

$$C_n = \frac{1}{\|X\|^2} \int\limits_a^b f(x)\overline{X}_n(x)\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

Якщо функція $f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$, то ряд збігається поточково.

Зауважимо, що власні функції задачі ШЛ завжди можна обрати у дійсному вигляді, тому що коефіцієнти диференціального рівняння $p(x)$, $q(x)$ і $\rho(x)$ є дійсними.

Приклад 2.1. $\triangleleft$ Розв'язати наступну регулярну задачу ШЛ:

$$\left\| \begin{array}{l} X''(x) = \nu X(x), \\ X(0) = X(l) = 0. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

$\triangleright$

Розв'язання. ◀ В залежності від параметра ν рівняння матиме такі розв'язки:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 x + B_0 & \text{коли } \nu = 0, \\ A_\nu \operatorname{sh}\sqrt{\nu}x + B_\nu \operatorname{ch}\sqrt{\nu}x & \text{коли } \nu \neq 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

A_ν та B_ν — деякі сталі, яки визначаються межовими умовами. Якщо $\nu = 0$, матимемо:

$$X(0) = 0 \Longrightarrow B_0 = 0,$$
$$X(l) = 0 \Longrightarrow A_0 = 0.$$

Отже при $\nu = 0$ можливі лише тривіальні розв'язки задачі ШЛ: $X(x) = 0$. Нехай $\nu \neq 0$:

$$X(0) = 0 \Longrightarrow B_\nu = 0,$$
$$X(l) = 0 \Longrightarrow A_\nu \operatorname{sh}\sqrt{\nu}x = 0.$$

Якщо A_ν, задача має лише тривіальні розв'язки. Виключаючи цей випадок, з останньої умови маємо $\operatorname{sh}\sqrt{\nu}l = 0$, яке має розв'язки лише при уявних значеннях параметра ν. Покладемо $\sqrt{\nu} = i\lambda$, де $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді задача ШЛ набуває вигляду:

$$\left\| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Загальний розв'язок рівняння

$$X(x) = A_\lambda \sin\lambda x + B_\lambda \cos\lambda x \tag{2.9}$$

а межові умови приймають наступну форму

$$X(0) = 0 \Longrightarrow B_\lambda = 0,$$
$$X(l) = 0 \Longrightarrow A_\lambda \sin\lambda x = 0,$$

яке має нетривіальні розв'язки, якщо

$$\sin \lambda l = 0 \implies \lambda l = \pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже матимемо набір власних чисел

$$\left\{ \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{2.10a}$$

яким відповідають власні функції

$$\left\{ X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad x \in (0, l) \right\}. \tag{2.10b}$$

►

В прикладах (58)–(64) розв'язати задачі ШЛ:

58. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{array} \right.$

59. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) + X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{array} \right.$

60. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) - X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{array} \right.$

61. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(a) = X(b) = 0. \end{array} \right.$

62. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) + X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(a) = X(b) = 0. \end{array} \right.$

63. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{array} \right.$

64. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) + hX'(l) = 0, \end{array} \right.$ де $h > 0$.

65. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) + hX'(0) = 0, \\ X(l) = 0, \end{array} \right.$ де $h > 0$.

66. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) + X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) + hX'(0) = 0, \\ X(l) = 0, \end{array} \right.$ де $h > 0$.

67. $\left\| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) + hX'(0) = 0, \\ X(l) - hX'(l) = 0, \end{array} \right.$ де $h > 0$.

§ 2.2. Сингулярна задача Штурма–Ліувілля

В цьому параграфі ми розглянемо так звану сингулярну задачу ШЛ. Задача Штурма—Ліувілля називається сингулярною, якщо 1) в одній кінцевій точці (або в обох) коефіцієнт $p(x)$ обертається в 0, або 2) в інтервалі $[a, b]$ одна гранична точка (або обидві) є нескінченностями. Від цього залежать умови, що накладаються на розв'язок задачі Штурма—Ліувілля.

Приклад 2.2. ◁ Постановка задачі у випадку $p(x) > 0\ \forall x \in (a, b)$, $p(a) = 0$, $p(b) \neq 0$, має такий вигляд:

$$\left\| \begin{array}{ll} -\left(p(x)X'(x)\right)' + q(x)X(x) = \lambda \rho(x) X(x), & x \in (a, b) \\ |X(a)| < +\infty, & \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0,\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0. & \end{array} \right. \tag{2.11}$$

▷

Ми розглянули задачу ШЛ, сингулярну на лівому кінці, коли $p(a) = 0$. Аналогічним чином можна розглянути задачу, сингулярну на правому кінці ($p(b) = 0$, $p(a) \neq 0$). В цьому випадку на розв'язок задачі накладається умова $|X(b)| < +\infty$. Можна розглянути також сингулярну на обох кінцях задачу за відповідними умовами.

Приклад 2.3. $\lhd$ Розв'язати наступну сингулярну задачу Штурма—Ліувілля [9]:

$$\left\| \begin{array}{ll} -(1-x^2)X'' + 2xX' = \lambda X, & x \in (-1,1) \\ |X(-1)| < +\infty, & |X(1)| < +\infty. \end{array} \right. \tag{2.12}$$

$\rhd$

Розв'язання. ◀ Шукаємо розв'язок рівняння (2.12) у вигляді степеневого ряду: $X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. В інтервалі збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати, тому $X'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$, $X''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n$, $xX'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n$, $x^2X''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n$. Підставляючи ці вирази в (2.12) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, одержуємо рекурентне співвідношення

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)} c_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.13}$$

Щоб обчислювати за ним, потрібно задати c_0, c_1 (це і є довільні сталі, що входять у загальний розв'язок), причому якщо один із цих коефіцієнтів покладаємо рівним нулю, то для отримання ненульового розв'язку інший повинен бути ненульовим. Розглянемо два випадки.

а) $c_1 = 0 \neq c_0$. Тоді з формули (2.13) випливає, що для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$ $c_{2k+1} = 0$, $c_{2k+2} = \dfrac{2k(2k+1)-\lambda}{(2k+1)(2k+2)} c_{2k}$. Звідси видно, що при $\lambda = 2j/(2j+1)$ буде $c_{2k+2} = 0$, як тільки $k \geq j$, і $c_{2k} \neq 0$, $k \leq j$, тобто X буде поліномом степеня $2j$. Очевидно, він задовольняє межові умови. Таким чином, числа $\lambda_{2j} = 2j(2j+1)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, є власними і відповідні їм власні функції X_{2j} — поліноми степеня $2j$.

б) $c_0 = 0 \neq c_1$. Тоді з формули (2.13) випливає, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ $c_{2k} = 0$, $c_{2k+1} = \dfrac{2k(2k-1)-\lambda}{2k(2k+1)} c_{2k-1}$. Міркуючи аналогічно випадкові 1, переконуємося, що числа $\lambda_{2j-1} = 2j(2j-1)$, $j \in \mathbb{N}$, є власними і відповідні їм власні функції X_{2j-1} — поліноми степеня $2j-1$.

Об'єднуючи випадки а) і б), отримуємо таку систему власних елементів задачі ШЛ:

$$\lambda_n = n(n+1), \quad X_n \text{ — поліном } n\text{-го степеня, } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Покажемо, що інших власних функцій немає.

Оскільки множина скінчених лінійних комбінацій функцій X_n містить, очевидно, усі поліноми, то за теоремою Вейерштрасса вона всюди щільна в $\mathcal{C}[-1;1]$, відтак і в $L_2[-1;1]$. Значить, єдиний елемент простору $L_2[-1;1]$, ортогональний усім X_n, є нульова функція. Водночас, за властивістю 2° спектральних задач, кожна власна функція ортогональна решті власних функцій. Отже, власних функцій, відмінних від знайдених, не існує. Задачу (2.12) розв'язано.

Нагадаємо, що власні функції визначаються з точністю до сталого множника. У нашому випадку це рівносильно заданню тієї з двох констант c_0, c_1, яка відмінна від нуля. Загальноприйнятим є такий вибір константи, за якого в точці 1 власна функція набирає значення 1. Власні функції, підпорядковані цій додатковій вимозі, називаються *поліномами Лежандра* і позначаються P_n. Таким чином, P_n — це єдиний розв'язок лінійної диференціальної задачі

$$(1-x^2)X'' - 2xX' + n(n+1)X = 0, \tag{2.14}$$
$$|X(-1+0)| < \infty, \quad X(1) = 1. \tag{2.15}$$

Як показано вище, P_n є поліномом n-го степеня. Наведемо «явний» вираз поліномів Лежандра та їхніх норм:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n, \tag{2.16a}$$
$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}. \tag{2.16b}$$

►

Приклад 2.4. ◁ Постановка задачі у випадку $p(x) > 0$ $\forall x \in (a, +\infty)$, має такий вигляд:

$$\left\|\begin{array}{ll} -\left(p(x)X'(x)\right)' + q(x)X(x) = \lambda\rho(x)X(x), & x \in (a,b) \\ \alpha_1 X(a) + \beta_1 X'(a) = 0,\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0, & \\ |X(x)| = \mathcal{O}\left(|x|^\sigma\right),\ x \to +\infty. & \end{array}\right. \tag{2.17}$$

▷

Ми розглянули сингулярну задачу ШЛ, коли правий кінець $b = +\infty$. Аналогічним чином можна розглянути задачу, коли лівий кінець $a = -\infty$.

§ 3. Рівняння дифузії на відрізку

Канонічний вигляд одновимірного рівняння дифузії має наступну форму:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t). \tag{3.1}$$

Якщо $f(x,t) = 0$, рівняння називається однорідним; якщо $f(x,t) \neq 0$, рівняння називається неоднорідним. Крайова задача для одновимірного рівняння дифузії має наступну форму:

$$\left\|\begin{array}{lll} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in (0,l), & t \in (0,\infty), \\ \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = p(t), & t \in (0,\infty), & \\ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = q(t), & t \in (0,\infty), & \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,l). & \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Приклад 3.1. $\triangleleft$ Нехай $u = u(x, t)$ задана на відрізку $x \in (0, l)$, $\quad t \in (0, \infty)$. Потрібно знайти розв'язок рівняння дифузії

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \tag{3.3}$$

при наступних крайових умовах:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in (0, l), \tag{3.4a}$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{3.4b}$$

Умова (3.4a) є початковою, а умови (3.4b) — однорідними межовими умовами. $\triangleright$

Розв'язання. ◀ Основна ідея метода полягає в тому, щоб побудувати досить велику кількість частинних розв'язків рівняння (3.3), що мають вигляд добутку

$$v(x, t) = X(x)T(t) \tag{3.5}$$

та задовольняють межовим умовам (3.4b). З цих розв'язків будуємо лінійну комбінацію, яка за принципом лінійної суперпозиції також є розв'язком задачі. Природно очікувати, що знайдена лінійна комбінація буде задовольняти також початковим умовам (3.4a), тобто буде розв'язком крайової задачі.

Отже, підставляючи вираз (3.5) до рівняння (3.3), отримаємо

$$X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0.$$

Вважаючи, що $v \neq 0$, та поділивши на $v(x, t)$, матиме

$$\frac{T'}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \tag{3.6}$$

Ліва частина рівності (3.6) не залежить від x, права — від t, тобто кожна з них є сталою. Поділивши (3.6) на a^2, позначимо цю сталу як $-\lambda^2$. Це — так звана константа відокремлення змінних:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \tag{3.7}$$

звідки випливатиме, що рівняння в частинних похідних розбивається на два звичайних рівняння, кожне з яких залежить тільки від своїх змінних, тобто змінни розділілися,

$$X''_\lambda(x) + \lambda^2 X_\lambda(x) = 0; \tag{3.8a}$$
$$T'_\lambda(t) + a^2\lambda^2 T_\lambda(t) = 0; \tag{3.8b}$$

Завдяки лінійності, можемо побудувати формальний ряд

$$u(x, t) = \sum_\lambda X_\lambda(x)T_\lambda(t). \tag{3.9}$$

Цей розв'язок повинен задовольняти межовим умовам (3.4b):

$$u(0,t)=0=\sum_\lambda X_\lambda(0)T_\lambda(t) \qquad \forall t \Longrightarrow X_\lambda(0)=0;$$
$$u(l,t)=0=\sum_\lambda X_\lambda(l)T_\lambda(t) \qquad \forall t \Longrightarrow X_\lambda(l)=0.$$

Таким чином, потрібно знайти розв'язки $X(x)$ крайової задачі

$$\left\| \begin{array}{l} X_\lambda''(x)+\lambda^2 X_\lambda(x)=0, \quad x\in(0,l),\\ X_\lambda(0)=0, \quad X_\lambda(l)=0, \end{array}\right. \tag{3.10}$$

а також чисельні значення параметра λ, при яких розв'язки існують. Поставлена задача відноситься до класу задач Штурма—Ліувілля (2.8), розв'язком якої є повна система ортогональних функцій (2.10):

$$\left\{X_n(x)=\sin\lambda_n x;\lambda_n=\frac{\pi n}{l}, \qquad n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Цей розв'язок визначається з точністю до множника, який ми поклали рівним одиниці. Розглянемо тепер рівняння (3.8b) для функції $T(t)$. Ненульовим власним числам λ_n відповідають розв'язки

$$T_n(t)=C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}, \tag{3.11}$$

звідки загальний розв'язок (3.9) матиме вигляд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} X_n(x). \tag{3.12}$$

Константу C_n підберемо таким чином, щоб задовольнити початковим умовам (3.4a):

$$u(x,0)=\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n X_n(x). \tag{3.13}$$

Але формула (3.13) — це формула розвинення функції $\phi(x)$ в ряд Фур'є за власними функцціями задачі ШЛ, пор. (2.4). Коефіцієнти Фур'є цього розвинення, згідно з (2.5) мають вигляд:

$$C_n=\frac{1}{\|X\|^2}\int_0^l \phi(x)X_n(x)\mathrm{d}x, \tag{3.14}$$

а норма $\|X\|$ має вигляд

$$\|X\|^2=\int_0^l |X_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{l}{2}.$$

Таким чином, розв'язок крайової задачі з однорідними межовими умовами для рівняння дифузії матиме вигляд:

$$u(x,t) = \sum_n C_n X_n(x) e^{-a^2\lambda_n^2 t}, \tag{3.15a}$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)X_n(x)\mathrm{d}x, \tag{3.15b}$$

$$X_n(x) = \sin\lambda_n x, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}. \tag{3.15c}$$

►

В прикладах (68)–(96) розв'язати крайову задачу для однорідного рівняння дифузії на відрізку:

68. $$\begin{Vmatrix} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{l}. \end{Vmatrix}$$

69. $$\begin{Vmatrix} u_t = u_{xx} + u \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos^2 x. \end{Vmatrix}$$

70. $$\begin{Vmatrix} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 1. \end{Vmatrix}$$

71. $$\begin{Vmatrix} u_t = 4u_{xx} + u, \\ u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 2\cos 2\pi x \cos\frac{3\pi}{2}x. \end{Vmatrix}$$

72. $$\begin{Vmatrix} u_t = u_{xx} + u \\ u_x(0,t) = u_x(\frac{\pi}{2},t) = 0, \\ u(x,0) = 8\cos^4 x. \end{Vmatrix}$$

73. $$\begin{Vmatrix} u_t = u_{xx} - u \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 4\sin^3\frac{x}{2}. \end{Vmatrix}$$

74. $$\begin{Vmatrix} u_t = 5u_{xx} + u_x - u \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 3. \end{Vmatrix}$$

75. $$\begin{Vmatrix} u_t = 4u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 3\sin^2 x. \end{Vmatrix}$$

76. $$\begin{Vmatrix} u_t = 4u_{xx} \\ u(1,t) = 0, \\ u_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x\sin x. \end{Vmatrix}$$

77. $$\begin{Vmatrix} u_t = 3u_{xx} \\ u_x(-2,t) = 0, \\ u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2\sin 2x. \end{Vmatrix}$$

78. $$\begin{Vmatrix} u_t = 9u_{xx} \\ u_x(-2,t) = 0, \\ u_x(-1,t) = 0, \\ u(x,0) = 3x^2 - 1 + \sin x. \end{Vmatrix}$$

79. $$\begin{Vmatrix} u_t = 16u_{xx} \\ u_x(-3,t) = 0, \\ u(3,t) = 0, \\ u(x,0) = (x^2-1)e^{-x}. \end{Vmatrix}$$

80. $$\begin{Vmatrix} u_t = 6u_{xx} \\ u_x(-2,t) = 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = (3x^2-1)\sin x. \end{Vmatrix}$$

81. $$\begin{Vmatrix} u_t = 7u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(5,t) = 0, \\ u(x,0) = (x-1)\sin(x+3). \end{Vmatrix}$$

82. $$\begin{Vmatrix} u_t = 5u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(2/3,t) = 0, \\ u(x,0) = (x-1)\sin(x+3)- \\ -(x+1)\sin(x-3). \end{Vmatrix}$$

83. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 4u_{xx} \\ u(-1,t) = 0, \\ u(3,t) = 0, \\ u(x,0) = e^{x-1}\sin^2(x+1). \end{array}\right.$

84. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 3u_{xx} \\ u_x(-1,t) = 0, \\ u(1/2,t) = 0, \\ u(x,0) = (x^3-2)e^{4x}. \end{array}\right.$

85. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 3u_{xx} \\ u(-1,t) = 0, \\ u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = (2x+1)e^{3x}. \end{array}\right.$

86. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 2u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = (x+2)^2\sin(3x-1). \end{array}\right.$

87. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 12u_{xx} \\ u_x(1/3,t) = 0, \\ u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = [2+\sin(3x-1)]e^{-2x}. \end{array}\right.$

88. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 10u_{xx} \\ u_x(-1/3,t) = 0, \\ u(1/3,t) = 0, \\ u(x,0) = 2+ \\ +(3x-1)(3-2x)\sin x. \end{array}\right.$

89. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 4u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(1/3,t) = 0, \\ u(x,0) = 2e^{-x}+(x-1)(x^2+1). \end{array}\right.$

90. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 6,25u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(3,t) = 0, \\ u(x,0) = e^{-2x}+\cos(x+2). \end{array}\right.$

91. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 4u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(1/3,t) = 0, \\ u(x,0) = 2e^{-x}+(x-1)(x^2+1). \end{array}\right.$

92. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 1,44u_{xx} \\ u_x(-5,t) = 0, \\ u_x(3,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2e^x\cos x. \end{array}\right.$

93. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 2,25u_{xx} \\ u(1/5,t) = 0, \\ u_x(1/3,t) = 0, \\ u(x,0) = e^{-x}+(x-1)\cos x. \end{array}\right.$

94. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 0,49u_{xx} \\ u(2/3,t) = 0, \\ u(3/2,t) = 0, \\ u(x,0) = (x^3+2)e^{-4x}. \end{array}\right.$

95. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 36u_{xx} \\ u_x(-1/2,t) = 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = x(e^x+\cos x). \end{array}\right.$

96. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 0,64u_{xx} \\ u_x(-1/2,t) = 0, \\ u_x(3/2,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2(\sin 2x+2\cos x). \end{array}\right.$

В прикладах (97)–(101) розв'язати крайову задачу для неоднорідного рівняння дифузії на відрізку:

97. $\left\|\begin{array}{l} u_t = u_{xx}+\sin\frac{2\pi x}{l} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{array}\right.$

98. $\left\|\begin{array}{l} u_t = u_{xx}+u+2\cos 3x \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos x. \end{array}\right.$

99. $\left\|\begin{array}{l} u_t = u_{xx}+u+2\sin x\sin 2x \\ u_x(0,t) = u(\frac{\pi}{2},t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{array}\right.$

100. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 49u_{xx}-u+\cos\pi x \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 2\cos^2 2\pi x. \end{array}\right.$

101. $\left\|\begin{array}{l} u_t = u_{xx}+u+4\cos^3 x \\ u_x(0,t) = u(\frac{\pi}{2},t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{array}\right.$

В прикладах (102)–(133) розв'язати мішану крайову задачу для рівняння дифузії на відрізку:

102. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \\ u_x(0,t) = 1 \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{array} \right.$

103. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u + t(t-2)\big(\frac{x}{\pi} - \\ -1\big) + \sin 3x \\ u(0,t) = t^2, \\ u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 2\sin 3x \cos 2x. \end{array} \right.$

104. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u - x + 1 + \\ +4\cos^3 \frac{5\pi x}{2} \\ u_x(0,t) = 1, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x - 1. \end{array} \right.$

105. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(\frac{\pi}{2},t) = 1, \\ u(x,0) = x. \end{array} \right.$

106. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + \\ +2\cos^2 x \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(\pi,t) = 2\pi t, \\ u(x,0) = 0. \end{array} \right.$

107. $\left\| \begin{array}{l} u_t = 9u_{xx} + u - 7 + 4tx - 2tx^2 + \\ +18t^2 - 2t^2 x + t^2 x^2 + \\ +2\sin 3\pi x \sin 5\pi x \\ u_x(0,t) = 2t^2, \\ u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 7. \end{array} \right.$

108. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u - \frac{x}{\pi}\left(\sin t + \cos t\right), \\ u(0,t) = 0, \\ u(\pi,t) = \cos t, \\ u(x,0) = \frac{x}{\pi} + 4\sin^3 3x. \end{array} \right.$

109. $\left\| \begin{array}{l} u_t = 25u_{xx} - u + 3 + e^t\big(x^2 + \\ +2x - 25\big), \\ u_x(0,t) = e^t, \\ u_x(1,t) = 2e^t, \\ u(x,0) = x^2 + 2x - 22 + \\ +2\cos \pi x \cos 9\pi x. \end{array} \right.$

110. $\left\| \begin{array}{l} u_t = 4u_{xx} + u - \\ -(3x+1)(3x-1) \\ u(0,t) = \sin t, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 2\cos 2\pi x \cos \frac{3\pi}{2} x. \end{array} \right.$

111. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u + t(t-2)(\frac{x}{\pi} - 1) + \\ +\sin 3x \\ u(0,t) = t^2, \\ u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 2\sin 3x \cos 2x. \end{array} \right.$

112. $\left\| \begin{array}{l} 4u_t = u_{xx} + u + e^{-2t}\cos^2 x \\ u(0,t) = t\sin t, \\ u(\frac{\pi}{2},t) = 0, \\ u(x,0) = x + 8\cos^4 x. \end{array} \right.$

113. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u - x + 1 + \\ +4\cos^3 \frac{5\pi x}{2} \\ u_x(0,t) = 1, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x - 1. \end{array} \right.$

114. $\left\| \begin{array}{l} u_t = 9u_{xx} - u + 1 - \\ -2xe^{-2x}\cos 3x, \\ u(0,t) = 2t, \\ u(\pi,t) = 3; \\ u(x,0) = 4\sin^3 \frac{x}{2}. \end{array} \right.$

115. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + 3u - x + \\ +2\sin 2x \cos x \\ u(0,t) = 2 + \sin t, \\ u_x(\frac{\pi}{2},t) = 1; \\ u(x,0) = 2x\cos^2 x. \end{array} \right.$

116. $\left\| \begin{array}{l} u_t = (1/4)u_{xx} - 2u + \\ +\sin(t + 2x) \\ u(0,t) = \sin^2 t, \\ u(l,t) = 5 + 2t; \\ u(x,0) = (4x^3 - 1)\cos 2x. \end{array} \right.$

117. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - \\ -4x^2 t + 2\cos^2 x \\ u(0,t) = t^2\cos t, \\ u_x(\pi,t) = 2\pi t, \\ u(x,0) = (x^2 + 3)e^{-2x}. \end{array} \right.$

118. $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + 3u + 2\sin x \sin 2x \\ u_x(0,t) = 2t^2 \sin t, \\ u(\frac{\pi}{2},t) = 1; \\ u(x,0) = 1 + e^x \cos x. \end{array} \right.$

119. $\left\| \begin{array}{l} u_t = 9u_{xx} + u + 4tx + 18t^2 - \\ -2t^2 x + 2\sin 3\pi x \sin 5\pi x \\ u_x(0,t) = 2t^2 - 3, \\ u_x(1,t) = 0; \\ u(x,0) = 7. \end{array} \right.$

120. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 49u_{xx} - u + \cos\pi x \\ u_x(0,t) = (t^2+t-1)\sin t, \\ u_x(1,t) = 2; \\ u(x,0) = 2\cos^2 2\pi x. \end{array}\right.$

121. $\left\|\begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u - \frac{x}{\pi}\left(\sin t + \cos t\right), \\ u(0,t) = 2t^3, \\ u(\pi,t) = \cos t; \\ u(x,0) = \frac{x}{\pi} + 4\sin^3 3x. \end{array}\right.$

122. $\left\|\begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u + 4\cos^3 x \\ u_x(0,t) = e^t\cos 2t, \\ u(\frac{\pi}{2},t) = 2t-3; \\ u(x,0) = (\sin x + 2)e^{-x}. \end{array}\right.$

123. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 25u_{xx} - u + 3+ \\ +e^t\left(x^2+2x-25\right), \\ u_x(0,t) = e^t, \\ u_x(1,t) = 2+t^2; \\ u(x,0) = x^2+3+ \\ +2\cos\pi x\cos 9\pi x. \end{array}\right.$

124. $\left\|\begin{array}{l} u_t = u_{xx} - 2u + \cos^3\pi x \\ u_x(0,t) = \cos t + t^2\sin t, \\ u_x(1,t) = e^t; \\ u(x,0) = (3x^2-1)(\cos x - 1). \end{array}\right.$

125. $\left\|\begin{array}{l} 9u_t = u_{xx} - u + 3+ \\ +e^t\left(2x^2+8x-9\right), \\ u_x(0,t) = 4e^t, \\ u_x(1,t) = 2+t^3; \\ u(x,0) = x^2 - 25 + 2\sin 9\pi x. \end{array}\right.$

126. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 4u_{xx} - 4u_x + x\sin(2t) \\ u(-1,t) = e^{-2t}(\cos t + 1), \\ u_x(1,t) = 0; \\ u_x(x,0) = (x^2+x+1)(\sin x+ \\ +\cos x). \end{array}\right.$

127. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 2u_{xx} + 3u + t^2\sin(2\pi x), \\ u_x(0,t) = 1-t, \\ u_x(\pi,t) = 3t^2; \\ u(x,0) = (2x-3)^2 - 5\cos 2\pi x. \end{array}\right.$

128. $\left\|\begin{array}{l} 16u_t = u_{xx} + 3u_x + x\sin(2t) \\ u(0,t) = (t+2)^2e^t, \\ u_x(3,t) = 3, \\ u(x,0) = 2xe^x\cos 2x. \end{array}\right.$

129. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 4u_{xx} - 2u + (t-2)\cos(\pi x), \\ u_x(0,t) = t^2 - 2, \\ u_x(\pi,t) = t/3, \\ u(x,0) = x - \sin^2(\pi x). \end{array}\right.$

130. $\left\|\begin{array}{l} 4u_t = u_{xx} + 4u- \\ -\cos(t+1)\sin(x-1) \\ u_x(0,t) = \cos(t+1), \\ u_x(\frac{\pi}{2},t) = 2t^2 - 4; \\ u(x,0) = 1 - \cos^3 x. \end{array}\right.$

131. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 16u_{xx} + u_x - (x+1)^2+ \\ +3\cos^2\frac{3\pi x}{2} \\ u_x(0,t) = (e^{2t} + \cos t)(t-1), \\ u(1,t) = 2; \\ u(x,0) = (x+1)^3. \end{array}\right.$

132. $\left\|\begin{array}{l} u_t = 2u_{xx} - 3u + e^{-x}\sin(t+2), \\ u_x(0,t) = 1 + \cos t, \\ u_x(\frac{\pi}{2},t) = -1 + \sin t; \\ u(x,0) = (x+1)^2\cos^2 x. \end{array}\right.$

133. $\left\|\begin{array}{l} 9u_t = u_{xx} - x^2 + 4\cos\frac{\pi x}{2} \\ u(0,t) = 2, \\ u_x(1,t) = t(2+\cos t); \\ u(x,0) = x^3 + 1. \end{array}\right.$

§ 4. Хвильове рівняння на відрізку

Канонічний вигляд одновимірного хвильового рівняння має наступну форму:

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t). \tag{4.1}$$

Якщо $f(x,t) = 0$, рівняння називається однорідним.

Приклад 4.1. $\lhd$ Нехай $u = u(x,t)$ задана на відрізку $x \in (0,l)$, $\quad t \in (0,\infty)$. Потрібно знайти розв'язок наступної крайової задачі для хвильового рівняння:

$$\left\| \begin{array}{lll} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (0,l), & t \in (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 & t \in (0,\infty), & \\ u(l,t) = 0, & t \in (0,\infty), & \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,l), & \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in (0,l). & \end{array} \right. \tag{4.2}$$

▷

Розв'язання. ◀ Шукатимемо частинні розв'язки у вигляді

$$v(x,t) = \sum_n T_n(t) X_n(x).$$

Підставляючи цей вираз до хвильового рівняння (4.2), отримаємо

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t) X''(x).$$

Якщо поділити обидві частини цього співвідношення на $X(x)T(t)$, отримаємо що ліва частина є функцією лише координати x, права — t, тобто рівність може справджуватися лише, коли кожна з частин є сталою (позначимо її $-\lambda^2$),

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Отже змінні відокремилися. Для функції $X(x)$ отримали вже розібрану задачу Штурма—Ліувілля, розв'язок якої дається формулами (2.10). Для функції $T_n(t)$ отримаємо рівняння

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) = 0,$$

що має розв'язок

$$T_n(t) = A_n \cos(a\lambda_n t) + B_n \sin(a\lambda_n t)\,. \tag{4.3}$$

Отже загальний розв'язок дається рядом Фур'є за $X_n(x)$:

$$u(x,t) = \sum_n X_n(x)\Big[A_n \cos(a\lambda_n t) + B_n \sin(a\lambda_n t)\Big].$$

Константи A_n та B_n знаходимо з початкових умов:

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_n X_n(x) A_n \qquad \Longrightarrow \qquad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l X_n(x)\phi(x)\mathrm{d}x,$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_n X_n(x) B_n a\lambda_n \qquad \Longrightarrow \qquad a\lambda_n B_n = \frac{2}{l}\int_0^l X_n(x)\psi(x)\mathrm{d}x.$$

Остаточно, розв'язок крайової задачі (4.2) для хвильового рівняння має вигляд

$$u(x,t) = \sum_n X_n(x)\Big[A_n \cos\left(a\lambda_n t\right) + B_n \sin\left(a\lambda_n t\right)\Big], \tag{4.4a}$$

$$X_n(x) = \sin\left(\lambda_n x\right), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \tag{4.4b}$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l X_n(x)\phi(x)\mathrm{d}x, \qquad B_n = \frac{2}{a\lambda_n l}\int\limits_0^l X_n(x)\psi(x)\mathrm{d}x. \tag{4.4c}$$

►

В прикладах (134)–(141) розв'язати однорідну крайову задачу для хвильового рівняння на відрізку:

134. $u_{tt} = 16u_{xx}$, $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \sin\frac{2\pi x}{l}$.

135. $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = \sin\frac{5\pi x}{2l}$, $u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l}$.

136. $u_{tt} = 9u_{xx}$, $u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}$.

137. $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u_x(-l,t) = u(l,t) = 0$, $u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{2l}$, $u_t(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{2l} + \cos\frac{5\pi x}{2l}$.

138. $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 1$.

139. $u_{tt} = 25u_{xx}$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(l,t) + hu(l,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1, h > 0$.

140. $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x\left(\sin\frac{3\pi x}{2l} + 1\right)$.

141. $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = 1$, $u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l}$.

142. $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u_x(0,t) = 0$, $u(3,t) = 0$, $u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{6}$, $u_t(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{6} + \cos\frac{5\pi x}{6}$.

143. $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u_x(-l,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 1$.

144. $u_{tt} = 4a^2u_{xx}$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(2l,t) + 2u(2l,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$.

145. $u_{tt} = a^2u_{xx} + u$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = 2x+1$, $u_t(x,0) = 2\sin(x+1)$.

146. $u_{tt} = a^2u_{xx} + u_x$, $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = x^2+1$, $u_t(x,0) = \sin x + \cos x$.

147. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=a^2u_{xx}-2u,\\ u_x(-l,t)=0,\\ u(l,t)=0,\\ u(x,0)=1+\sin\frac{5\pi x}{l},\\ u_t(x,0)=\sin\frac{3\pi x}{2l}.\end{array}\right.$

148. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=a^2u_{xx}-2u,\\ u(-l,t)=0,\\ u_x(0,t)=0,\\ u(x,0)=\sin\frac{3\pi x}{l},\\ u_t(x,0)=1+\sin\frac{5\pi x}{2l}.\end{array}\right.$

149. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=a^2u_{xx}-2u,\\ u_x(-l,t)=0,\\ u_x(l,t)=0,\\ u(x,0)=\sin^2(3\pi x/l),\\ u_t(x,0)=1.\end{array}\right.$

150. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=49u_{xx},\\ u(0,t)=0,\\ u_x(3,t)=0,\\ u(x,0)=2-x,\\ u_t(x,0)=\sin\frac{\pi x}{a}.\end{array}\right.$

151. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=1,44u_{xx}+2u,\\ u(0,t)=0,\\ u(l,t)=0,\\ u(x,0)=3+2\cos x,\\ u_t(x,0)=1+5x^3.\end{array}\right.$

152. $\left\|\begin{array}{l} 0,81u_{tt}=u_{xx}+2u,\\ u_x(0,t)=0,\\ u(l,t)=0,\\ u(x,0)=(x+2)\cos x,\\ u_t(x,0)=1+x^4.\end{array}\right.$

153. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=25u_{xx},\\ u_x(-l,t)=0,\\ u(l,t)=0,\\ u(x,0)=x^2\cos x,\\ u_t(x,0)=4\sin x^2.\end{array}\right.$

154. $\left\|\begin{array}{l} 25u_{tt}=u_{xx},\\ u_x(-3,t)=0,\\ u(0,t)=0,\\ u(x,0)=\cos(x-2),\\ u_t(x,0)=4-x^2.\end{array}\right.$

155. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=16u_{xx}+u,\\ u_x(-3,t)=0,\\ u(0,t)=0,\\ u(x,0)=1+\cos^2 x,\\ u_t(x,0)=8-x^3.\end{array}\right.$

156. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=36u_{xx}-2u,\\ u_x(-2,t)=0,\\ u(2,t)=0,\\ u(x,0)=x\cos x,\\ u_t(x,0)=3+x^3.\end{array}\right.$

157. $\left\|\begin{array}{l} 4u_{tt}=u_{xx}+u,\\ u_x(1,t)=0,\\ u(2,t)=0,\\ u(x,0)=x-\cos x,\\ u_t(x,0)=2+x.\end{array}\right.$

158. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=u_{xx}+4u,\\ u_x(-1,t)=0,\\ u(2,t)=0,\\ u(x,0)=x-1,\\ u_t(x,0)=3\cos(2+x).\end{array}\right.$

159. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=4u_{xx},\\ u_x(-3,t)=0,\\ u_x(3,t)=0,\\ u(x,0)=x\,\mathrm{tg}(x/3),\\ u_t(x,0)=3+\cos x.\end{array}\right.$

160. $\left\|\begin{array}{l} 4u_{tt}=9u_{xx},\\ u(-1,t)=0,\\ u_x(1,t)=0,\\ u(x,0)=x+2\,\mathrm{tg}\,x,\\ u_t(x,0)=2+3x.\end{array}\right.$

161. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=u_{xx}-3u,\\ u(-2,t)=0,\\ u_x(0,t)=0,\\ u(x,0)=\mathrm{tg}(x/8),\\ u_t(x,0)=5x.\end{array}\right.$

162. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt}=4u_{xx}+u_x,\\ u_x(-1,t)=0,\\ u_x(1,t)=0,\\ u(x,0)=(x+1)\,\mathrm{tg}\,x,\\ u_t(x,0)=\exp x.\end{array}\right.$

В прикладах (163)–(186) розв'язати мішану крайову задачу для хвильового рівняння на відрізку:

163. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 0,81u_{xx} + u + e^{-xt}, \\ u(0,t) = t, \\ u(1,t) = 2\sin t, \\ u(x,0) = 1, \\ u_t(x,0) = 2 - \cos x. \end{array} \right.$

164. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 36u_{xx} - 2u + x\exp(-t^2), \\ u(-1,t) = \cos t, \\ u(1,t) = 2 + t^2, \\ u(x,0) = 2 + 3x, \\ u_t(x,0) = \cos x. \end{array} \right.$

165. $\left\| \begin{array}{l} (1/4)u_{tt} = u_{xx} - 3u + \\ +(1+x)\exp(-2t), \\ u(0,t) = \cos t, \\ u(2,t) = 2\sin t, \\ u(x,0) = 2 + x^2, \\ u_t(x,0) = (1/2)\sin 2x. \end{array} \right.$

166. $\left\| \begin{array}{l} (4/9)u_{tt} = u_{xx} + 2u + \mathrm{ch}^{-2}(x), \\ u(-2,t) = 2t, \\ u(2,t) = 1 + \cos t, \\ u(x,0) = 2x^2, \\ u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2}. \end{array} \right.$

167. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 25u_{xx} + 3u + \cos t \sin 2x - \\ -4\sin t\left(1 - \frac{x}{\pi}\right), \\ u(0,t) = 2\sin t, \\ u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 2\left(1 - \frac{x}{\pi}\right). \end{array} \right.$

168. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 16u_{xx} + u + \\ +(3+\cos t)(1+x^2)^{-2}, \\ u(0,t) = 4, \\ u(1,t) = 3 + \cos 2t, \\ u(x,0) = 1 + e^x, \\ u_t(x,0) = (x+1)^2. \end{array} \right.$

169. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 16u_{xx} + u + t(1+x^2), \\ u(0,t) = 4, \\ u(1,t) = 3t, \\ u(x,0) = x + 2, \\ u_t(x,0) = 0. \end{array} \right.$

170. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2u_{xx} + u + x\cos 3t, \\ u_x(0,t) + 3u(0,t) = 0, \\ u(2,t) = 1 + t^2, \\ u(x,0) = 1 + \sin x, \\ u_t(x,0) = 2x^2 + 3. \end{array} \right.$

171. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2u_{xx} + 2u_x + t\cos 3x, \\ 3u_x(-2,t) + u(-2,t) = 1, \\ u(0,t) = 2t, \\ u(x,0) = \cos(x+1), \\ u_t(x,0) = \sin(x-1). \end{array} \right.$

172. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + u + 2t\left(\sin 3x - 1\right) - x, \\ u(0,t) = 2t, \\ u_x(\pi/2,t) = 1, \\ u(x,0) = x + \sin x, \\ u_t(x,0) = 2\left(1 + \sin 5x\right). \end{array} \right.$

173. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + 3u_x - 2u + 2t\cos x, \\ u(0,t) = 5t, \\ u_x(l,t) = t\cos t, \\ u(x,0) = 2x, \\ u_t(x,0) = 1 + x^3 + \sin\frac{\pi x}{l}. \end{array} \right.$

174. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + 4u - \cos t\sin\frac{\pi x}{l}, \\ u(0,t) = \sin t, \\ u_x(l,t) = \cos^2 t, \\ u(x,0) = 1 + x^4, \\ u_t(x,0) = 3 + \cos 3x. \end{array} \right.$

175. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 16u_{xx} + u + t\cos x - \pi tx + \\ +\frac{x^2}{2}\left(2 - t - t^2\right) - 16\left(t^2 - t + 1\right), \\ u_x(0,t) = \pi t, \\ u_x(\pi,t) = \pi t^2, \\ u(x,0) = 16 + 2\cos x, \\ u_t(x,0) = \pi x - \frac{x^2}{2} + \cos 2x. \end{array} \right.$

176. $\left\| \begin{array}{l} 16u_{tt} = u_{xx} + 3u_x - \cos t(\frac{\pi x}{l})^2, \\ u(0,t) = t\sin t, \\ u_x(l,t) = (t^2+1)^{-1}, \\ u(x,0) = 2x\sin x, \\ u_t(x,0) = 2 + x + 3x^2. \end{array} \right.$

177. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = (1/3)^2u_{xx} + 4u_x - 2t(\frac{3\pi x}{l}), \\ u(-l,t) = t + \sin t, \\ u_x(l,t) = 2t^2, \\ u(x,0) = \mathrm{ch}^{-2}(x+1), \\ u_t(x,0) = (x+2)^{-4}. \end{array} \right.$

178. $\left\| \begin{array}{l} 4u_{tt} = u_{xx} + 12u_x - 8xt(x+t), \\ u(0,t) = 3t + 1, \\ u_x(1,t) + u(1,t) = \sin(t+2), \\ u(x,0) = 3 + \cos(2x+3), \\ u_t(x,0) = x^2 + \sin x. \end{array} \right.$

179. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + 3u_x - 8x\cos(x+t), \\ u(-1,t) = t+3, \\ u_x(0,t) + u(0,t) = 2t\sin t, \\ u(x,0) = \exp(x+1), \\ u_t(x,0) = \exp(x+2). \end{array} \right.$

180. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 5u_{xx} + u - (x+t)+ \\ +\sin(x+t), \\ u_x(0,t) = t+3, \\ u_x(\pi/4,t) + 2u(\pi/4,t) = t+ \\ +\sin t, \\ u(x,0) = 2x, \\ u_t(x,0) = \operatorname{tg} x. \end{array} \right.$

181. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 64u_{xx} + 4u+ \\ +\exp(x+t)\sin t, \\ u_x(0,t) = 3t, \\ u_x(4,t) + 4u(4,t) = \cos t, \\ u(x,0) = 2+\sin x, \\ u_t(x,0) = x^2. \end{array} \right.$

182. $\left\| \begin{array}{l} 9u_{tt} = u_{xx} + 3u + \exp(-t)\sin x, \\ u_x(0,t) = 3+t^3, \\ 2u_x(4,t) + u(4,t) = \cos(1+t), \\ u(x,0) = x^2\sin(x+2), \\ u_t(x,0) = x+2. \end{array} \right.$

183. $\left\| \begin{array}{l} 3u_{tt} = 2u_{xx} + u + |t|\cos x, \\ u_x(0,t) = 3+t, \\ 5u_x(1,t) + u(1,t) = 4+t^4, \\ u(x,0) = \sin x, \\ u_t(x,0) = 2x. \end{array} \right.$

184. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 2u_{xx} + u_x + t(1+\cos x), \\ u_x(0,t) + 4u(0,t) = 3t+t^2, \\ u_x(2,t) = (1+\cos t)^4, \\ u(x,0) = 2x+3\sin x, \\ u_t(x,0) = 2-x^2. \end{array} \right.$

185. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 144u_{xx} - 3u_x + (2t+x)e^t, \\ 3u_x(-2,t) + 2u(-2,t) = t^2, \\ u_x(2,t) = 7\cos t, \\ u(x,0) = (x+3)\sin x, \\ u_t(x,0) = (2+x)^2. \end{array} \right.$

186. $\left\| \begin{array}{l} 81u_{tt} = u_{xx} + 5u + 2te^x, \\ 2u_x(0,t) + 5u(0,t) = (1+t)^2, \\ u_x(2,t) = 3t+\cos t, \\ u(x,0) = (3+x)\sin x, \\ u_t(x,0) = (2+x)\cos x. \end{array} \right.$

§ 5. Крайові задачі для рівняння Лапласа на площині.

§ 5.1. Декартові координати

Крайова задача для рівняння Лапласа в прямокутнику $[0,a]\times[0,b]$ має вигляд:

$$\left\| \begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x\in(0,a), \quad y\in(0,b), \\ \alpha_1 u(0,y) + \beta_1 u_x(0,y) = \phi_1(y), & y\in(0,b), \\ \alpha_2 u(a,y) + \beta_2 u_x(a,y) = \phi_2(y), & y\in(0,b), \\ \alpha_3 u(x,0) + \beta_3 u_y(x,0) = \phi_3(x), & x\in(0,a), \\ \alpha_4 u(x,b) + \beta_4 u_y(x,b) = \phi_4(x), & x\in(0,a). \end{array} \right. \tag{5.1}$$

Приклад 5.1. $\lhd$ Розглянемо простішу задачу Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутнику:

$$\left\| \begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x\in(0,a), \quad y\in(0,b), \\ u(x,0) = \phi(x), & x\in(0,a), \\ u(x,b) = \psi(x), & x\in(0,a), \\ u(0,y) = u(a,y) = 0. & \end{array} \right. \tag{5.2}$$

$\rhd$

Розв'язання. ◀ Шукатимемо частинні розв'язки у вигляді

$$v(x, y) = X(x)Y(y) \tag{5.3}$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо два рівняння

$$X'' = \lambda X, \qquad Y'' = -\lambda Y.$$

Завдяки однорідним умовам $u(0, y) = u(a, y) = 0$, отримаємо

$$X(0) = X(a) = 0,$$

тобто для функції $X(x)$ маємо задачу Штурма—Ліувілля, розв'язок якої має вигляд повної системи функцій $X_n(x)$ (2.10). Загальний розв'язок рівняння для $Y_n(y)$ можна подати у вигляді

$$Y_n(y) = C_n \operatorname{ch}(\lambda_n y) + C'_n \operatorname{sh}(\lambda_n y).$$

Однак більш зручною є форма розв'язку

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{sh}(\lambda_n y) + B_n \operatorname{sh}(\lambda_n (b - y)).$$

Загальний розв'язок задачі

$$u(x, y) = \sum_n X_n(x)Y_n(y).$$

Константи A_n та B_n знаходимо з додаткових умов

$$\phi(x) = u(x, 0) = \sum_n X_n(x)Y_n(0) = \sum_n X_n(x)B_n \operatorname{sh}(\lambda_n b),$$

$$\psi(x) = u(x, b) = \sum_n X_n(x)Y_n(b) = \sum_n X_n(x)A_n \operatorname{sh}(\lambda_n b),$$

звідки

$$A_n \operatorname{sh}(\lambda_n b) = \frac{2}{a}\int_0^a X_n(x)\psi(x)dx,$$

$$B_n \operatorname{sh}(\lambda_n b) = \frac{2}{a}\int_0^a X_n(x)\phi(x)dx.$$

Таким чином, розв'язок задачі Діріхле має вигляд

$$u(x, y) = \sum_n X_n(x)Y_n(y), \tag{5.4a}$$

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \tag{5.4b}$$

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{sh}(\lambda_n y) + B_n \operatorname{sh}(\lambda_n (b - y)), \tag{5.4c}$$

$$A_n = \frac{2}{a \operatorname{sh}(\lambda_n b)}\int_0^a X_n(x)\psi(x)dx, \tag{5.4d}$$

$$B_n = \frac{2}{a \operatorname{sh}(\lambda_n b)}\int_0^a X_n(x)\phi(x)dx. \tag{5.4e}$$

►

В прикладах (187)–(194) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа в прямокутнику $[0,a]\times[0,b]$, якщо межові умови мають вигляд:

187. $\left\| \begin{array}{l} u(0,y) = A\sin\frac{\pi y}{b}, \quad u(a,y)=0, \\ u(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad u(x,b)=0. \end{array} \right.$

188. $\left\| \begin{array}{ll} u(0,y) = V_1, & u(a,y)=V_2, \\ u(x,0)=0, & u(x,b)=0. \end{array} \right.$

189. $\left\| \begin{array}{ll} u(0,y) = \sin\frac{\pi y}{2b}, & u(a,y)=\sin\frac{7\pi y}{2b}, \\ u(x,0)=0, & u_y(x,b)=0. \end{array} \right.$

190. $\left\| \begin{array}{ll} u(0,y) = 0, & u(a,y)=(b-y)^2\sin\frac{\pi y}{b}, \\ u_y(x,0)=0, & u_y(x,b)=0. \end{array} \right.$

191. $\left\| \begin{array}{ll} u(0,y) = 0, & u(a,y)=0, \\ u(x,0)=0, & u_y(x,b)+hu(x,b)=T. \end{array} \right.$

192. $\left\| \begin{array}{ll} u(0,y) = \sin^2\frac{\pi y}{b}, & u(a,y)=0, \\ u_y(x,0)=0, & u_y(x,b)=0. \end{array} \right.$

193. $\left\| \begin{array}{ll} u_x(0,y) = 0, & u_x(a,y)=\cos\frac{\pi y}{b}, \\ u_y(x,0)=0, & u_y(x,b)=\cos\frac{3\pi x}{a}. \end{array} \right.$

194. $\left\| \begin{array}{ll} u(0,y)+\beta u_x(0,y) = A, & u(a,y)=0, \\ u(x,0)=0, & u(x,b)=0. \end{array} \right.$

195. Обчислити розподіл потенціалу електростатичного поля $u(x,y)$ всередині прямокутника $[0,a]\times[0,b]$, якщо потенціал вздовж боку цього прямокутника, що лежить на осі x, дорівнює V_0, усі інші боки заземлені (усередині прямокутника зарядів немає).

196. Обчислити розподіл потенціалу електростатичного поля $u(x,y)$ всередині прямокутника $[-a,a]\times[-b,b]$, якщо потенціали двох протилежних боків ($x=\pm a$) дорівнюють V_0, інші боки заземлені.

§ 5.2. Спектральна задача для оператора Лапласа у прямокутнику (рівняння Гельмгольця)

Приклад 5.2. ◁ Постановка задачі наступна:

$$\left\| \begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}+k^2u=0, \quad x\in(0,a),\ y\in(0,b), \\ u(0,y)=u(a,y)=0, \quad y\in(0,b) \\ u(x,0)=u(x,b)=0, \quad x\in(0,a). \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Невідомими є власні функції $u(x,y)$ та власні числа k, при яких задача має розв'язок. ▷

Розв'язання. ◀ Відокремлюючи стандартним чином змінні, матиме

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+k^2=0,$$

звідки прямує, що кожен з доданків є сталою та задача розбивається на дві незалежні задачі Штурма—Ліувілля

$$X''(x) + \lambda_1^2 X(x) = 0, \qquad X(0) = X(a) = 0, \tag{5.6a}$$
$$Y''(y) + \lambda_2^2 Y(y) = 0, \qquad Y(0) = Y(b) = 0, \tag{5.6b}$$
$$k^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2. \tag{5.6c}$$

Розв'язки задач Штурма—Ліувілля є відомими, див. (2.10), отже загальний розв'язок задачі має вигляд подвійного ряду Фур'є

$$u(x,y) = \sum_{n,m} C_{nm} X_n(x) Y_m(y), \tag{5.7a}$$
$$X_n(x) = \sin(\lambda_{1n} x), \quad \lambda_{1n} = \frac{\pi n}{a}, \tag{5.7b}$$
$$Y_m(y) = \sin(\lambda_{2m} y), \quad \lambda_{2m} = \frac{\pi m}{b}, \tag{5.7c}$$
$$k_{nm} = \sqrt{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2}. \tag{5.7d}$$

►

§ 5.3. Полярні координати

Рівняння Лапласа на площині в полярних координатах має вигляд:

$$u_{\rho\rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{\rho^2} = 0. \tag{5.8}$$

Загальний розв'язок рівняння (5.8) має форму:

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi) = A_0 + B_0 \ln(\rho) &+ \sum_{\{\lambda\}} \left(A_\lambda^{(1)} \rho^\lambda + B_\lambda^{(1)} \rho^{-\lambda} \right) \cos \lambda\varphi \\ &+ \sum_{\{\lambda\}} \left(A_\lambda^{(2)} \rho^\lambda + B_\lambda^{(2)} \rho^{-\lambda} \right) \sin \lambda\varphi. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Приклад 5.3. ◁ Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі:

$$u(\rho,\varphi) \ : \ \Delta u(\rho,\varphi) = 0, \quad \rho \in [0,R), \varphi \in S^1, \tag{5.10a}$$
$$u(a,\varphi) = f(\varphi), \tag{5.10b}$$

▷

де S^1 — одиничне коле (відрізок $[0,2\pi]$ з ототожненими кінцями).

Розв'язання. ◄ Оскільки область та межові умови задані у полярних координатах, істотно записати рівняння Лапласа також у полярних координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{5.11}$$

Шукатимемо частинні розв'язки у вигляді

$$v(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \tag{5.12}$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо два рівняння

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\varphi) = 0, \qquad \varphi \in S^1, \tag{5.13a}$$
$$\rho R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda^2 R(\rho) = 0. \tag{5.13b}$$

Розглянемо рівняння (5.13a) для функції Φ. Його загальний розв'язок має вигляд

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0\varphi & \text{при } \lambda = 0, \\ A_\lambda \cos\lambda\varphi + B_\lambda \sin\lambda\varphi & \text{при } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Крайові умови для цього рівняння явним чином не задані. Відомо тільки, що $\varphi \in S^1$. Але S^1 не є справжнім відрізком. Його кінці ототожнені, тобто маємо, задачу Штурма—Ліувілля з так званими періодичними умовами

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \tag{5.14}$$

Завдяки умовам (5.14) власні числа λ можуть приймати тільки цілі значення, та розв'язок матиме вигляд

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ B_0 = 0,$$

константу A_0 тоді, звісно, можна покласти рівною одиниці, тому вважатиме, що $\Phi_0(\varphi) = 1$.

Перейдемо до рівняння (5.13b). Якщо $n = 0$, його розв'язок

$$R_0(\rho) = A_0 + B_0\ln(\rho),$$

в решті випадків

$$R_n(\rho) = A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}.$$

В результаті загальний розв'язок

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi) = A_0 + B_0\ln(\rho) &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^{(1)}\rho^n + B_n^{(1)}\rho^{-n}\right)\cos n\varphi \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^{(1)}\rho^n + B_n^{(1)}\rho^{-n}\right)\sin n\varphi \end{aligned} \tag{5.15}$$

Для внутрішньої задачі $u(\rho,\varphi)$ має задовольняти умові $u(\rho,\varphi)\Big|_{\rho\to 0} < \infty$, звідки усі $B_n = 0$ та розв'язок має вигляд

$$u(\rho,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right). \tag{5.16a}$$

Коефіцієнти A_n та B_n знаходяться з межових умов (5.10b),

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi, \tag{5.16b}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi. \tag{5.16c}$$

▶

В прикладах (197)–(209) розв'язати внутрішню та зовнішню крайові задачі для рівняння Лапласа у крузі U_R, якщо межові умови мають вигляд:

197. $u(R,\varphi) = A\sin^3\varphi$.
198. $u_\rho(R,\varphi) = A\sin^2\varphi$.
199. $u_\rho(R,\varphi) = A + B\cos^3\varphi$.
200. $u(R,\varphi) + hu_\rho(R,\varphi) = A\sin 3\varphi$.
201. $u(R,\varphi) = A\cos^2\varphi$.
202. $u(R,\varphi) = A\cos^4\varphi$.
203. $u(R,\varphi) = A\cos^6\varphi + B\sin^6\varphi$.
204. $u_\rho(R,\varphi) = A\cos\varphi$.
205. $u_\rho(R,\varphi) = A\cos 2\varphi$.
206. $u(R,\varphi) = A + B\sin 5\varphi$.
207. $u_\rho(R,\varphi) = A\cos^3\varphi$.
208. $u_\rho(R,\varphi) = A + B\sin 2\varphi$.
209. $u(R,\varphi) + hu_\rho(R,\varphi) = A\sin 4\varphi$.

В прикладах (210)–(227) розв'язати внутрішню та зовнішню крайові задачі для круга U_R, якщо при $x^2 + y^2 = R^2$ потенціал матиме вигляд:

210. $u(x,y) = x + xy$.
211. $u(x,y) = 2(x^2+y)$.
212. $u(x,y) = x^3 - y^3$.
213. $u(x,y) = x^4 + y^4$.
214. $u(x,y) = x^3 + xy^2$.
215. $u(x,y) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + y^4$.
216. $u_\rho = xy$.
217. $u_\rho = x^2 - y$.
218. $u_\rho = x^3$.
219. $u_\rho = y^4$.
220. $u_\rho = xy + x^2 - y^2$.
221. $u_\rho = 3x^2y^2$.
222. $u(x,y) = y + 2xy$.
223. $u(x,y) = x^2 + 1$.
224. $u(x,y) = x^2 - y^2$.
225. $u(x,y) = y^2+x+y$.
226. $u(x,y) = ax+by+c$.
227. $u(x,y) = xy^2 + x^2y + x^3 - y^3$.

В прикладах (228)–(235) розв'язати крайову задачу для рівняння Лапласа у кільці, радіус якого $\rho \in (R_1, R_2)$, якщо межові умови мають вигляд:

228. $u_\rho(R_1,\varphi) = T$, $u_\rho(R_2,\varphi) = U$.
229. $u_\rho(R_1,\varphi) - hu(R_1,\varphi) = T$, $u_\rho(R_2,\varphi) + hu(R_2,\varphi) = U$.
230. $u_\rho(R_1,\varphi) = A$, $u(R_2,\varphi) = B$.
231. $u(R_1 = 1,\varphi) = 1 + \cos^2\varphi$, $u(R_2 = 2,\varphi) = \sin^2\varphi$.
232. $u(R_1,\varphi) = 0$, $u(R_2,\varphi) = \sin\varphi + 2\cos^2\varphi$.
233. $u_\rho(R_1,\varphi) = 4\sin^3\varphi$, $u(R_2,\varphi) = 0$.
234. $u(R_1,\varphi) = 1$, $u_\rho(R_2,\varphi) = 2\sin^2\varphi$.
235. $u_\rho(R_1,\varphi) = \sin\varphi$, $u_\rho(R_2,\varphi) = \cos\varphi$.

