Київський Національний університет імені Тараса Шевченка

*Є. Д. Білоколос, Л. Л. Зайцева, Д. Д. Шека*

# Збірник задач з комплексного аналізу
## Частина I. Функції комплексної змінної

**Методична розробка**
**для студентів природничих факультетів**

Київ
2014

УДК 517.53

Є. Д. Білоколос, Л. Л. Зайцева, Д. Д. Шека  версія 25 березня 2014 р.
**Збірник задач з комплексного аналізу. Частина І. Функції комплексної змінної**: Методична розробка для студентів природничих факультетів. — К., 2014.-71 с.

Збірник задач містить близько 400 задач різного рівня складності, серед яких докладно розібрано близько 40 прикладів.

Для студентів фізико-математичних спеціальностей університетів.

Рецензенти: С. А. Кривошея, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Т. М. Жеребко, канд. фіз.-мат. наук, асистент.

Затверджено Радою
радіофізичного факультету
Протокол № 7 від 11 березня 2013 року

# Зміст

# Деякі позначення

Математичні символи

$a = b$ $a$ дорівнює $b$;

$a \equiv b$ $a$ тотожно дорівнює $b$;

Множини

$\mathbb{N}$ множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ множина цілих чисел;

$\mathbb{R}$ множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ множина комплексних чисел (комплексна площина);

$\overline{\mathbb{C}}$ розширена комплексна площина;

$\Gamma$, $\gamma$ крива (контур);

$D$ область;

$\partial D$ межа області $D$;

Комплексні числа

$z$ комплексне число;

$\overline{z}$ комплексне число, спряжене до $z$;

$\operatorname{Re} z$ дійсна частина комплексного числа $z$;

$\operatorname{Im} z$ уявна частина комплексного числа $z$;

$|z|$ модуль комплексного числа $z$;

$\operatorname{Arg} z$ аргумент комплексного числа $z$;

$\arg z$ головне значення аргументу комплексного числа $z$;

Функції

$f(z)$ функція комплексної змінної;

$f(z) \in \mathcal{A}(D)$ функція, аналітична в $D$;

$f(x, y) \in \mathcal{H}(D)$ функція, гармонічна в $D$;

Деякі умовні позначення

$\lhd$ початок прикладу;

$\rhd$ кінець прикладу;

◄ початок розв’язку;

► кінець розв’язку;

# Передмова

Видання розпочинає серію збірників задач з курсу «Комплексний аналіз». За основу використано завдання, які впродовж багатьох років використовуються авторами на радіофізичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. В першу частину увійшли задачі з основних понять комплексного аналізу і теорії аналітичних функцій, які складають перший модуль курсу. Задачі добиралися у відповідності до лекційного матеріалу. Для зручності читача кожний параграф містить основні поняття і факти. Відповіді до усіх задач наведено в кінці книги.

Основна частина задач складалася авторами спеціально для «Збірника», інші було запозичено з [6–9].

«Збірник» розраховано на студентів фізико-математичних спеціальностей університетів.

# Глава 1

# Основні поняття комплексного аналізу

## § 1. Операції над комплексними числами

*Комплексним числом* називається вираз $z = x + iy$, де $x$ та $y$ — дійсні числа, $i = \sqrt{-1}$ — це символ, що називається уявною одиницею, тобто число, квадрат якого дорівнює $-1$, $i^2 = -1$. Числа $x$ та $y$ називаються дійсною та уявною частинами комплексного числа $z$ і позначаються $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Комплексне число $z = x - iy$ називається комплексно спряженим до $z$ і позначається як $\overline{z}$. Таким чином, $\overline{x + iy} = x - iy$. Множина комплексних чисел позначається $\mathbb{C} = \{z \ : \ z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$.