§ 6. Крайові задачі для рівняння Лапласа у тривимірному просторі

§ 6.1. Декартові координати

Рівняння Лапласа в декартових координатах має вигляд:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{6.1}$$

Приклад 6.1. ◁ Розглянемо простішу задачу Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутному паралелепіпеді:

$$\left\| \begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, & x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \quad z \in (0, c), \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), & x \in (0, a), \\ u(x, y, c) = \psi(x, y), & x \in (0, a), \\ u(0, y, z) = u(a, y, z) = 0, & y \in (0, b), \quad z \in (0, c) \\ u(x, 0, z) = u(x, b, z) = 0, & x \in (0, a), \quad z \in (0, c). \end{array} \right. \tag{6.2}$$

▷

Розв'язання. ◀ Шукатимемо частинні розв'язки у вигляді

$$v(x, y, z) = w(x, y)Z(z), \tag{6.3}$$

де ми відокремили саме ту змінну, за якою додаткові умови в задачі (6.2) є однорідними. Підставляючи вираз (6.3) до рівняння Лапласа, отримаємо:

$$\frac{w_{xx} + w_{yy}}{w(x, y)} - \frac{Z''}{Z(z)} = -k^2.$$

Змінні відокремлено. Для функції $w(x, y)$ маємо спектральну задачу 5.2:

$$\left\| \begin{array}{ll} w_{xx} + w_{yy} + k^2 u = 0, & x \in (0, a), \ y \in (0, b), \\ w(0, y) = w(a, y) = 0, & y \in (0, b) \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0, & x \in (0, a). \end{array} \right. \tag{6.4}$$

Розв'язком цієї задачі є повний набір власних елементів $\{w_{nm}; k_{nm}\}$, див. (5.7):

$$w_{nm}(x, y) = \sin\left(\lambda_{1n} x\right) \sin\left(\lambda_{2m} y\right),$$
$$k_{nm} = \sqrt{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2}, \qquad \lambda_{1n} = \frac{\pi n}{a}, \ \lambda_{2m} = \frac{\pi m}{b}.$$

Для функції $Z(z)$, згідно з (6.3) маємо рівняння:

$$Z'' + k_{n,m}^2 Z(z) = 0, \qquad z \in (0, c),$$

загальний розв'язок якого запишемо у вигляді:

$$Z_{n,m}(z) = A_{n,m} \operatorname{sh} k_{n,m} z + B_{n,m} \operatorname{sh} k_{n,m}(c - z).$$

Загальний розв'язок шукаємо у вигляді розвинення по частинних розв'язках (фактично, по розв'язках спектральної задачі):

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{n,m}(x,y) Z_{n,m}(z), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{n,m}(x,y)\left(A_{n,m}\operatorname{sh} k_{n,m}z + B_{n,m}\operatorname{sh} k_{n,m}(c-z)\right). \end{aligned}$$

Коефіцієнти $A_{n,m}$ і $B_{n,m}$ визначаються з межових умов:

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = u(x,y,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} w_{n,m}(x,y), \\ \psi(x,y) = u(x,y,c) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} w_{n,m}(x,y) \end{aligned}$$

як коефіцієнти Фур'є розкладу межових умов в подвійний рід Фур'є за розв'язками спектральної задачі (6.4):

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{1}{\|w\|^2}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \phi(x,y) w_{n,m}(x,y), \\ B_{n,m} &= \frac{1}{\|w\|^2}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \psi(x,y) w_{n,m}(x,y). \end{aligned}$$

►

В прикладах (236)–(239) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа в прямокутному паралелепіпеді $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$, якщо межові умови мають вигляд:

236. $\left\| \begin{array}{ll} u_x(0,y,z)=0, & u_x(a,y,z)=A, \\ u_y(x,0,z)=0, & u_y(x,b,z)=B, \\ u_z(x,y,0)=0, & u_c(x,y,c)=C. \end{array} \right.$

237. $\left\| \begin{array}{l} u(0,y,z)=0,\ u(\pi,y,z)=0, \\ u_y(x,0,z)=0,\ u_y(x,\pi,z)=0, \\ u(x,y,0)=\sin x\cos y, \\ u(x,y,c)=\sin 2x\cos 2y. \end{array} \right.$

238. $\left\| \begin{array}{ll} u(0,y,z)=0, & u(a,y,z)=1, \\ u(x,0,z)=0, & u(x,b,z)=1, \\ u(x,y,0)=0, & u(x,y,c)=1. \end{array} \right.$

239. $\left\| \begin{array}{ll} u_x(0,y,z)=0, & u_x(a,y,z)=0, \\ u_y(x,0,z)=0, & u_y(x,b,z)=0, \\ u(x,y,0)=A, & u(x,y,c)=B. \end{array} \right.$

§ 6.2. Сферичні координати

Оператор Лапласа у сферичних координатах має вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi},\\ \Delta_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{— радіальна частина;}\\ \Delta_{\theta\varphi} &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad \text{— кутова частина.}\end{aligned} \tag{6.5}$$

Сферичну функцією можна задати *формулою Лапласа*

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = N_{lm}e^{im\varphi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi\left(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\right)^l e^{im\psi}, \tag{6.6}$$

де сталу N_{lm} обирають з умови нормування

$$\|Y_{lm}\|^2 \equiv \int_{S^2} |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2\mathrm{d}\Omega = 1. \tag{6.7}$$

Простіші сферичні функції мають вигляд

$$\begin{aligned}Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\\ Y_{1,\pm1} &= \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right),\\ Y_{2,\pm1} &= \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2,\pm2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm2i\varphi}.\end{aligned}$$

Сферичні функції утворюють повну ортонормовану систему функцій на сфері одиничного радіуса, тому будь-яку функцію $f(\theta,\varphi) \in L^2(S^2)$ можливо розкласти в ряд Фур'є по сферичних функціях:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{6.8a}$$

де коефіцієнти Фур'є

$$f_{lm} = \int_{S^2} f(\theta,\varphi)\overline{Y_{lm}}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega. \tag{6.8b}$$

Це дає можливість шукати розв'язок крайових задач у сферичних областях саме у вигляді розвинення в ряд за сферичними функціями. Загальний розв'язок рівняння Лапласа в сферичних координатах має вигляд

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi). \tag{6.9}$$

Приклад 6.2. ◁ Розглянемо простішу задачу Діріхле для рівняння Лапласа в кулі:

$$\left\| \begin{array}{ll} \Delta u(r,\theta,\varphi) = 0, & r \in [0,R), \\ u(R,\theta,\varphi) = C\sin\theta\cos\varphi. & \end{array} \right. \tag{6.10}$$

▷

Розв'язання. ◀ Загальний розв'язок рівняння Лапласа у сферичних координатах може бути поданий у вигляді розвинення (6.9) в ряд по сферичних функціях. Для внутрішньої задачі Діріхле з умов обмеженості маємо покласти $B_{lm} = 0$. Поки константа A_{lm} не визначена, перепозначимо $A_{lm}r^l \to A_{lm}(r/R)^l$. Отже

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}(\theta,\varphi). \tag{6.11}$$

Сталі A_{lm} визначимо з межових умов. На сфері $r = R$

$$u(R,\theta,\varphi) = C\sin\theta\cos\varphi = -i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}C\left(Y_{1,1} + Y_{1,-1}\right)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

$$\text{звідки}\quad A_{1,\pm1} = -i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}C, \qquad A_{l,m} = 0 \text{ в решті випадків.}$$

Підставляючи ці сталі в загальний розв'язок (6.11), отримаємо:

$$u(r,\theta,\varphi) = C\left(\frac{r}{R}\right)\sin\theta\sin\varphi.$$

▶

В прикладах (240)–(249) розв'язати внутрішню і зовнішню крайові задачі для рівняння Лапласа у кулі радіуса R, якщо межові умови мають вигляд:

240. $u(R,\theta,\varphi) = Y_{5,4}(\theta,\varphi)$.

241. $u(R,\theta,\varphi) = \cos\theta$.

242. $u(R,\theta,\varphi) = 2\cos^2\theta$.

243. $u_r(R,\theta,\varphi) + 2u(R,\theta,\varphi) = 1 + 2\cos\theta + 3\cos^2\theta$.

244. $u_r(R,\theta,\varphi) + u(R,\theta,\varphi) = 3 + \sin\theta\left(\sin\varphi + \sin\theta\right)$.

245. $u(R,\theta,\varphi) - u_r(R,\theta,\varphi) = \sin(2\theta)$.

246. $u(R,\theta,\varphi) = \sin\theta\left(\sin\varphi + \sin\theta\right)$.

247. $u(R,\theta,\varphi) + 2u_r(R,\theta,\varphi) = 1 + \sin\theta\left(\sin\varphi + \sin\theta\right)$.

248. $u(R,\theta,\varphi) - u_r(R,\theta,\varphi) = \sin^2\theta$.

249. $u_r(R,\theta,\varphi) + 2u(R,\theta,\varphi) = 1 + \cos\theta$.

В прикладах (250)–(265) розв'язати крайову задачу для рівняння Лапласа у сферичному шарі $r \in (R_1, R_2)$, якщо межові умови мають вигляд:

250. $u(1,\theta,\varphi) = \cos^2\theta$, $u(2,\theta,\varphi) = \frac{1}{8}\left(\cos^2\theta + 1\right)$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.

251. $u(1,\theta,\varphi) = 1 - \cos 2\theta$, $u(2,\theta,\varphi) = 2\cos\theta$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.

252. $u(1,\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\cos\theta$, $u(2,\theta,\varphi) = (1+\cos 2\theta)$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.
253. $u(1,\theta,\varphi) = \cos^2\theta$, $u(2,\theta,\varphi) = \frac{1}{8}\left(\cos^2\theta + 1\right)$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.
254. $u(1,\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi$, $u(2,\theta,\varphi) = 0$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.
255. $u(1/2,\theta,\varphi) = 0$, $u(1,\theta,\varphi) = 6\cos^2\varphi\sin^2\theta$, радіуси $R_1 = 1/2$, $R_2 = 1$.
256. $u_r(1,\theta,\varphi) = 1-\cos 2\theta$, $u(2,\theta,\varphi) = 2$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.
257. $u_r(1,\theta,\varphi) + u(1,\theta,\varphi) = 0$, $u(2,\theta,\varphi) = \frac{1}{5}(1+\cos 2\theta)$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.
258. $u(1,\theta,\varphi) = \frac{1}{3}\sin^2\theta$, $u_r(2,\theta,\varphi) = \left(\cos^2\theta + 1\right)$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.
259. $u(1,\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi$, $u_r(2,\theta,\varphi) + 5u(2,\theta,\varphi) = 0$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.
260. $u_r(1/2,\theta,\varphi) = 0$, $u(1,\theta,\varphi) = 6\cos^2\varphi\sin^2\theta$, радіуси $R_1 = 1/2$, $R_2 = 1$.
261. $u(R_1,\theta,\varphi) = \sin(2\theta)$, $u(R_2,\theta,\varphi) = 2\cos\theta$.
262. $u(1,\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi$, $u(2,\theta,\varphi) = 0$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.
263. $u(1/2,\theta,\varphi) = 0$, $u(1,\theta,\varphi) = 6\cos^2\varphi\sin^2\theta$, радіуси $R_1 = 1/2$, $R_2 = 1$.
264. $u(1,\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi$, $u(2,\theta,\varphi) + 5u_r(2,\theta,\varphi) = 0$, радіуси $R_1 = 1$, $R_2 = 2$.
265. $u_r(R_1,\theta,\varphi) = \sin\theta$, $u(R_2,\theta,\varphi) = 6\cos^2\varphi\sin^2\theta$.

Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа має такий розклад по сферичних функціях

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} = \begin{cases} \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos\theta), & r < R \\ \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\theta), & r > R \end{cases}. \tag{6.12}$$

При запису (6.12) введено поліном Лежандра

$$P_l(\cos\theta) = \frac{Y_{l0}(\theta,\varphi)}{Y_{l0}(0,0)} = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{3/2} Y_{l0}(\theta,\varphi). \tag{6.13}$$

Приклад 6.3. ◁ Знайти потенціал, створюваний заземленою металевою сферою радіуса R та точковим зарядом величини q, поміщеним на відстані $a < R$ від центра сфери та густину індукованих зарядів. ▷

Розв'язання. ◀ В сфері $0R$ виділимо сферу $0a$ та розглянемо потенціал в сферичному шарі, $u = u_1 + u_2$, де u_1 — потенціал точкового заряду, u_2 — потенціал зарядів, індукованих на сфері.

$$u_1(r,\theta) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{q}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta),$$

$$u_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{l0}(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta).$$

З граничної умови $u(R,\theta) = 0$ випливатиме, що

$$\frac{q}{R}\left(\frac{a}{r}\right)^l + C_l\left(\frac{r}{a}\right)^l = 0 \quad\Longrightarrow\quad C_l = -\frac{q}{R}\cdot\left(\frac{a}{R}\right)^{2l}.$$

Таким чином, для u_2 можемо записати

$$u_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\Big(-\frac{q}{R}\cdot\Big(\frac{a}{R}\Big)^{2l}\Big)\Big(\frac{r}{a}\Big)^{l}P_l(\cos\theta) = \frac{q'}{a'}\sum_{l=0}^{\infty}\Big(\frac{r}{a'}\Big)^{l}P_l(\cos\theta),$$

де

$$q' = q\frac{a}{R}, \qquad a' = \frac{R^2}{a}.$$

Отже поле u_2 індукованих зарядів еквівалентно полю «зображення» заряда a відносно сфери, тобто полю заряда q', розташованого на одній прямій з $0a$ на відстані a' (точки a та a' є зв'язаними операцією інверсії, $a \cdot a' = R^2$). В цьому полягає відомий з електростатики *метод зображень*. ▶

266. Куля радіуса a з діелектричною сталою ε_1 міститься в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На відстані b від центра кулі розташований точковий заряд величини e. Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі.

267. Діелектрична куля радіусу R з діелектричною сталою ε_0 знаходиться в середовищі з діелектричною сталою ε_1. Знайти потенціал, що створюється точковим зарядом величини q, який знаходиться на відстані a від центру кулі. Вважати, що $a < R$.

268. Діелектрична куля радіусу R_0 з діелектричною сталою ε_0 покрита діелектричним шаром завтовшки $d = R_1 - R_0$ з діелектричною сталою ε_1 і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою ε_2. Знайти потенціал, що створюється точковим зарядом величини q, який знаходиться на відстані a від центру кулі. Вважати, що $a > R_1$.

269. Діелектрична куля радіусу R_0 з діелектричною сталою ε_0 покрита діелектричним шаром завтовшки $d = R_1 - R_0$ з діелектричною сталою ε_1 і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На нескінченності задане стале однорідне електричне поле величини E. Знайти розподіл потенціалу в системі.

270. Заземлена металева куля радіусу R_0 покрита діелектричним шаром завтовшки $d = R_1 - R_0$ з діелектричною сталою ε_1 і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На нескінченності задане стале однорідне електричне поле величини E. Знайти розподіл потенціалу в системі.

271. На відстані a від заземленої металевої сфери радіусу R знаходиться квадруполь величини Q в діелектричному середовищі з діелектричною сталою ε. Знайти розподіл потенціалу в системі.

272. Між двома металевими сферами радіусів R_1 та R_2, одна з яких заземлена, знаходиться точковий заряд величини q на відстані a від центру сфер. Середовище між металічними сферами заповнене діелектриком з діелектричною сталою ε. Знайти розподіл потенціалу в системі.

273. На відстані a від центру незаземленої металевої сфери радіусу R поміщений диполь величини $p = ql$, де q — абсолютна величина різноіменних зарядів, що створюють диполь, а l — відстань між ними. Вісь диполю направлена вздовж лінії, що з'єднує диполь із центром сфери. Знайти розподіл потенціалу в системі та розподіл заряду на поверхні сфери.

274. Заземлена металева куля радіусу R_0 покрита діелектричним шаром завтовшки $d = R_1 - R_0$ з діелектричною сталою ε_1 і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На відстані a від центру кулі знаходиться точковий заряд величини q. Знайти розподіл потенціалу в системі.

275. Діелектрична куля радіусу R_0 з діелектричною сталою ε_0 покрита діелектричним шаром завтовшки $d = R_1 - R_0$ з діелектричною сталою ε_1 і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою ε_2. Знайти потенціал, що створюється точковим зарядом величини q, який знаходиться на відстані a від центру кулі. Вважати, що $a > R_1$.

276. Між двома металевими сферами радіусів R_1 та R_2, одна з яких заземлена, знаходиться точковий заряд величини q на відстані a від центру сфер. Середовище між металічними сферами заповнене діелектриком з діелектричною сталою ε. Знайти розподіл потенціалу в системі.

277. Заземлена металева куля радіусу R_0 покрита діелектричним шаром завтовшки $d = R_1 - R_0$ з діелектричною сталою ε_1 і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На нескінченності задане стале однорідне електричне поле величини E. Знайти розподіл потенціалу в системі.

278. На відстані a від заземленої металевої сфери радіусу R знаходиться квадруполь величини Q в діелектричному середовищі з діелектричною сталою ε. Знайти розподіл потенціалу в системі.

279. Знайти потенціал, створюваний металевою заземленою (ізольованою) сферою радіуса R і точковим диполем величини p, поміщеним на відстані a від центра сфери і напрямленим уздовж її радіуса. Розглянути випадок, коли диполь знаходиться всередині сфери.

280. Знайти потенціал, створюваний металевою заземленою (ізольованою) сферою радіуса R і точковим диполем величини p, поміщеним на відстані a від центра сфери і напрямленим уздовж її радіуса. Розглянути випадок, коли диполь знаходиться зовні сфери.

281. Куля радіуса a з діелектричною сталою ε_1 міститься в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На відстані b від центра кулі розташований точковий заряд величини e. Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі. Розглянути випадок, коли заряд знаходиться всередині сфери.

282. Куля радіуса a з діелектричною сталою ε_1 міститься в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На відстані b від центра кулі розташований точковий заряд величини e. Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі. Розглянути випадок, коли заряд знаходиться зовні сфери.

283. Діелектрична куля радіусу a з діелектричною сталою ε_a покрита діелектричним шаром завтовшки $h = a - b$ з діелектричною сталою ε_h і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою ε_b. Знайти потенціал, що створюється точковим зарядом величини q, який знаходиться на відстані R від центру кулі. Вважати, що $a < R < b$.

284. Між двома металевими сферами радіусів R_1 та R_2, одна з яких заземлена, знаходиться точковий заряд величини q на відстані a від центру сфер. Середовище між металічними сферами заповнене діелектриком з діелектричною сталою ε. Знайти розподіл потенціалу в системі.

285. На відстані a від центру незаземленої металевої сфери радіусу R поміщений диполь величини $p = ql$, де q — абсолютна величина різноіменних зарядів, що створюють диполь, а l — відстань між ними. Вісь диполю направлена вздовж лінії, що з'єднує диполь із центром сфери. Знайти розподіл потенціалу в системі та розподіл заряду на поверхні сфери.

286. Заземлена металева куля радіусу R_0 покрита діелектричним шаром завтовшки $d = R_1 - R_0$ з діелектричною сталою ε_1 і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На відстані a від центру кулі знаходиться точковий заряд величини q. Знайти розподіл потенціалу в системі.

287. Знайти потенціал, створюваний металевою заземленою (ізольованою) сферою радіуса R і точковим диполем величини p, поміщеним на відстані a від центра сфери і напрямленим уздовж її радіуса. Розглянути випадок, коли диполь знаходиться зовні сфери.

288. Куля радіуса a з діелектричною сталою ε_1 міститься в середовищі з діелектричною сталою ε_2. На відстані b від центра кулі розташований точковий заряд величини e. Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі. Розглянути випадок, коли заряд знаходиться всередині сфери.

§ 6.3. Циліндричні координати

Оператор Лапласа у циліндричних координатах має вигляд:

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6.14}$$

Перелічмо деякі властивості циліндричних функцій.

Циліндричні функції $w = Z_\nu(k\rho)$ задовольняють *рівняння Бесселя*:

$$w'' + \frac{1}{\rho}w' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)w = 0. \tag{6.15}$$

Загальний розв'язок рівняння Бесселя можна представити у вигляді

$$w = C_1 J_\nu(k\rho) + C_2 N_\nu(k\rho), \tag{6.16a}$$

$$w = C_1 H_\nu^{(1)}(k\rho) + C_2 H_\nu^{(2)}(k\rho), \tag{6.16b}$$

де J_ν — функція Бесселя, N_ν — функція Неймана, $H_\nu^{(1,2)}$ — функції Ханкеля 1-го/2-го роду.