Поняття рівності та основні арифметичні операції на множині $\mathbb{C}$ визначаються таким чином:

- Два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ рівні тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2$ та $y_1 = y_2$.
- Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число
$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$
- Добутком $z_1 z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число
$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$
- Часткою $z_1/z_2$ від ділення комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на комплексне число $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ називається комплексне число
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Зауважимо, що всі властивості операцій додавання і множення (комутативність, асоціативність і т.п.), притаманні $\mathbb{R}$, зберігаються і на множині $\mathbb{C}$.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ називається число
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$
Аргументом комплексного числа $z = x + iy, z \neq 0$ називається сукупність чисел
$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2k\pi, & (x, y) \text{ в I та IV квадрантах,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi + 2k\pi, & (x, y) \text{ в II та III квадрантах,} \end{cases}$$

де $k \in \mathbb{Z}$. Через $\arg z$ позначатиме будь-яке із значень функції $\operatorname{Arg} z$. Для зручності в деяких прикладах вважатимемо, що $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

У багатьох задачах зручно використовувати *тригонометричну форму запису* комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ або *показникову форму запису* $z = \rho e^{i\varphi}$, тут $\rho = |z|, \varphi = \operatorname{Arg} z$. Зв'язок між тригонометричною та показниковою формами запису комплексного сила встановлює *формула Ейлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.1}$$

Операції множення та ділення двох комплексних чисел $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ в цих формах запису мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right) = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ \rho_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Для піднесення числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$ до цілого степеня зручно використовувати *формулу Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Тоді $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}$.

**Приклад 1.1.** ◁ Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа

$$z = \frac{4-3i}{(3-2i)(2+i)}.$$

▷

*Розв'язання.* ◀

$$\begin{aligned} z &= \frac{4-3i}{(3-2i)(2+i)} = \frac{4-3i}{6+3i-4i+2} = \frac{4-3i}{8-i} = \frac{(4-3i)(8+i)}{(8-i)(8+i)} = \\ &= \frac{32+4i-24i+3}{64+1} = \frac{35-20i}{65} = \frac{7}{13} - i\frac{4}{13}. \end{aligned}$$

Таким чином, $\operatorname{Re} z = \frac{7}{13}, \operatorname{Im} z = -\frac{4}{13}$. ▶

**Приклад 1.2.** ◁ Записати комплексне число $z = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)^6}{(3-2i)^4}$ у показниковій формі. ▷

*Розв'язання.* ◀ Позначимо $z_1 = -\sqrt{3} + i,\ z_2 = 3 - 2i$. Знайдемо модуль та аргумент $z_1$ та $z_2$ :

$$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \quad |z_2| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13},$$

$$\arg z_1 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi = \frac{5\pi}{6}, \quad \arg z_2 = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3},$$

при обчисленні аргументів було враховано, що число $z_1$ знаходиться у II квадранті, а число $z_2$ у IV квадранті. Запишемо числа $z_1$ і $z_2$ у показниковій формі:

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_2 = \sqrt{13}e^{-i\operatorname{arctg}\frac{2}{3}}.$$

Використовуючи формулу Муавра, отримаємо

$$z = \frac{z_1^6}{z_2^4} = \frac{2^6 e^{6i\frac{5\pi}{6}}}{(\sqrt{13})^4 e^{-4i\operatorname{arctg}\frac{2}{3}}} = \frac{64}{169}e^{i5\pi + i4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}} = \frac{64}{169}e^{i(4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\pi)},$$

остання рівність випливає з того, що $e^{i6\pi} = 1$. Зауважимо, що $4\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi \in (-\pi, \pi]$. ▶

**Приклад 1.3.** ◁ Використовуючи формулу Муавра, виразити $\cos 4\varphi$ через степені $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$. ▷

*Розв'язання.* ◀ З формули Муавра випливає, що

$$\begin{aligned}\cos 4\varphi &= \operatorname{Re}(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = \operatorname{Re}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \\ &= \operatorname{Re}\left(\cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi\right) = \\ &= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi.\end{aligned}$$