Асимптотичний вигляд циліндричних функцій при малих значеннях аргументу:

$$J_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu;\ \nu \notin \mathbb{Z}_-; \qquad J_0(z) \sim 1; \tag{6.17a}$$

$$N_\nu(z) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu};\ \nu \neq 0; \qquad N_0(z) \sim \frac{1}{\pi}\ln z; \tag{6.17b}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim iN_\nu(z), \qquad H_\nu^{(2)}(z) \sim -iN_\nu(z). \tag{6.17c}$$

Асимптотичний вираз для циліндричних функцій $Z_\nu(x)$ при $x \to \infty$

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{6.18a}$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{6.18b}$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{\pm i\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{6.18c}$$

Рекурентні співвідношення та формули диференціювання:

$$\begin{aligned}
Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z}Z_\nu(z),\\
Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) &= 2Z'_\nu(z),\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu Z_\nu(z)\right] &= z^\nu Z_{\nu-1}(z),\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} Z_\nu(z)\right] &= -z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z),\\
\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\left[z^\nu Z_\nu(z)\right] &= z^{\nu-n} Z_{\nu-n}(z),\\
\left(-\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\left[z^{-\nu} Z_\nu(z)\right] &= z^{-(\nu-n)} Z_{\nu+n}(z).
\end{aligned} \tag{6.19}$$

За допомогою цих рекурентних співвідношень можна обчислити інтеграли з циліндричними функціями. Зокрема:

$$\int z^\nu Z_{\nu-1}(z)\mathrm{d}z = z^\nu Z_\nu(z), \qquad \int z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z)\mathrm{d}z = -z^{-\nu} Z_\nu(z). \tag{6.20}$$

Для циліндричних функцій можна поставити спектральну задачу Штурма–Ліувілля:

$$\left\|\begin{array}{ll}
(\rho u')' - \dfrac{\nu^2}{\rho}u = -k^2\rho u, & \rho \in [a,b]\\
\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, & \alpha^2 + \beta^2 > 0\\
\gamma u(b) + \delta u'(b) = 0, & \delta^2 + \gamma^2 > 0.
\end{array}\right. \tag{6.21}$$

Розв'язки задачі ШЛ (6.21) складаються з власних елементів: власних чисел $k_n^{(\nu)}$, де $n \in \mathbb{N}$ та відповідних до них власних функцій $u = Z_\nu\left(k_n^{(\nu)}\rho\right)$, що утворюють повну ортогональну з вагою ρ систему функцій на відрізку $[a,b]$. Якщо $k_1 \equiv k_1^{(\nu)}$ та $k_2 \equiv k_2^{(\nu)}$ — два власних числа задачі ШЛ, що задовільняють межовим умовам (6.21), $u_1 = Z_\nu(k_1\rho)$ та $u_2 = Z_\nu(k_2\rho)$ відповідні до них власні функції, тоді умова ортогональності для циліндричних функцій має вигляд:

$$\int_a^b \rho \mathrm{d}\rho \, u_1 u_2 = \delta_{k_1,k_2} \left\| Z_\nu(k\rho) \right\|^2, \tag{6.22a}$$

де норма $\|Z_\nu(k\rho)\|$ визначається як

$$\|Z_\nu(k\rho)\|^2 = \left[\frac{\rho}{2k} \left(\frac{\partial Z_\nu(k\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial Z_\nu(k\rho)}{\partial k} \right) - Z_\nu(k\rho) \frac{\partial^2 Z_\nu(k\rho)}{\partial k \partial \rho} \right] \Bigg|_a^b. \tag{6.22b}$$

Завдяки властивості повноти будь-яку функцію $f(\rho) \in L^2(\rho, [a,b])$ можливо розкласти в ряд Фур'є за циліндричними функціями, так званий *ряд Фур'є–Бесселя*

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Z_\nu \left(k_n^{(\nu)} \rho \right), \tag{6.23a}$$

де коефіцієнти Фур'є

$$f_n = \frac{1}{\|Z_\nu(k\rho)\|^2} \int_a^b \rho \mathrm{d}\rho \, f(\rho) Z_\nu(k_n\rho). \tag{6.23b}$$

Це дає можливість шукати розв'язок крайових задач у циліндричних областях саме у вигляді розвинення в ряд за циліндричними функціями. Загальний розв'язок рівняння Лапласа в циліндричних координатах має вигляд

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi,z) = \sum_{k,\nu} &\left(A_{k,\nu}^{(1)} J_\nu(k\rho) + B_{k,\nu}^{(1)} N_\nu(k\rho) \right) \left(A_{k,\nu}^{(2)} \cos\nu\varphi + B_{k,\nu}^{(2)} \sin\nu\varphi \right) \\ &\times \left(A_{k,\nu}^{(3)} e^{kz} + B_{k,\nu}^{(3)} e^{-kz} \right). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Приклад 6.4. $\lhd$ Розв'язати простішу задачу Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі:

$$\left\| \begin{array}{ll} \Delta u(\rho,\varphi,z) = 0, & \rho \in [0,R),\ \varphi \in S^1,\ z \in (0,h), \\ u(\rho,\varphi,0) = f(\rho,\varphi), & \rho \in [0,R),\ \varphi \in S^1 \\ u(\rho,\varphi,h) = 0, & \rho \in [0,R),\ \varphi \in S^1 \\ u(R,\varphi,z) = 0, & \varphi \in S^1,\ z \in (0,h). \end{array} \right. \tag{6.25}$$

Розглянути окремий випадок

$$f(\rho,\varphi) = A\rho^2 \sin 2\varphi. \tag{6.26}$$

$\rhd$

Розв'язання. ◀ Загальний розв'язок рівняння Лапласа в циліндричних координатах має вигляд (6.24). Для внутрішньої задачі Діріхле маємо покласти $B_1 = 0$ внаслідок розбіжності $N_\nu(k\rho)$, коли $\rho \to 0$. Крім того, функція u має бути однозначною, тому

$$u\left(\rho, \varphi + 2\pi, z\right) = u\left(\rho, \varphi, z\right),$$

звідки ν має бути цілим. Отже для внутрішньої задачі

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_k \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k\rho) \left(A_{k,n}^{(2)} \cos n\varphi + B_{k,n}^{(2)} \sin n\varphi \right) \times \left(A_{k,n}^{(3)} \operatorname{sh}(kz) + B_{k,n}^{(3)} \operatorname{sh}(k(z-h)) \right). \tag{6.27}$$

З умови $u(\rho, \varphi, h) = 0$ випливатиме, що стала $A_{k,n}^{(3)} = 0$. З умови $u(R, \varphi, z) = 0$ отримаємо, що

$$J_n\left(kR\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_m^{(n)} = \frac{j_m^{(n)}}{R}, \tag{6.28}$$

де $j_m^{(n)}$ — m-й нуль функції Бесселя J_n, що задовільнює умову $J_n\left(j_m^{(n)}\right) = 0$. Це — відоми протабульовані величини. Отже, загальний розв'язок задачі (6.25) має вигляд

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(j_m^{(n)} \rho / R\right) \operatorname{sh}\left(j_m^{(n)} (z-h)/R\right) \times \left(C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi\right). \tag{6.29a}$$

Коефіцієнти C_{nm} та D_{nm} знаходяться з межової умови $u(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi)$:

$$f(\rho, \varphi) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh}\left(j_m^{(n)} h/R\right) J_n\left(j_m^{(n)} \rho / R\right) \times \left(C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi\right). \tag{6.29b}$$

Але ця формула — це розклад функції f в подвійний ряд Фур'є, звідки коефіцієнти Фур'є

$$C_{nm} = \frac{1}{\pi(1+\delta_{n0}) \left\| J_n\left(k\rho\right) \right\|^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \rho \mathrm{d}\rho f(\rho, \varphi) \cos n\varphi J_n(k_m^{(n)} \rho), \tag{6.29c}$$

$$D_{nm} = \frac{1}{\pi \left\| J_n\left(k\rho\right) \right\|^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \rho \mathrm{d}\rho f(\rho, \varphi) \sin n\varphi J_n(k_m^{(n)} \rho). \tag{6.29d}$$

Підрахуємо норму $\left\| J_n\left(k\rho\right) \right\|^2$. Згідно з (6.22b):

$$\left\| J_n\left(k\rho\right) \right\|^2 = \left[\frac{\rho}{2k} \left(\frac{\partial J_n(k\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(k\rho)}{\partial k} \right) - J_n(k\rho) \frac{\partial^2 J_n(k\rho)}{\partial k \partial \rho} \right] \Bigg|_0^R$$

Завдяки (6.28) $J_n(k\rho)$ на межах дорівнює нулеві, отже

$$\|J_n(k\rho)\|^2 = \frac{R^2}{2}\left[J_n'(kR)\right]^2. \tag{6.30}$$

Для випадка (6.26), коли функція $f(\rho,\varphi) = A\rho^2\sin 2\varphi$, розрахунки можна довести до кінця. Межова умова (6.29b) набуває вигляду:

$$A\rho^2\sin 2\varphi = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sh}\left(\frac{j_m^{(n)}h}{R}\right)J_n\left(\frac{j_m^{(n)}\rho}{R}\right)\left(C_{nm}\cos n\varphi + D_{nm}\sin n\varphi\right),$$

звідки з усіх Фур'є-коефіцієнтів $C_{n,m}$ та $D_{n,m}$ ненульовими є лише $D_{n=2,m}$, які визначаються з умови:

$$A\rho^2 = -\sum_{m=1}^{\infty}D_{2m}\operatorname{sh}\left(j_m^{(2)}h/R\right)J_2\left(j_m^{(2)}\rho/R\right).$$

Цей ряд — ряд Фур'є-Бесселя, коефіцієнти Фур'є, згідно з (6.23b):

$$D_{2m} = \frac{A}{\|J_2(k\rho)\|^2}\int_0^R d\rho\, \rho^3 J_2\left(j_m^{(2)}\rho/R\right). \tag{6.31}$$

Згідно з (6.20)

$$\int_0^R d\rho\, \rho^3 J_2\left(j_m^{(2)}\rho/R\right) = \frac{R}{j_m^{(2)}}\rho^3 J_3\left(j_m^{(2)}\rho/R\right)\Big|_0^R = \frac{R^4}{j_m^{(2)}}J_3\left(j_m^{(2)}\right).$$

Підставляючи цей вираз до (6.31)разом із нормою (6.30), остаточно маємо:

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi,z) &= \sin 2\varphi\sum_{m=1}^{\infty}D_{2m}\cdot J_2\left(j_m^{(2)}\rho/R\right)\operatorname{sh}\left(j_m^{(2)}(z-h)/R\right),\\ D_{2m} &= \frac{2A}{j_m^{(2)}}\cdot\frac{J_3\left(j_m^{(2)}\right)}{\left[J_2'\left(j_m^{(2)}\right)\right]^2}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

▶

Приклад 6.5. ◁ Розв'язати наступну задачу Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі:

$$\left\| \begin{array}{ll} \Delta u(\rho,\varphi,z) = 0, & \rho\in[0,R),\ \varphi\in S^1,\ z\in(0,h),\\ u(\rho,\varphi,0) = 0, & \rho\in[0,R),\ \varphi\in S^1\\ u(\rho,\varphi,h) = 0, & \rho\in[0,R),\ \varphi\in S^1\\ u(R,\varphi,z) = f(\varphi,z), & \varphi\in S^1,\ z\in(0,h). \end{array} \right. \tag{6.33}$$

Розглянути окремий випадок

$$f(\varphi,z) = A\cos\varphi\sin\frac{2\pi z}{h}. \tag{6.34}$$

▷

Розв'язання. ◀ Розв'язок задачі має вигляд (6.27). Але однорідні умови на основах циліндра $u(\rho,\varphi,0) = 0$ та $u(\rho,\varphi,h) = 0$ означають, що функція за змінною z має бути не гіперболічною, а тригонометричною. Це означає, що в виразі умови (6.27) параметр k має бути суто уявним, $k = i\varkappa$:

$$u(\rho,\varphi,z) = \sum_{\varkappa}\sum_{n} I_n(\varkappa\rho)\left(A^{(2)}_{\varkappa,n}\cos n\varphi + B^{(2)}_{\varkappa,n}\sin n\varphi\right) \times \left(A^{(3)}_{\varkappa,n}\cos(\varkappa z) + B^{(3)}_{\varkappa,n}\sin(\varkappa z)\right), \tag{6.35}$$

де I_n — модифікована функція Бесселя, $J_n(iz) = i^n I_n(z)$. З умови $u(\rho,\varphi,0) = 0$ випливатиме, що стала $A^{(3)}_{\varkappa,n} = 0$. З умови $u(\rho,\varphi,h) = 0$

$$\sin(\varkappa h) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \varkappa_m = \frac{m\pi}{h},\ m\in\mathbb{N}.$$

Загальний розв'язок задачі (6.33) має вигляд

$$u(\rho,\varphi,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(\frac{\pi m\rho}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right)\left(C_{nm}\cos n\varphi + D_{nm}\sin n\varphi\right). \tag{6.36a}$$

Коефіцієнти C_{nm} та D_{nm} знаходяться з умови $u(R,\varphi,z) = f(\varphi,z)$:

$$f(\varphi,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(\frac{\pi m R}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right)\left(C_{nm}\cos n\varphi + D_{nm}\sin n\varphi\right), \tag{6.36b}$$

звідки

$$C_{nm} = \frac{1}{I_n\left(\frac{\pi m R}{h}\right)}\frac{1}{\pi(1+\delta_{n0})}\frac{2}{h}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h \mathrm{d}z f(\varphi,z)\sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right)\cos n\varphi, \tag{6.36c}$$

$$D_{nm} = \frac{1}{I_n\left(\frac{\pi m R}{h}\right)}\frac{1}{\pi(1+\delta_{n0})}\frac{2}{h}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h \mathrm{d}z f(\varphi,z)\sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right)\sin n\varphi. \tag{6.36d}$$

Для випадка (6.34), коли функція $f(\varphi,z) = A\cos\varphi\sin\frac{2\pi z}{h}$, розрахунки можна довести до кінця. Межова умова (6.36b) набуває вигляду:

$$A\cos\varphi\sin\frac{2\pi z}{h} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(\frac{\pi m R}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right)\left(C_{nm}\cos n\varphi + D_{nm}\sin n\varphi\right),$$

звідки з усіх Фур'є-коефіцієнтів $C_{n,m}$ та $D_{n,m}$ ненульовими є лише $C_{n=1,m=2}$, який визначаються з умови:

$$A = C_{n=1,m=2} I_1\left(2\pi R h\right) \quad\Longrightarrow\quad C_{n=1,m=2} = \frac{A}{I_1\left(2\pi R/h\right)}$$

Підставляючи цей коефіцієнт до загального розв'язку (6.36a), отримаємо:

$$u(\rho,\varphi,z) = A\frac{I_1(2\pi\rho/h)}{I_1(2\pi R/h)}\sin(2\pi z/h)\cos\varphi. \tag{6.37}$$

►

В прикладах (289)–(299) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа в циліндрі радіуса R і висотою h, якщо межові умови мають вигляд:

289. $u(\rho,\varphi,0) = A_1,$ $u(\rho,\varphi,h) = A_2,$ $(R,\varphi,z) = A_3.$

290. $u(\rho,\varphi,0) = A\rho^3;$ $u(\rho,\varphi,h) = B\cos\varphi;$ $u(R,\varphi,z) = C\cos(\alpha z)$

291. $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma_1 u\right)(R,\varphi,z) = 0,$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma_2 u\right)(\rho,\varphi,h) = 0,$ $u(\rho,\varphi,0) = A(R^2-\rho^2).$

292. $u(\rho,\varphi,0) = A\rho\sin\varphi;$ $\frac{\partial u}{\partial n}(\rho,\varphi,h) = B\rho\cos\varphi;$ $u(R,\varphi,z) = C\cos\varphi\sin(\pi z/h).$

293. $u(\rho,\varphi,0) = A(R^2-\rho^2);$ $u(\rho,\varphi,h) = B;$ $u(R,\varphi,z) = C\cos(\alpha z).$

294. $u(\rho,\varphi,0) = A+B\rho;$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma_1 u\right)(\rho,\varphi,h) = C;$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma_2 u\right)(R,\varphi,z) = 0$

295. $\frac{\partial u}{\partial n}(\rho,\varphi,0) = \begin{cases} I, & 0\le\rho<R_1,\\ 0, & R_1\le\rho<R\end{cases}$ $\frac{\partial u}{\partial n}(\rho,\varphi,h) = \begin{cases} I, & 0\le\rho<R_1\\ 0, & R_1\le\rho<R,\end{cases}$ $\frac{\partial u}{\partial n}(R,\varphi,z) = 0.$

296. $u(\rho,\varphi,0) = V_1;$ $u(\rho,\varphi,h) = V_2;$ $u(R,\varphi,z) = \begin{cases} V_1, & 0<z<h/2\\ V_2, & h/2<z<h\end{cases}$

297. $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma_1 u\right)(\rho,\varphi,0) = 0,$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma_2 u\right)(\rho,\varphi,h) = 0,$ $u(R,\varphi,z) = \begin{cases} Az, & 0\le z\le l/2,\\ A(h-z), & h/2\le z\le h\end{cases}$

298. $\frac{\partial u}{\partial n}(\rho,\varphi,0) = A\rho^k;$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)(\rho,\varphi,h) = B\rho^m;$ $\frac{\partial u}{\partial n}(R,\varphi,z) = C+D\cos^2(\pi z/l).$

299. $u(\rho,\varphi,0) = 0;$ $u(\rho,\varphi,h) = 0;$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)(R,\varphi,z) = \begin{cases} (q/k)\cos\varphi, & 0<\varphi<\pi/2;\\ 0, & \pi/2<\varphi<\pi\end{cases}$

В прикладах (300)–(304) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа в циліндричному шарі, радіус якого $\rho \in (R_1, R_2)$, висота h, якщо межові умови мають вигляд:

300. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,\varphi,0) = U_1, \\ u(\rho,\varphi,h) = U_2, \\ u(R_1,\varphi,z) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(R_2,\varphi,z) = 0. \end{array} \right.$$

301. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,\varphi,0) = a_1 + b_1\rho, \\ u(\rho,\varphi,h) = a_2 + b_2\rho, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)(R_1,\varphi,z) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)(R_2,\varphi,z) = 0. \end{array} \right.$$

302. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,\varphi,0) = A(R_1-\rho)(\rho-R_2), \\ u(\rho,\varphi,h) = B, \\ u(R_1,\varphi,z) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(R_2,\varphi,z) = 0. \end{array} \right.$$

303. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,\varphi,0) = A\cos\varphi, \\ u(\rho,\varphi,h) = B\rho\sin\varphi, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)(R_1,\varphi,z) = C\sin\dfrac{\pi z}{h}, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)(R_2,\varphi,z) = 0. \end{array} \right.$$

304. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,\varphi,0) = 0, \\ u(\rho,\varphi,h) = \rho^3, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)(R_1,\varphi,z) = B\cos\varphi + C\sin(\pi z/h), \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)(R_2,\varphi,z) = \sin\varphi. \end{array} \right.$$

В прикладах (305)–(308) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа всередині прямого циліндру висоти h, основою якого є круговий сегмент $\rho \in [0, R)$, $\varphi \in [0, \alpha]$, якщо межові умови мають вигляд:

305. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,0,z) = 0, \\ u(\rho,\alpha,z) = 0, \\ u(\rho,\varphi,0) = a_1 + b_1\rho, \\ u(\rho,\varphi,h) = a_2 + b_2\rho, \\ u(R,\varphi,z) = 0. \end{array} \right.$$

306. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,0,z) = A\rho\cos(\pi z/h), \\ u(\rho,\alpha,z) = B\sin(\pi z/h), \\ u(\rho,\varphi,0) = 0, \\ u(\rho,\varphi,h) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(R,\varphi,z) = Cz\cos\varphi. \end{array} \right.$$

307. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,0,z) = 0, u(\rho,\alpha,z) = 0, \\ u(\rho,\varphi,0) = 0, u(\rho,\varphi,h) = 0, \\ u(R,\varphi,z) = A\sin\dfrac{\pi z}{h}\cos\dfrac{\pi\varphi}{\alpha}. \end{array} \right.$$

308. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,0,z) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(\rho,\pi,z) = 0, \\ u(R,\varphi,z) = 0, \\ u(\rho,\varphi,0) = 0, \\ u(\rho,\varphi,h) = \rho^{2/3}\sin\dfrac{3\varphi}{2}. \end{array} \right.$$

В прикладах (309)–(312) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа всередині сектора прямого кругового тора прямокутного перетину: $\rho \in [R_1, R_2]$, $\varphi \in [0, \alpha]$, $z \in [0, h]$, якщо межові умови мають вигляд:

309. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,0,z) = 0, \\ u(\rho,\alpha,z) = 0, \\ u(\rho,\varphi,0) = A, \\ u(\rho,\varphi,h) = B\rho, \\ u(R_1,\varphi,z) = 0, \\ u(R_2,\varphi,z) = 0. \end{array} \right.$$

310. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,0,z)=0, \\ u(\rho,\pi,z)=0, \\ u(\rho,\varphi,0)=\rho\sin\varphi, \\ u(\rho,\varphi,h)=0, \\ u(R_1,\varphi,z)=0, \\ u(R_2,\varphi,z)=0. \end{array} \right.$$

311. $$\left\| \begin{array}{l} u(R_1,\varphi,z)=z\cos 2\varphi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(R_2,\varphi,z)=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(\rho,0,z)=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(\rho,\pi/2,z)=0, \\ u(\rho,\varphi,0)=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(\rho,\varphi,h)=0. \end{array} \right.$$

312. $$\left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial n}(\rho,0,z)=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(\rho,\pi/3,z)=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(R_1,\varphi,z)=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(R_2,\varphi,z)=0, \\ u(\rho,\varphi,0)=A, \\ u(\rho,\varphi,h)=B. \end{array} \right.$$

В прикладах (313)–(314) розв'язати крайову задачу для рівняння Лапласа в циліндрічній області

$$D=\{R<\rho<\infty, 0\le\varphi\le 2\pi, 0<z<h\},$$

якщо межові умови маєть вигляд:

313. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,\varphi,0)=0, \\ u(\rho,\varphi,h)=0, \\ u(R,\varphi,z)=Az(h-z). \end{array} \right.$$

314. $$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,\varphi,0)=\begin{cases} A_1, & R<\rho<R_1 \\ 0, & R<\rho<\infty \end{cases}, \\ u(\rho,\varphi,h)=\begin{cases} A_2, & R<\rho<R_2 \\ 0, & R<\rho<\infty \end{cases}, \\ u(R,\varphi,z)=Bz(h-z), \\ |u(\rho,\varphi,z)<+\infty, \rho\to+\infty| . \end{array} \right.$$

315. Знайти функцію $u(\rho,\varphi,z)$, де ρ,φ,z — циліндричні координати, що задовольняє рівняння $k\Delta u+Q=0$ в циліндричний області $D=\{0<\rho<R, 0\le\varphi\le 2\pi, 0<z<h\}$. На поверхні цієї області функція повинна задовольняти таки умови:

$$\left\| \begin{array}{l} u(\rho,\phi,0)=0, \\ u(\rho,\phi,h)=0, \\ u(R,\phi,z)=0. \end{array} \right.$$

Тут k, Q означають сталі.

Глава 3

Узагальнені функції

§ 7. Основні означення

Введемо позначення, які є зручними при використанні функцій декількох змінних та диференціальних операторів.

а) $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — точка n-вимірного дійсного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

б) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — мультиіндекс α (при цьому $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$).

в) Якщо α — мультиіндекс, то ми покладемо

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$
$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

г) Покладемо $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$; $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, тобто $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

д) Простором *основних функцій* $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ будемо вважати простір усіх фінітних нескінченно диференційовних в $\mathbb{R}^n$ функцій;

е) *Носієм* неперервної функції $\phi(x)$ (позначатимемо supp ϕ) називають множину усіх точок x, для яких $\phi(x) \neq 0$:

$$\operatorname{supp} \phi = \overline{\{x \ : \ x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) \neq 0\}}. \tag{7.1}$$

є) *Лінійний диференціальний оператор* порядку m — це оператор вигляду:

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \partial^\alpha. \tag{7.2}$$

ж) *Символом оператора* (або *повним символом* оператора m-го порядку L називається функція:

$$a(x, k) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) k^\alpha;$$

з) *Головним символом оператора* оператора m-го порядку L називається функція:

$$a_m(x, k) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) k^\alpha.$$

§ 8. Узагальнені функції та їх властивості

§ 8.1. Основні означення і приклади узагальнених функцій

Узагальненою функцією називають будь–який лінійний неперервний функціонал на просторі основних (тобто усіх фінітних нескінченно диференційовних) функцій $\mathcal{D}$. Розшифруємо означення узагальненої функції.

а) Узагальнена функція f є функціоналом на $\mathcal{D}$, тобто кожній основній функції $\phi \in \mathcal{D}$ ставиться у відповідність комплексне число:

$$f \ : \ \phi \to (f, \phi), \phi \in \mathcal{D}, (f, \phi) \in \mathbb{C}.$$

б) Узагальнена функція f є лінійним функціоналом на $\mathcal{D}$, тобто

$$\left(f, \sum_k C_k \phi_k\right) = \sum_k C_k (f, \phi_k).$$

в) Узагальнена функція f є неперервним функціоналом на $\mathcal{D}$, тобто

$$\{\phi_k\} \underset{k\to\infty}{\to} \phi, \quad \Longrightarrow \quad (f, \phi_k) \underset{k\to\infty}{\to} (f, \phi).$$

Наведемо декілька прикладів узагальнених функцій.

Приклад 8.1. $\lhd$ Простішим прикладом узагальнених функцій є «класичні», так звані *регулярні узагальнені функції* — це функціонали, які породжено локально–інтегровними у $\mathbb{R}^n$ функціями $f(x)$:

$$(f, \phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x, \qquad \phi \in \mathcal{D}. \tag{8.1}$$

Важливим прикладом регулярних функцій в теорії узагальнених функцій є функція Хевісайда

$$\begin{gathered} \theta \ : \ (\theta, \phi) = \int\limits_0^\infty \phi(x)\mathrm{d}x \\ \text{тобто} \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}. \end{gathered} \tag{8.2}$$

$\rhd$

Приклад 8.2. $\lhd$ З функцією Хевісайда пов'язана наступні функції, які досить часто зустрічаються в теорії узагальнених функцій:

$$\begin{gathered} x_+ = x\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}, \\ x_- = -x\theta(-x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}. \end{gathered} \tag{8.3}$$

Зазначимо, що $x = x_+ - x_-$, $|x| = x_+ + x_- = x\mathrm{sign}\ x$. $\rhd$

Приклад 8.3. $\triangleleft$ Простішим прикладом сингулярної узагальненої функції є *δ–функція Дірака*:

$$(\delta, \phi) = \phi(0), \qquad \phi \in \mathcal{D}. \tag{8.4}$$

$\triangleright$

Приклад 8.4. $\triangleleft$ Функція $f(x) = 1/x$ не є локально-інтегровною, тому що не інтегровна в околі початка координат. Для того, щоб здобути локально-інтегровну функцію, слід провести регуляризацію. Для цього введемо узагальнену функцію $\mathcal{P}(1/x)$:

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \phi\right) &= \fint_{\mathbb{R}^1} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x \equiv \mathrm{Vp} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\right], \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1),\end{aligned} \tag{8.5}$$

яка називається *регуляризацією* функції $1/x$; інтеграл, що визначає цю функцію є головною частиною за Коші розбіжного інтеграла від $f(x)$. $\triangleright$

Приклад 8.5. $\triangleleft$ Інша можливість регуляризації пов'язана з *псевдофункціями*. Розглянемо функцію $f(x) = 1/x^2$. Вона не є локально-інтегровною, тому що не інтегровна в околі початку координат. Введемо узагальнену функцію $\mathrm{Pf}\ (1/x^2)$, яка називається псевдофункцією $1/x^2$:

$$\left(\mathrm{Pf}\ \frac{1}{x^2}, \phi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 2\frac{\phi(0)}{\varepsilon}\right]. \tag{8.6}$$

Аналогічним чином можна визначити узагальнені функції $\mathrm{Pf}\ (\theta(x)/x)$ і $\mathrm{Pf}\ (\theta(-x)/x)$:

$$\left(\mathrm{Pf}\ \frac{\theta(x)}{x}, \phi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x + \phi(0)\ln\varepsilon\right], \tag{8.7a}$$

$$\left(\mathrm{Pf}\ \frac{\theta(-x)}{x}, \phi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x - \phi(0)\ln\varepsilon\right]. \tag{8.7b}$$

$\triangleright$

Приклад 8.6. $\triangleleft$ Довести *формулу Сохоцького*:

$$\frac{1}{x+i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{8.8}$$

$\triangleright$

Розв'язання. ◀ Обчислимо інтеграл

$$I = \left(\frac{1}{x+i0}, \phi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x+i\varepsilon}\mathrm{dx}.$$

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\phi(x)\mathrm{dx}\\
&= \phi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{dx} + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\left[\phi(x)-\phi(0)\right]\mathrm{dx}\\
&= \phi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{dx} - i\phi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\mathrm{dx}\\
&= -i\pi\phi(0) + \fint_{\mathbb{R}}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x = (-i\pi\delta(x),\phi(x)) + \left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\phi(x)\right),
\end{aligned}
$$

звідки отримаємо (8.8). ▶

316. Довести наступну формулу Сохоцького:

$$\frac{1}{x-i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$$

317. Довести наступну формулу:

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} = \operatorname{Pf}\frac{\theta(x)}{x} + \operatorname{Pf}\frac{\theta(-x)}{x}.$$

318. Нехай $\mathcal{F}(1/|x|)$ — узагальнена функція, що визначається наступним співвідношенням:

$$\left(\mathcal{F}\frac{1}{|x|},\phi(x)\right) = \int\limits_{|x|>1}\frac{\phi(x)}{|x|}\mathrm{d}x + \int\limits_{|x|<1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|}\mathrm{d}x.$$

Довести наступну формулу:

$$\mathcal{F}\frac{1}{|x|} = \operatorname{Pf}\frac{\theta(x)}{x} - \operatorname{Pf}\frac{\theta(-x)}{x}.$$

§ 8.2. Операції з узагальненими функціями: множення і заміна змінних

Добуток узагальненої функції $f\in\mathcal{D}'$ та нескінченно диференційовної $a\in\mathcal{C}^\infty$ визначається наступним чином:

$$(af,\phi) = (f,a\phi)\,. \tag{8.9}$$

Приклад 8.7. ◁ Розглянемо добуток функцій $a(x)\delta(x)$.

$$(a\delta,\phi) = (\delta,a\phi) = a(0)\phi(0) = (a(0)\delta,\phi)\,,$$

звідки

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x).$$

▷

Приклад 8.8. $\triangleleft$

$$\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x},\phi\right)=\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},x\phi\right)=\fint\frac{x\phi(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\mathrm{d}x=(1,\phi)\,,$$

звідки $\quad x\mathcal{P}\frac{1}{x}=1.$

$\triangleright$

Заміна змінних в узагальненій функції визначається наступним чином:

$$(f(y(x)),\phi(x))=\left(\frac{f(y)}{\left|\det\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right|},\phi(x(y))\right). \tag{8.10}$$

Приклад 8.9. $\triangleleft$ Нехай $y=x+a$ — зсув, тоді $(f(x+a),\phi(x))=(f(y),\phi(y-a))$. $\triangleright$

Приклад 8.10. $\triangleleft$ Нехай $y=Ax$, де A — матриця, тоді $(f(Ax),\phi(x))=\left(\frac{f(y)}{|A|},\phi(A^{-1}y)\right)$. $\triangleright$

Приклад 8.11. $\triangleleft$ Дельта-функція від складного аргументу, $\delta(y(x))$:

$$\begin{aligned}(\delta(y(x)),\phi(x))&=\left(\frac{\delta(y)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|},\phi(x(y))\right)=\left(\delta(y),\frac{\phi(x(y))}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\right)\\&=\sum_{x_k:y(x_k)=0}\frac{\phi(x_k)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_k}}=\sum_{x_k:y(x_k)=0}\frac{(\delta(x-x_k),\phi(x))}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_k}},\end{aligned}$$

звідки

$$\delta(y(x))=\sum_{x_k:y(x_k)=0}\frac{\delta(x-x_k)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_k}}. \tag{8.11}$$

Зокрема, якщо $y(x)=x^2-a^2$, $x_\pm=\pm a$ та $\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_\pm}=2a$, звідки

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}\left(\delta(x+a)+\delta(x-a)\right).$$

$\triangleright$

В прикладах (319)–(326) спростити вираз:

319. $x\delta(x)$.

320. $\left(x^2+2x+3\right)\delta(x)$.

321. $\delta(\sin x)$.

322. $\delta(x^3-a^3)$, де $a\in\mathbb{R}$.

323. $\delta(x^n-1)$, де $n\in\mathbb{N}$.

324. $\delta(\sin(\pi x))$.

325. $\delta(\cos x)$.

326. $x\delta(\sin x)$.

327. Розглянути узагальнену функцію $\mathcal{P}(1/x^2)$:

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \phi(x)\right) = \fint_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Довести, що $x^2\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2} = 1$.

В прикладах (328)–(333) довести співвідношення:

328. $x^m\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = x^{m-1}$.

329. $x^n\delta(x) = 0$, де $n \in \mathbb{N}$.

330. $\delta(-x) = \delta(x)$.

331. $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$.

332. $\delta(x^3-7x+6) = \frac{1}{4}\delta(x-1)+\frac{1}{5}\delta(x-2) + \frac{1}{20}\delta(x+3)$.

333. $\delta(\alpha x+\beta) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x+\beta/\alpha)$.

§ 8.3. Операції з узагальненими функціями: диференціювання

Похідна від узагальненої функції:

$$(\partial^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|}\left(f, \partial^\alpha \phi\right). \tag{8.12}$$

Приклад 8.12. ◁ δ'-функція:

$$\delta' \ : \ (\delta', \phi) = -\left(\delta, \phi'\right) = -\phi'(0).$$

▷

Приклад 8.13. ◁ Похідна функції Хевісайда:

$$(\theta', \phi) = -\left(\theta, \phi'\right) = -\int\limits_0^\infty \phi'(x)\mathrm{d}x = \phi(0) - \phi(\infty) = \phi(0) = (\delta, \phi)\,,$$

$$\text{звідки} \quad \theta' = \delta.$$

▷

В прикладах (334)–(340) обчислити усі похідні функції.

334. $y = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

335. $y = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x+1, & 0 \le x \le 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$

336. $y = \begin{cases} |\sin x|, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & |x| \ge \pi. \end{cases}$

337. $y(x) = (x-2)^k\delta^{(p)}(x) + x\theta^{(q)}$.

338. $y(x) = x^k\theta(x)$.

339. $y = \theta(x)e^{ax}$

340. $f(x)$ — 2π-періодична функція, причому $f(x) = 1/2 - x/2\pi$, де $x \in (0, 2\pi]$.

В прикладах (341)–(344) спростити вираз.

341. $u(x) = x\delta'(x)$.
342. $u(x) = x\delta''(x)$.
343. $u(x) = x^2\delta'(x)$.
344. $u(x) = x^2\delta''(x)$.

В прикладах (345)–(364) довести співвідношення.

345. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

346. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = -\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$.

347. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{x \pm i0} = \mp\delta'(x) - \mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$.

348. $a(x)\delta'(x) = -a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x)$, де $a(x) \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^1\right)$.

349. $(\theta(x)\cos x)' = \delta(x) - \theta(x)\sin x$.

350. $(\theta(x)\sin x)' = \theta(x)\cos x$.

351. $x\delta^{(n)}(x) = -n\delta(x)^{(n-1)}$, де $n \in \mathbb{N}$.

352. $(x_+)' = \theta(x)$.

353. $(x_-)' = -\theta(-x)$.

354. $(x_+^p)' = px_+^{p-1}$, де $p \notin \mathbb{Z}_-$.

355. $(x_-^p)' = -px_-^{p-1}$, де $p \notin \mathbb{Z}_-$.

356. $x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\delta(x)$, де $n \in \mathbb{N}$.

357. $|x|' = 2\theta(x) - 1 = \operatorname{sign} x$.

358. $(\operatorname{sign} x)' = 2\delta(x)$.

359. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+i0) = \dfrac{1}{x+i0}$.

360. $(x+i0)^p = x_+^p + e^{i\pi p}x_-^p$, де $p \notin \mathbb{Z}_-$.

361. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+i0)^p = p\,(x+i0)^{p-1}$, де $p \neq 0$.

362. $(x-i0)^p = x_+^p + e^{-i\pi p}x_-^p$, де $p \notin \mathbb{Z}_-$.

363. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-i0)^p = p\,(x-i0)^{p-1}$, де $p \neq 0$.

364. $\delta^{(n)}[y(x)] = \sum\limits_{x_k : y(x_k)=0} \frac{1}{|y'(x_k)|} \cdot \cdot \left(\frac{1}{y'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \delta(x - x_k)$.

§ 8.4. Операції з узагальненими функціями: прямий добуток, згортка і перетворення Фур'є

Прямий добуток двох узагальнених функцій:

$$(f \otimes g, \phi) = \Big(f, (g, \phi)\Big). \tag{8.13}$$

Згортка двох узагальнених функцій:

$$(f \star g, \phi) = (f(x) \otimes g(y), \phi(x+y))\,. \tag{8.14}$$

Приклад 8.14. ◁ Функція $\delta(x)$ виконує роль одиниці при згортці:

$$\begin{aligned}(\delta(x) \star f(x), \phi(x)) &= (\delta(x) \otimes f(y), \phi(x+y)) = (f(y), (\delta(x), \phi(x+y))) \\ &= (f(y), \phi(y)) \implies \delta(x) \star f(x) = f(x).\end{aligned} \tag{8.15}$$

▷

В прикладах (365)–(373) довести співвідношення.

365. $\delta(x-a) \star f(x) = f(x-a)$.

366. $\delta(x-a) \star \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$.

367. $\theta(x) \star \theta(x) = x_+$.

368. $\theta(x-a) \star \theta(x-b) = (x-a-b)_+$.

369. $\theta(x) \star x_+ = \dfrac{x_+^2}{2}$.

370. $\theta(x) \star x_+^n = \dfrac{x_+^{n+1}}{n+1}$.

371. $\theta(x)\sin x \star \theta(x)\cos x$
$= \dfrac{x_+ \sin x}{2}$.

372. $\theta(x)\sin x \star \theta(x)\sin x$
$= \dfrac{\theta(x)\sin x - x_+\cos x}{2}$.

373. $\theta(x)\cos x \star \theta(x)\cos x$
$= \dfrac{\theta(x)\sin x + x_+\cos x}{2}$.

Нехай $\phi(x) \in \mathcal{D}$. Тоді можна ввести операцію *перетворення Фур'є*:

$$F[\phi](k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{i(k,x)} \mathrm{d}x, \tag{8.16}$$

де $(k,x) = \sum_{i=1}^n x_i k_i$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Зворотнє перетворення Фур'є:

$$\phi(k) = \int \mathbb{R}^n F[\phi](k) e^{-i(x,k)} \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^n}. \tag{8.17}$$

Перетворення Фур'є узагальненої функції:

$$\left(F[f], \phi\right) \triangleq \left(f, F[\phi]\right). \tag{8.18}$$

Приклад 8.15. $\triangleleft$ Покажемо, що

$$F\left[\delta(x-x_0)\right] = e^{i(k,x_0)}. \tag{8.19}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}(F[\delta(x-x_0)], \phi) &= (\delta(x-x_0), F[\phi]) = F[\phi](x_0)\\ &= \int \phi(k) e^{i(k,x_0)} \mathrm{d}k = \left(e^{i(k,x_0)}, \phi\right).\end{aligned}$$

Зокрема, поклавши у (8.19) $x_0 = 0$, матиме

$$F[\delta] = 1, \tag{8.20}$$

звідки

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

тобто

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(k). \tag{8.21}$$

$\triangleright$

Приклад 8.16. $\lhd$ Знайдемо $F\left[\theta(x)e^{-ax}\right]$.

$$\left(F\left[\theta(x)e^{-ax}\right], \phi\right) = \left(\theta(x)e^{-ax}, F[\phi]\right) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}x e^{-ax} \int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k \phi(k) e^{ikx}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^\infty dk \phi(k) I(k) = (I, \phi),$$

$$I(k) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}x \exp\left[ikx - ax\right] = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}x \exp\left[i(k+ia)x\right] = \frac{i}{k+ia}.$$

$$\text{звідки} \quad F\left[\theta(x)e^{-ax}\right] = \frac{i}{k+ia}.$$

Зокрема, якщо $a \to +0$, матимемо:

$$F\left[\theta(x)\right] = \lim_{a\to+0} \frac{i}{k+ia} = \frac{i}{k+i0} = i\mathcal{P}\frac{1}{k} + \pi\delta(k).$$

$\rhd$

Основні властивості перетворення Фур'є узагальнених функцій:

а) Диференціювання перетворення Фур'є: $\partial^\alpha F[f] = F\left[(ix)^\alpha f\right]$.

б) Перетворення Фур'є похідной: $F\left[\partial^\alpha f\right] = (-ik)^\alpha F\left[f\right](x)$.

в) Перетворення Фур'є зсуву: $F\left[f(x-x_0)\right] = e^{i(x_0,k)} F[f]$.

г) Зсув перетворення Фур'є: $F[f](k+k_0) = F\left[e^{i(k_0,x)} f\right](k)$.

д) Перетворення Фур'є згортки: $F[f \star g] = F[g]F[f]$.

В прикладах (374)–(393) довести співвідношення.

374. $F\left[\theta(-x)\right] = \pi\delta(k) - i\mathcal{P}\frac{1}{k} = -\frac{i}{k-i0}$.

375. $F\left[\text{sign } x\right] = 2i\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

376. $F\left[\delta'(x)\right] = -ik$.

377. $F\left[\delta^{(n)}(x)\right] = (-ik)^n$.

378. $F\left[\delta^{(2n)}(x)\right] = (-1)^n k^{2n}$.

379. $F\left[\delta^{(2n+1)}(x)\right] = (-1)^{n+1} i k^{2n+1}$.

380. $F\left[\theta(a-|x|)\right] = 2\frac{\sin ak}{k}$, $a > 0$.

381. $F\left[x_+\right] = -\frac{1}{(k+i0)^2}$.

382. $F\left[x_+^n\right] = -\frac{n! i^{n+1}}{(k+i0)^{n+1}}$, де $n \in \mathbb{N}$.

383. $F\left[x\right] = -2i\pi\delta'(k)$.

384. $F\left[|x|\right] = -2\mathcal{P}\frac{1}{k^2}$.

385. $F\left[\mathcal{P}(1/x)\right] = i\pi \text{sign } k$.

386. $F\left[x^n\right] = 2(-i)^n \pi \delta^{(n)}(k)$.

387. $F\left[x^n \delta^{(m)}(x)\right] = (-i)^{n+m} \cdot \frac{m!}{(m-n)!} k^{m-n}$.

388. $F\left[\sin ax\right] = i\pi\left[\delta(k-a) - \delta(k+a)\right]$.
389. $F\left[\cos ax\right] = \pi\left[\delta(k-a) + \delta(k+a)\right]$.
390. $F\left[\operatorname{sh} ax\right] = \pi\left[\delta(k-ia) - \delta(k+ia)\right]$.
391. $F\left[\operatorname{ch} ax\right] = \pi\left[\delta(k-ia) + \delta(k+ia)\right]$.
392. $F[x^2 \sin 2x](\xi) = i\pi[\delta''(\xi+2) - \delta''(\xi-2)]$,
393. $F\left[e^{-a|x|}\right] = \dfrac{2a}{a^2+k^2}$.

В прикладах (394)–(396) обчислити вказаний Фур'є образ.

394. $F\left[(2+x)^3\delta(x)\right]$.
395. $F\left[y(x)\right]$, $F\left[y'(x)\right]$, $F\left[y''(x)\right]$, де $y(x) = \theta(x^2+2x-15)$.
396. $F[|x|^k\theta(a-|x|)]$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Приклад 8.17. $\lhd$ Знайти всі розв'язки алгебраїчного рівняння

$$x^3 u(x) = 0 \tag{8.22}$$

в класі узагальнених функцій. $\rhd$

Розв'язання. ◀ Обчислимо Фур'є образ (8.22), $F\left[x^3 u(x)\right] = 0$. За властивістю диференціювання Фур'є перетворення матимемо:

$$F\left[(ix)^3 u(x)\right] = \partial^3 F[u] = 0 \implies F[u](k) = c_1 + c_2 k + c_3 k^2/2$$

В прикладі 377 доводиться, що $k^n = i^n F\left[\delta^{(n)}(x)\right]$. Перепозначаючи сталі остаточно матимемо:

$$u(x) = A\delta(x) + B\delta'(x) + C\delta''(x).$$

▶

В прикладах (397)–(399) методом перетворення Фур'є знайти всі розв'язки рівнянь в класі узагальнених функцій.

397. $x^n u(x) = 0$.
398. $x^n \dfrac{\mathrm{d}u^n(x)}{\mathrm{d}x^n} = 0$.
399. $x^n \dfrac{\mathrm{d}u^m(x)}{\mathrm{d}x^m} = 0$, де $n > m$.

Глава 4

Фундаментальні розв'язки крайових задач

§ 9. Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального оператора

Узагальненим розв'язком рівняння

$$Lu = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha u = f(x), \qquad a_\alpha = \mathrm{const} \tag{9.1}$$

в області G називають будь–яку узагальнену функцію $u \in \mathcal{D}'$, що задовольняє це рівняння в G в узагальненому сенсі, тобто для будь–якої $\phi \in \mathcal{D}$,

$$(Lu, \phi) = (f, \phi)\,.$$

Фундаментальним розв'язком (*функцією впливу*) оператора L називають узагальнену функцію $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$, що задовольняє у $\mathbb{R}^n$ рівняння

$$L\mathcal{E} = \delta(x). \tag{9.2}$$

Для будь-якого лінійного диференціального оператора L існує фундаментальний розв'язок повільного зростання і цей розв'язок задовільняє алгебраїчне рівняння:

$$L(-ik)F[\mathcal{E}] = 1$$

Нехай $f \in \mathcal{D}'$ така, що $\mathcal{E} \star f$ існує в $\mathcal{D}'$. Тоді розв'язок рівняння (9.1) єдиний та має вигляд

$$u = \mathcal{E} \star f. \tag{9.3}$$

Розглянемо лінійний диференціальний оператор із звичайними похідними

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}. \tag{9.4}$$

Фундаментальний розв'язок оператора (9.4) має вигляд:

$$\mathcal{E} = \theta(x)X(x), \tag{9.5}$$

де функція $X(x)$ є розв'язком однорідного диференціального рівняння $LX = 0$ з початковими умовами:

$$X(0) = X'(0) = \cdots = X^{(n-2)}(0) = 0, \quad X^{(n-1)}(0) = 1.$$

Приклад 9.1. ◁ Знайти фундаментальний розв'язок $\mathcal{E}(x)$ оператора

$$L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + p, \qquad p = \text{const}.$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння:

$$u'(x) + pu(x) = q(x).$$

▷

Розв'язання. ◀ Фундаментальний розв'язок $\mathcal{E} = \theta(x)X(x)$, де $X(x)$ є розв'язком задачі

$$X'(x) + pX = 0, \qquad X(0) = 1.$$

Очевидно, що розв'язком цієї задачі є функція $X(x) = e^{-px}$, тому

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{-px}.$$

Тоді розв'язком неоднорідного рівняння $Lu = q$ є згортка

$$u(x) = \mathcal{E} \star q = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x-\xi)q(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-\xi)e^{-p(x-\xi)}q(\xi)\mathrm{d}\xi = e^{-px}\int_{-\infty}^{x} e^{p\xi}q(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Слід зауважити, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння — сума загального розв'язку однорідного та знайдено розв'язку неоднорідного. Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$u(x) = e^{-px}\left(C + \int_{-\infty}^{x} e^{p\xi}q(\xi)\mathrm{d}\xi\right),$$

де C — довільна стала. ▶

В прикладах (400)–(426) знайти фундаментальний розв'язок $\mathcal{E}$ оператора L. За допомогою $\mathcal{E}$ розв'язати рівняння $Lu(x) = f(x)$.

400. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{dx^2} - 4\dfrac{\mathrm{d}}{dx} + 5$, $f(x) = \theta(x)\,(1+x)$.

401. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1$, $f(x) = \theta(x)\,(x - e^x)$.

402. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{dx^2} + 3\dfrac{\mathrm{d}}{dx} + 1$, $f(x) = \theta(x)\,(1 + \sin x)$.

403. $L = \dfrac{\mathrm{d}^3}{dx^3} - 3\dfrac{\mathrm{d}^2}{dx^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}}{dx}$, $f(x) = \theta(x)\left(e^{2x} - \cos x\right)$.

404. $L = \dfrac{\mathrm{d}^3}{dx^3} - a^3$, $f(x) = 2\theta(x)\,\mathrm{tg}\,x$.

405. $L = \dfrac{\mathrm{d}^4}{dx^4} - a^4$, $f(x) =$

$\theta(x)\left(2\sin x + x^7\right)$.

406. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{dx^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1$, $f(x) = \theta(x)\left(1 - x + 2\ln x\right)$.

407. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{dx^2} - a^2$, $f(x) = \theta(x)\left(e^{2x} - x^2\right)$.

408. $L = \left(\dfrac{\mathrm{d}}{dx} \mp a\right)^m$, $f(x) = \theta(x)\left(x^3 - \operatorname{tg} x\right)$.

409. $L = \dfrac{\mathrm{d}^3}{dx^3} + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $f(x) = 3x^2\theta(x)$.

410. $L = \dfrac{\mathrm{d}^4}{dx^4} - 40\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 441$, $f(x) = \exp(3x-2)\theta(x)$.

411. $L = \dfrac{\mathrm{d}^4}{dx^4} - 9\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 400$, $f(x) = \theta(x)\left(1 + 3x\exp 3x\right)$.

412. $L = \dfrac{\mathrm{d}^3}{dx^3} - 3n\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - (3n^2-1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - n(n^2-1)$, $f(x) = \theta(x)\left(x - 2\sin x\right)$.

413. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - (1+i4)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - (5+i)$, $f(x) = \sin(x+2)\theta(x)$.

414. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - (4+i11)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + (-29 + i31)$, $f(x) = (x-1)^2\sin x\theta(x)$.

415. $L = \dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} - 21\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 20$, $f(x) = \theta(x)\left((x+1)^3 - x\right)$.

416. $L = \dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + 10\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 251$, $f(x) = \theta(x)\left(\cos(x+1) + x^3\right)$.

417. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 1.5\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2.5$, $f(x) = x\ln(x+2x^3)\theta(x)$.

418. $L = \dfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} - 5\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} - 14\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, $f(x) = x\exp(x+2)\theta(x)$.

419. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 6\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 91$, $f(x) = x\sin x\theta(x)$.

420. $L = \dfrac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}x^6} - 7\dfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} - 144\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, $f(x) = \theta(x)\left(1 + x\right)$.

421. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2$, $f(x) = \theta(x)\left(1 + e^x\right)$.

422. $L = \dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} - 4\dfrac{\mathrm{d}^2}{dx^2} - 221\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $f(x) = 2\cos x\theta(x)$.

423. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}}{dx} + 1$, $f(x) = \delta'(x)$.

424. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 3\dfrac{\mathrm{d}}{dx} + 2$, $f(x) = \theta(x) + \delta(x)$.

425. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 1$, $f(x) = x\delta'(x)$.

426. $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 4$, $f(x) = x^2\delta''(x)$.

Методом фундаментальних розв'язків розв'язати наступні задачі Коші:

427. $\left\|\begin{array}{l} u'' - u = xe^x \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0. \end{array}\right.$

428. $\left\|\begin{array}{l} u'' + 2u' + u = e^{-x} \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{array}\right.$

429. Довести, що фундаментальними розв'язками оператора $L = \Delta_2 + k^2$ в $\mathbb{R}^2$ є функції

$$\mathcal{E}_{1,2}(x) = \begin{cases} -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x|), \\ \frac{i}{4}H_0^{(2)}(k|x|). \end{cases}$$

За допомогою $\mathcal{E}_{1,2}(x)$ розв'язати рівняння

$$(\Delta_2 + k^2)y = \theta(|x| - 3)\theta(8 - |x|).$$

430. Довести, що фундаментальними розв'язками оператора $L = \Delta_3 + k^2$ в $\mathbb{R}^3$ є функції

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{\pm\imath k|x|}}{4\pi|x|}.$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння

$$(\Delta_3 + k^2)y = \theta(2 - |x|).$$

431. Довести, що фундаментальними розв'язками оператора $L = \Delta_2 - k^2$ в $\mathbb{R}^2$ є функції

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(ik|x|).$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння

$$(\Delta_2 - k^2)y = \delta(|x| - 3).$$

432. Довести, що фундаментальними розв'язками оператора $L = \Delta_3 - k^2$ в $\mathbb{R}^3$ є функції

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}.$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння

$$(\Delta_3 - k^2)y = |x|\theta(2 - |x|).$$

433. Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x} - c \quad \text{де} \quad \text{a,b,c - const},$$

має вид

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(ct - \frac{(x+bt)^2}{4a^2 t}\right).$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x} - c\right)y = \theta(|x| - 1)\theta(2 - |x|).$$

434. Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_d\right)^k \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^d$$

має вид

$$\mathcal{E}(x) = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^d}\exp\left(\frac{-|x|^2}{4a^2 t}\right).$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_d\right)^k y = 3e^{|x|}\theta(2 - |x|).$$

435. Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

має вид

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{\pi z}.$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{z - a}{z - \overline{z}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

436. Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \lambda\right)^k$$

має вид

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\overline{z}^{k-1}\exp(\lambda\overline{z})}{\Gamma(k)\pi z}.$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \lambda\right)^k u = \prod_{j=1}^{N}(z - a_j), \quad z \in \mathbb{C}.$$

437. Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \frac{\partial^{k+m}}{\partial \overline{z}^k \partial z^m}$$

має вид

$$\mathcal{E}(x) = \frac{2\overline{z}^{k-1}z^{m-1}}{\Gamma(k)\Gamma(m)\pi}\ln|z|, \quad k, m = 1, 2, \ldots.$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \lambda\right)^k u = \prod_{j=1}^{N}(z - a_j)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

438. Довести, що якщо фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A(D_x) \quad \text{є} \quad \mathcal{E}_0(x, t),$$

то фундаментальний розв'язок оператора

$$L=\left(\frac{\partial}{\partial t}+A(D_x)\right)^k \quad \text{є} \quad \mathcal{E}(x)=\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}\mathcal{E}_0(x,t).$$

За допомогою $\mathcal{E}(x)$ розв'язати рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+A(D_x)\right)^k u=\theta(1-|x|)e^{-\alpha t}, \quad \alpha>0.$$

§ 10. Фундаментальний розв'язок і задача Коші для рівняння дифузії

рівняння дифузії має вигляд

$$\begin{aligned} Lu &= f(x,t), \qquad x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}, && (10.1a)\\ L &\triangleq \partial_t-a^2\Delta_n, && (10.1b)\end{aligned}$$

де Δ_n — n-вимірний оператор Лапласа, L має назву *оператора дифузії.*

Диференціальний оператор дифузії має фундаментальний розв'язок

$$\mathcal{E}_n(x,t)=\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\dfrac{|x|^2}{4a^2t}}. \tag{10.2}$$

Задача Коші для рівняння дифузії ставиться наступним чином. Потрібно знайти розв'язок рівняння дифузії (10.1a) при $t>0$, що задовольняє початкову умову

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n. \tag{10.3}$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії (10.1a), (10.3) збігається з розв'язком рівняння

$$\begin{aligned}\left(\partial_t-a^2\Delta_n\right)u(x,t)=F(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}\\ F(x,t)=\theta(t)f(x,t)+\delta(t)u_0(x),\end{aligned} \tag{10.4}$$

що має вигляд

$$u(x,t)=\left(\mathcal{E}_n*F\right)(x,t), \tag{10.5}$$

Зокрема, розв'язок класичної задачі Коші для рівняння дифузії в n-вимірному просторі визначається формулою Пуассона:

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\mathrm{d}s\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\mathcal{E}_n(x-y,t-s)f(y,s)+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\mathcal{E}_n(x-y,t)u_0(y). \tag{10.6}$$

В прикладах (439)–(466) знайти розв'язок наступних задач Коші для одновимірного рівняння дифузії:

439. $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x$, $u(x,0) = \cos x$.

440. $u_t = u_{xx} + xe^x$, $u(x,0) = \theta(x)x^2$.

441. $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x$, $u(x,0) = \cos x$.

442. $u_t = 2u_{xx} + t\cos x$, $u(x,0) = 0$.

443. $u_t = u_{xx} + e^t \sin x$, $u(x,0) = \sin x$.

444. $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin x \exp(-x^2)$.

445. $4u_t = u_{xx} + \sin t$, $u(x,0) = \exp(-x^2)$.

446. $u_t = u_{xx} + \sin t \sin x$, $u(x,0) = 1$.

447. $u_t = u_{xx} + e^x$, $u(x,0) = \theta(x)x$.

448. $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = e^{2x-x^2}$.

449. $u_t = u_{xx} + x^2$, $u(x,0) = x^2$.

450. $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x^2 + x^4$.

451. $u_t = u_{xx} + xe^x$, $u(x,0) = \theta(x)x^2$.

452. $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x$, $u(x,0) = \cos x$.

453. $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \delta'(x_0 - x)$.

454. $u_t = u_{xx} + \theta(t)\delta(x)$, $u(x,0) = \delta(x - x_0)$.

455. $u_t = u_{xx} + e^t \sin x$, $u(x,0) = \sin x$.

456. $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin x \exp(-x^2)$.