▶

**Приклад 1.4.** ◁ Знайти дійсну та уявну частини числа $w = (\overline{z}+1)^2 + \dfrac{i}{z+i}$. ▷

*Розв'язання.* ◀ Нехай $z = x + iy$. Тоді $\overline{z} = x - iy$ і

$$\begin{aligned}w &= (x+1-iy)^2 + \frac{i}{x+i(y+1)} = (x+1)^2 - 2iy(x+1) - y^2 + \frac{i\,(x - i(y+1))}{x^2+(y+1)^2} = \\ &= (x+1)^2 - y^2 - 2iy(x+1) + \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{x}{x^2+(y+1)^2} = \\ &= (x+1)^2 - y^2 + \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} + i\left(\frac{x}{x^2+(y+1)^2} - 2y(x+1)\right).\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\operatorname{Re} w = (x+1)^2 - y^2 + \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}; \quad \operatorname{Im} w = \frac{x}{x^2+(y+1)^2} - 2y(x+1).$$

▶

**Приклад 1.5.** ◁ Довести, що для довільних $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \varphi \in \mathbb{R}$ виконуються наступні співвідношення:

$$\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2, \quad e^{i\varphi}\overline{e^{i\varphi}} = 1.$$

▷

 

*Розв'язання.* ◀ Доведемо першу рівність. Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = \overline{\overline{x_1 + iy_1} + \overline{x_2 + iy_2}} = \overline{x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2} = \overline{x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2)} = \\ = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = z_1 + z_2.$$

Розглянемо другу рівність. Для довільного $\varphi \in \mathbb{R}$ скористаємось означенням $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тоді

$$e^{i\varphi}\overline{e^{i\varphi}} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \\ = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

▶

***Завдання для класної роботи і домашні завдання.***

В прикладах 1–6 знайти дійсну та уявну частини комплексних чисел.

**1.** $\dfrac{3i-5}{(2+i)^2}$.

**2.** $\dfrac{(4i+3)^2+(3i-5)^2}{(3+2i)(2-i)}$

**3.** $\dfrac{(2i^{53}+1)^3}{(2-3i)(3+i)}$

**4.** $\dfrac{-i+4}{(-3+i)^2}$

**5.** $\dfrac{(i^{31}-2)^3-(4i^{33}+3)^2}{(1-2i)(5+i)}$

**6.** $\dfrac{(i+1)^3}{(-1-3i^{35})(-2+i)}$

В прикладах 7–12 знайти модуль та аргумент комплексних чисел

**7.** $-1-i$.

**8.** $(12-5i)^{13}$.

**9.** $\dfrac{(-1+3i)^{10}}{(1-i\sqrt{6})^{36}}$.

**10.** $-4+4i$.

**11.** $(-8+6i)^{100}$.

**12.** $\dfrac{(2-5i)^{25}}{(-1-i\sqrt{13})^{39}}$.

В прикладах 13–16 записати комплексні числа у показниковій формі.

**13.** $i$.

**14.** $-3$.

**15.** $\dfrac{(1+2i)^{16}}{(-1-7i)^{11}}$.

**16.** $2$.

**17.** $-\dfrac{i}{2}$.

**18.** $\dfrac{(1+i)^{16}}{(-1+3i)^{15}}$.

В прикладах 19–22, використовуючи формулу Муавра, виразити через степені $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$ наступні функції.

**19.** $\sin 5\varphi$.

**20.** $\cos 8\varphi$.

**21.** $\cos 3\varphi$.

**22.** $\sin 9\varphi$.

В прикладах 23–26 знайти дійсну та уявну частини числа $w$, якщо $z = x + iy$.

**23.** $w = \dfrac{1}{z}, \ z \neq 0.$

**24.** $w = z^2 + z.$

**25.** $w = \dfrac{z^2}{z+1}, \ z \neq -1.$

**26.** $w = z^2 - 4iz + 1.$

В прикладах 27–30 довести, що

**27.** $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

**28.** $\dfrac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}, \ \varphi \in \mathbb{R}.$

**29.** $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n, \ z \in \mathbb{C}.$

**30.** $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{i\varphi n}, \ \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$

**31.** Довести, що для довільного многочлена $P(z)$ з дійсними коефіцієнтами і для довільного комплексного числа $z$ має місце рівність $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

**32.** Довести, що функція $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ є взаємно однозначним відображенням на множині $D = \{(\rho, \varphi) : \rho > 0, \ \varphi \in (\alpha, \beta)\}$, якщо $|\beta - \alpha| \leq \dfrac{2\pi}{n}$.