457. $4u_t = u_{xx} + \sin t$, $u(x,0) = \exp(-x^2)$.

458. $u_t = u_{xx} + \sin x$, $u(x,0) = \sin x$.

459. $u_t = u_{xx} + e^x$, $u(x,0) = \theta(x)x$.

460. $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = e^{2x-x^2}$.

461. $u_t = u_{xx} + x^2$, $u(x,0) = x^2$.

462. $u_t = 9u_{xx} + \sin x$, $u(x,0) = 1$.

463. $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x^2 + x^4$.

464. $u_t = u_{xx} + e^x$, $u(x,0) = \theta(x)x$.

465. $u_t = 16u_{xx} + t^2 \sin x$, $u(x,0) = x^3\theta(5 - x)$.

466. $u_t = u_{xx} + e^{\alpha t}\delta(x)$, $u(x,0) = \delta(1 - |x|)$.

В прикладах (467)–(482) знайти розв'язок наступних задач Коші для багатовимірного рівняння дифузії:

467. $u_t = \Delta u + 2x_1x_2x_3$, $u(x_1,x_2,x_3,0) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$.

468. $u_t = \Delta u + \sin t \cos x_1$, $u(x_1,x_2,x_3,0) = e^{-x_2}\cos x_3$.

469. $u_t = \Delta u + e^{-3t}\cos x_3$, $u(x_1,x_2,x_3,0) = x_2 \sin x_3$.

470. $u_t = 2\Delta u + t\cos x_1$, $u(x_1,x_2,x_3,0) = \cos x_2 \cos x_3$.

471. $u_t = a^2\Delta u$, $u(x_1,x_2,x_3,0) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$.

472. $u_t = \Delta u + 2x_1x_2x_3$, $u(x_1,x_2,x_3,0) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$.

473. $u_t = \Delta u + 6x_1x_2t$, $u(x_1,x_2,0) = x_1^2 - x_2^2$.

474. $u_t = \Delta u + \sin t \sin x_1 \sin x_2$, $u(x_1,x_2,0) = 1$.

475. $u_t = \Delta u + 2x_2$, $u(x_1,x_2,0) = x_1$.

476. $u_t = a^2\Delta u$, $u(x_1,x_2,x_3,0) = \cos|x|$.

477. $\left\| \begin{array}{l} u_t = 9\Delta u + e^{-4t} x_1^2 x_3^2 \sin x_2, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = \theta(1 - |x_1|)\cdot \\ \cdot\theta(1 - |x_2|)\theta(1 - |x_3|). \end{array} \right.$

478. $\left\| \begin{array}{l} u_t = 25\Delta u + \theta(4 - t)\sin x_1\cdot \\ \cdot \sin x_2 \sin x_3, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = 1 - 3(x_1^2 + \\ + x_2^2 + x_3^2). \end{array} \right.$

479. $\left\| \begin{array}{l} u_t = a^2\Delta u + |x|^2 e^t, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = 0. \end{array} \right.$

480. $\left\| \begin{array}{l} u_t = 4\Delta u + e^{-|x|^2} \frac{t}{1+t^2}, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = 1. \end{array} \right.$

481. $\left\| \begin{array}{l} u_t = \Delta u + e^{-2t} \frac{x_1}{1+x_1^2} \frac{x_2}{1+x_2^2} \frac{x_3}{1+x_3^2}, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = x_1 x_2 \delta(4 - x_3^2). \end{array} \right.$

482. $\left\| \begin{array}{l} u_t = \Delta u + \cos|x|^2 e^{-t}, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = 0. \end{array} \right.$

§ 11. Фундаментальний розв'язок і задача Коші для хвильового рівняння

n–вимірне хвильове рівняння має вигляд

$$\Box_n u(x,t) = f(x,t), \quad \Box_n \triangleq \partial_t^2 - a^2\Delta_n. \tag{11.1}$$

Фундаментальний розв'язок хвильового оператора $\Box_n$ має вигляд

$$\mathcal{E}_n(x,t) = \theta(t) F_k^{-1}\left[\frac{\sin a|k|t}{a|k|}\right]. \tag{11.2}$$

Для 1, 2 і 3–вимірного хвильового рівняння фундаментальний розв'язок має вигляд, відповідно:

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a}\cdot\theta(at - |x|), \tag{11.3a}$$

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a}\cdot\frac{\theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}, \tag{11.3b}$$

$$\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a|x|}\delta\left(at - |x|\right). \tag{11.3c}$$

$$\tag{11.3d}$$

Задача Коші для хвильового рівняння ставиться наступним чином:

$$\begin{array}{ll} \Box_n u(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x), & u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{11.4}$$

Розв'язок задачі Коші (11.4) збігається з розв'язком рівняння

$$\begin{array}{l} \left(\partial_t^2 - a^2\Delta_n\right) u(x,t) = F(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ F(x,t) = \theta(t) f(x,t) + \delta'(t) u_0(x) + \delta(t) u_1(x), \end{array} \tag{11.5}$$

що має вигляд

$$u(x,t) = \left(\mathcal{E}_n * F\right)(x,t),$$

Зокрема, розв'язок класичної задачі Коші для хвильового рівняння в n-вимірному просторі визначається наступним виразом:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^t \mathrm{d}s \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \mathcal{E}_n(x-y,t-s) f(y,s) + \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \mathcal{E}_n(x-y,t) u_0(y) + \\
+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \mathcal{E}_n(x-y,t) u_1(y)
\end{aligned} \tag{11.6}
$$

Розв'язок одновимірної класичної задачі Коші для хвильового рівняння визначається формула д'Аламбера:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \mathrm{d}s \int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \mathrm{d}y f(y,s) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \mathrm{d}y u_1(y) + \\
+ \frac{1}{2} \left(u_0(x+at) + u_0(x-at) \right).
\end{aligned} \tag{11.7}
$$

Розв'язок двовимірної задачі Коші для хвильового рівняння визначається формула Пуассона:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^t \mathrm{d}s \int\limits_{|x-y| \le a(t-s)} \mathrm{d}y \frac{f(y,s)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}} + \\
+ \frac{1}{2\pi a} \partial_t \int\limits_{|x-y| \le at} \mathrm{d}y \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} + \\
+ \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{|x-y| \le at} \mathrm{d}y \frac{u_1(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}}
\end{aligned} \tag{11.8}
$$

Розв'язок тривимірної задачі Коші для хвильового рівняння визначається формула Кірхгофа:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{|x-y| \le at} \mathrm{d}y \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} + \\
+ \frac{1}{4\pi a^2} \partial_t \left(\frac{1}{t} \int\limits_{|x-y| = at} u_0(y) \mathrm{d}S_y \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|x-y| = at} u_1(y) \mathrm{d}S_y.
\end{aligned} \tag{11.9}
$$

В прикладах (483)–(507) знайти розв'язок наступних задач Коші для одновимірного хвильового рівняння:

483. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + x, \\ u(x,0) = \delta(x), \\ u_t(x,0) = 1. \end{array} \right.$

484. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,y,0) = 0, \\ u_t(x,y,0) = \delta'(x_0 - x). \end{array} \right.$

485. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\delta(x), \\ u(x,0) = \delta(x - x_0), \\ u_t(x,0) = x\delta(x). \end{array} \right.$

486. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = x^2, \\ u_t(x,0) = x^4. \end{array} \right.$

487. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + x, \\ u(x,0) = \delta(x), \\ u_t(x,0) = 0. \end{array} \right.$

488. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \\ u(x,0) = \sin x, \\ u_t(x,0) = 0. \end{array} \right.$

489. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + 2, \\ u(x,0) = x, \\ u_t(x,0) = \delta(x). \end{array} \right.$

490. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \cos x, \\ u_t(x,0) = \cos x. \end{array} \right.$

491. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x, \\ u(x,0) = 1, \\ u_t(x,0) = \delta(x). \end{array} \right.$

492. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x^2 \cdot e^t, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = \delta(x). \end{array} \right.$

493. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + e^{\alpha t}\delta(x), \\ u(x,0) = \delta(1 - |x|), \\ u_t(x,0) = 0. \end{array} \right.$

494. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + xe^x, \\ u(x,0) = \theta(x)x^2 \\ u_t(x,0) = \theta(1 - x). \end{array} \right.$

495. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 9u_{xx} + e^{-t}\cos x, \\ u(x,0) = \cos x \\ u_t(x,0) = \sin 2x. \end{array} \right.$

496. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\delta(x), \\ u(x,0) = \delta(x - x_0), \\ u_t(x,0) = x\delta(x). \end{array} \right.$

497. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + e^t \sin x, \\ u(x,0) = \sin x, \\ u_t(x,0) = e^{-x}. \end{array} \right.$

498. $\left\| \begin{array}{l} 4u_{tt} = u_{xx} - \theta(2 - t)\exp(-x), \\ u(x,0) = \sin x \exp(-x^2), \\ u_t(x,0) = 3\delta(x - 2). \end{array} \right.$

499. $\left\| \begin{array}{l} 4u_{tt} = u_{xx} + x\sin t, \\ u(x,0) = \exp(-x^2), \\ u_t(x,0) = \exp(-2x). \end{array} \right.$

500. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + e^{-2t}e^x, \\ u(x,0) = x\theta(x), \\ u_t(x,0) = x^2\theta(x). \end{array} \right.$

501. $\left\| \begin{array}{l} 4u_{tt} = u_{xx} + e^t\theta(2 - |x|), \\ u(x,0) = e^{2x - x^2}, \\ u_t(x,0) = e^{x - 2x^2}. \end{array} \right.$

502. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + x^2, \\ u(x,0) = x^2, \\ u_t(x,0) = (1 - |x|)^{-2}. \end{array} \right.$

503. $\left\| \begin{array}{l} 4u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,0) = x^2 + x^4, \\ u_t(x,0) = 3x^6. \end{array} \right.$

504. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \\ u(x,0) = \theta(x)x, \\ u_t(x,0) = \delta'(2x). \end{array} \right.$

505. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = (1/9)u_{xx} + \delta(t - 1)e^x, \\ u(x,0) = \sin x\theta(x), \\ u_t(x,0) = \cos(2x). \end{array} \right.$

506. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + (t - 1)^3 \sin(e^x), \\ u(x,0) = x\sin x, \\ u_t(x,0) = 3. \end{array} \right.$

507. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + 2t^4 \sin(x - 1), \\ u(x,0) = \sin x^2, \\ u_t(x,0) = 2 + e^{-4x}. \end{array} \right.$

В прикладах (508)–(509) звести задачі Коші для багатовимірного хвильового рівняння до відповідних одновимірних задач:

508. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + f(|x|, t), \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(|x|), \\ u_t(x_1, x_2, 0) = u_1(|x|). \end{array} \right.$

Тут $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

509. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + f(|x|, t), \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = u_0(|x|), \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = u_1(|x|). \end{array} \right.$

Тут $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

В прикладах (510)–(525) знайти розв'язок наступних задач Коші для багатовимірного хвильового рівняння:

510. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + e^{-2t} 2x_1x_2x_3, \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = 1. \end{array} \right.$

511. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + \cos 3t \cdot \\ \cdot \theta(1 - |x|), \\ u(x_1,x_2,0) = 0, \\ u_t(x_1,x_2,0) = \delta'(a - x_1) \cdot \\ \cdot \delta(b - x_2). \end{array} \right.$

512. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 2\Delta u + t\cos x_1, \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \cos x_1 \cos x_2, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = \cos x_2 \cos x_3. \end{array} \right.$

513. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 2\Delta u, \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = |x|^2, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = |x|^2. \end{array} \right.$

514. $\left\| \begin{array}{l} 3u_{tt} = \Delta u + 2x_1x_2x_3, \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = 1. \end{array} \right.$

515. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 4\Delta u + 6x_1x_2t, \\ u(x_1,x_2,0) = x_1^2 - x_2^2, \\ u_t(x_1,x_2,0) = x_1x_2. \end{array} \right.$

516. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + \sin t \sin x_1 \sin x_2, \\ u(x_1,x_2,0) = 1, \\ u_t(x_1,x_2,0) = x_1^2 e^{-x_1}. \end{array} \right.$

517. $\left\| \begin{array}{l} 9u_{tt} = \Delta u + \sin|x|, \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = |x|\cos|x|, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = |x|^2. \end{array} \right.$

518. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + 2\sin t\theta(1 - |x_1|) \cdot \\ \cdot \theta(1 - |x_2|), \\ u(x_1,x_2,0) = x_1, \\ u_t(x_1,x_2,0) = x_2. \end{array} \right.$

519. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 2\Delta u, \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \cos|x|, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = |x|\cos|x|. \end{array} \right.$

520. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 9\Delta u + \cos t \sin|x|, \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = 1, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = (2 + |x|^2)^{-1}. \end{array} \right.$

521. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 25\Delta u + |x|^2 e^t, \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = 0, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = 1. \end{array} \right.$

522. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 5\Delta u + e^{\alpha t}\delta(2 - |x|), \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \theta(1 - |x|), \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = 3\sin 3|x|. \end{array} \right.$

523. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + \cos(\omega t - \alpha)\theta(1 - x_1) \cdot \\ \cdot \theta(2 - y)\theta(3 - z), \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = x_1x_2, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = 3\sin 3x_3. \end{array} \right.$

524. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + \cos(\omega t - \alpha|x|^2), \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = (x_1 - x_2 + x_3)^2, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = \delta(x_1 - 2). \end{array} \right.$

525. $\left\| \begin{array}{l} 10u_{tt} = \Delta u + (\theta(5 - t) - \\ -\theta(2 - t))\delta(|x|^2 - 1), \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \sin x_1 \cos x_2 e^{-x_3^2}, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = x_1. \end{array} \right.$

§ 12. Фундаментальний розв'язок і межові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона

Оператор Лапласа в n–вимірному просторі має вигляд:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \tag{12.1}$$

Фундаментальний розв'язок n–вимірного оператора Лапласа має вигляд

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{\sigma_2}\ln r = \frac{1}{2\pi}\ln r, \quad n = 2, \tag{12.2a}$$

$$\mathcal{E}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}}, \quad n \geq 3, \tag{12.2b}$$

де $\sigma_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площа поверхні одиничної n–сфери.

Функцією Гріна задачі Діріхле для області D називають функцію $G(x,y)$, $x,y \in D \subset \mathbb{R}^n$, якщо вона задовольняє дві вимоги:

1. $\Delta_y G(x,y) = \delta(x-y)$, $x,y \in D \subset \mathbb{R}^n$;
2. $G(x,y)\Big|_{y\in\partial D} = 0$.

Функцію Гріна задачі Діріхле можна представити у вигляді

$$G(x,y) = \mathcal{E}_n(x-y) + g(x,y), \tag{12.3}$$

де гармонічна функція $g(x,y)$ знаходиться з однорідних межових умов

$$g(x,y)\Big|_{y\in\partial D} = -\mathcal{E}_n(x-y)\Big|_{y\in\partial D}. \tag{12.4}$$

Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона $\Delta_n u = f(x)$в області D має вигляд

$$u(x) = \int\limits_D f(y)G(x,y)dy + \int\limits_{\partial D} u_0(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)dS_y. \tag{12.5}$$

В прикладах (526)–(532) знайти функцію Гріна задачі Діріхле для заданих областей.

526. Напівпростір $x_3 > 0$ в $\mathbb{R}^3$.
527. Двогранний кут $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ в $\mathbb{R}^3$.
528. Октант $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ в $\mathbb{R}^3$.
529. Куля $|x| < R$ в $\mathbb{R}^3$.
530. Напівкуля $|x| < R$, $x_3 > 0$ в $\mathbb{R}^3$.
531. Четверта частина кулі $|x| < R$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ в $\mathbb{R}^3$.
532. Восьма частина кулі $|x| < R$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ в $\mathbb{R}^3$.

В прикладах (533)–(539) методом функцій Гріна розв'язати задачу Діріхле.

533. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(x),\ x_3 > 0, \\ f(x) = 0, \\ u\big|_{x_3=0} = \cos x_1 \cos x_2. \end{array} \right.$

534. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(x),\ x_3 > 0, \\ f(x) = e^{-x_3}\sin x_1 \cos x_2, \\ u\big|_{x_3=0} = 0. \end{array} \right.$

535. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(x),\ x_3 > 0, \\ f(x) = 0, \\ u\big|_{x_3=0} = \theta(x_2 - x_1). \end{array} \right.$

536. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(x),\ x_3 > 0, \\ f(x) = 0, \\ u\big|_{x_3=0} = \left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-1/2}. \end{array} \right.$

537. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(x),\ x_3 > 0, \\ f(x) = 0, \\ u\big|_{x_3=0} = \begin{cases} -1 & x_1 < 0, \\ +1 & x_1 > 0. \end{cases} \end{array} \right.$

538. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(x),\ x_3 > 0, \\ f(x) = 2\big(x_1^2 + x_2^2 + \\ +(x_3+1)^2\big)^{-2}, \\ u\big|_{x_3=0} = \left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-1/2}. \end{array} \right.$

539. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0,\ x_2 > 0, x_3 > 0 \\ u\big|_{x_2=0} = 0, \\ u\big|_{x_3=0} = e^{-4x_1} \sin 5x_2. \end{array} \right.$

540. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0,\ x_2 > 0, x_3 > 0 \\ u\big|_{x_2=0} = 0, \\ u\big|_{x_3=0} = x_2 \left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-3/2}. \end{array} \right.$

541. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0,\ x_2 > 0, x_3 > 0 \\ u\big|_{x_2=0} = 0, \\ u\big|_{x_3=0} = \theta(x_2 - |x_1|). \end{array} \right.$

542. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(x),\ |x| < R, \\ f(x) = a = \text{const}, \\ u\big|_{|x|=R} = 0. \end{array} \right.$

543. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(x),\ |x| < R, \\ f(x) = |x|^n,\ n \in \mathbb{N} \\ u\big|_{|x|=R} = a = \text{const}. \end{array} \right.$

544. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(x),\ |x| < R, \\ f(x) = e^{|x|}, \\ u\big|_{|x|=R} = 0. \end{array} \right.$

Рекомендована література

Підручники

[1] *Владимиров В., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — Москва: Физматлит, 2000. — 400 с.

[2] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1972. — 736 с.

[3] *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1982. — 336 с.

[4] *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва: МЦМНО, 2001. — 303 с.

[5] *Білоколос Є. Д., Юрачківський А. П., Шека Д. Д.* Спеціальні функції в задачах математичної фізики: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — Київ: ВПЦ Київський університет, 2000. — 92 с.

Збірники задач

[6] *Бицадзе А. В., Калиниченко Д.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — Москва: Наука, 1977. — 224 с.

[7] *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Задачи по математической физики. — Москва: Изд–во МГУ, 1998. — 350 с.

[8] Задачи по математическим методам физики / И. В. Колоколов, Е. А. Кузнецов, А. И. Мильштейн и др. — Москва: Эдиториал УРСС, 2002. — 288 с.

[9] *Юрачківський А. П., Грязнова В. О.* Метод відокремлення змінних у задачах математичної фізики: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — Київ: РВЦ Київський університет, 1998. — 143 с.

[10] *Будак Б. М., Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Сборник задач по математической физики. — Москва: Наука, 1972. — 688 с.

[11] Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В. С. Владимирова. — Москва: Физматлит, 2001. — 288 с.

Абетковий покажчик

Навчальне видання

Білоколос Євген Дмитрович
Шека Денис Дмитрович

Збірник задач з математичної фізики

Методична розробка для студентів природничих факультетів

Оригінал-макет виготовлено авторами за допомогою видавничого пакету LaTeX2e з використанням шрифтів PSCyr