## § 2. Способи зображення комплексних чисел

*Геометрична інтерпретація комплексних чисел.* Кожному комплексному числу $z = x + iy$ ставиться у відповідність точка з координатами $(x, y)$ прямокутної декартової системи координат $xOy$. Саму площину при цьому називають комплексною. Вісь $Ox$ називається дійсною віссю, вісь $Oy$ — уявною. Кожній точці $(x, y)$ відповідає єдиний радіус-вектор цієї точки $\{x, y\}$. Відповідність між множиною всіх комплексних чисел $\mathbb{C}$ та комплексною площиною (або множиною радіус-векторів точок комплексної площини) є взаємно однозначною, тому надалі ми не будемо розрізнювати терміни комплексного числа та точки комплексної площини (радіус-вектора цієї точки).

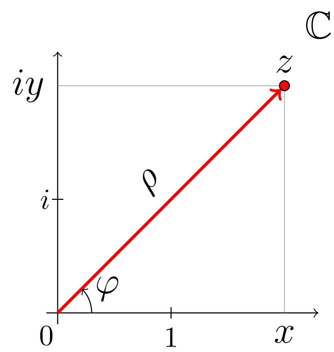


Рис. 1: Геометрична інтерпретація комплексного числа

Модуль $\rho$ та аргумент $\varphi$ комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$ є координатами точки $z$ в полярній системі координат (див. рис. 1).

З геометричної точки зору суму або різницю двох чисел $z_1$ і $z_2$ можна отримати за допомогою правил додавання або віднімання векторів, що відповідають цим комплексним числам (див. рис. 2).

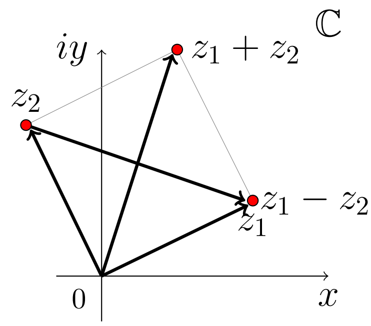


Рис. 2: Геометрична інтерпретація додавання та віднімання комплексних чисел.

*Стереографічна проекція.* В трьохвимірному просторі введемо декартову систему координат і розглянемо координатну площину $xOy$ як комплексну площину. Побудуємо сферу одиничного діаметра, яка є дотичною до площини в точці $z = 0$ (див. рис. 3). Позначимо точку дотику через $O$, а діаметрально протилежну їй точку сфери — через $N$. З'єднаємо точку $N$ прямою з точкою $z$ комплексної площини і позначимо через $M(z)$ точку перетину цієї прямої зі сферою. Відображення $z \leftrightarrow M(z)$ є взаємно однозначним відображенням між комлексною площиною і сферою, проколотою в точці $N$.

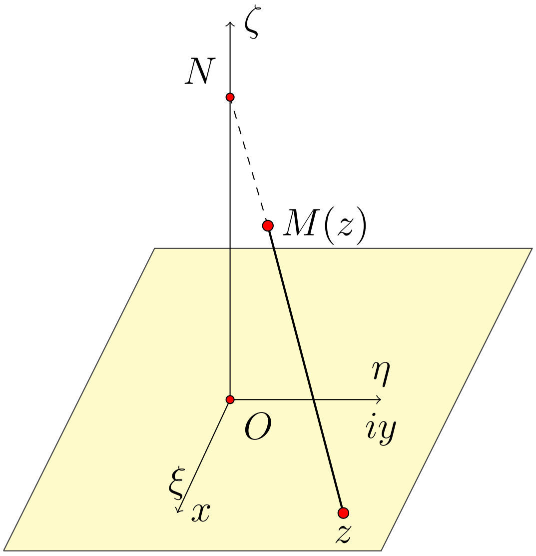


Рис. 3: Сфера Рімана

Доповнимо комплексну площину символічною точкою, яка називається нескінченно віддаленою точкою, позначимо її $\infty$ і покладемо $M(\infty) = N$. Комплексна площина, яка доповнена точкою $\infty$ називається розширеною комплексною площиною або повною комплексною площиною та позначається $\overline{\mathbb{C}}$, а сфера, на яку вона проектується — *сферою Рімана*. Виберемо систему координат $\xi, \eta, \zeta$ таким чином, щоб осі $O\xi$ і $O\eta$ збігалися з осями $Ox$ і $Oy$ комплексної площини, а вісь $O\zeta$ була напрямлена вздовж діаметра сфери Рімана (див. рис. 3). Координати точки на сфері зв'язані рівнянням $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = 1/4$. Зв'язок між координатами точки на площині $x$, $y$ та координатами точки на сфері $\xi$, $\eta$, $\zeta$ задається такими формулами

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta},\; y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad \xi = \frac{x}{1+|z|^2},\; \eta = \frac{y}{1+|z|^2},\; \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{2.1}$$

*Матрична інтерпретація комплексних чисел.* При операціях множення та ділення комплексні числа мають властивість лінійних операторів. А саме, геометрично множення комплексного числа $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ на комплексне число $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ зводиться до повороту вектора $z_1$ на кут $\varphi_2$ та зміни його довжини в $\rho_2$ разів, тобто можна розглядати $z_1$ як вектор, а $z_2$ як лінійний оператор, що діє на цей вектор (або навпаки). Таким чином, кожне комплексне число $z = x + iy$ може бути ототожнено з кососиметричною матрицею другого порядку такого вигляду

$$z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Для таким матриць виконуються алгебраїчні операції додавання, віднімання, множення та ділення так само, як і для комплексних чисел.

**Приклад 2.1.** $\triangleleft$ Зобразити на комплексній площині множину точок

$$\mathcal{M} = \left\{ z \;:\; \operatorname{Re}\frac{z-3}{z+4i} \geq -\frac{1}{2} \right\}.$$

$\triangleright$

*Розв'язання.* ◄ Знайдемо множину точок $z$, яка задовольняє рівняння

$$\operatorname{Re}\frac{z-3}{z+4i} = -\frac{1}{2},$$

це буде межа множини $\mathcal{M}$. Нехай $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що $z \neq -4i$. Підставимо в шукане рівняння: $\operatorname{Re}\dfrac{x+iy-3}{x+iy+4i} = -\dfrac{1}{2}$, або $\operatorname{Re}\dfrac{x-3+iy}{x+i(y+4)} = -\dfrac{1}{2}$. Знайдемо частку від ділення двох комплексних чисел, а потім її дійсну частину:

$$\operatorname{Re}\frac{(x-3+iy)(x-i(y+4))}{x^2+(y+4)^2} = \operatorname{Re}\frac{(x-3)x+y(y+4)+i\,(yx-(x-3)(y+4))}{x^2+(y+4)^2} =$$
$$= \frac{(x-3)x+y(y+4)}{x^2+(y+4)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Розв'яжемо звичайне рівняння для двох дійсних змінних $x, y$:

$$\frac{(x-3)x+y(y+4)}{x^2+(y+4)^2} = -\frac{1}{2},$$

звідки $2x^2 - 6x + 2y^2 + 8y = -x^2 - (y+4)^2$, тому $3x^2 - 6x + 3y^2 + 16y + 16 = 0$. Отримали рівняння другого порядку. Виділимо повні квадрати:

$$(x-1)^2 + \left(y+\frac{8}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2, \quad \text{або} \quad |z-z_0| = \frac{5}{3}, \quad \text{де } z_0 = 1 - \frac{8i}{3}.$$

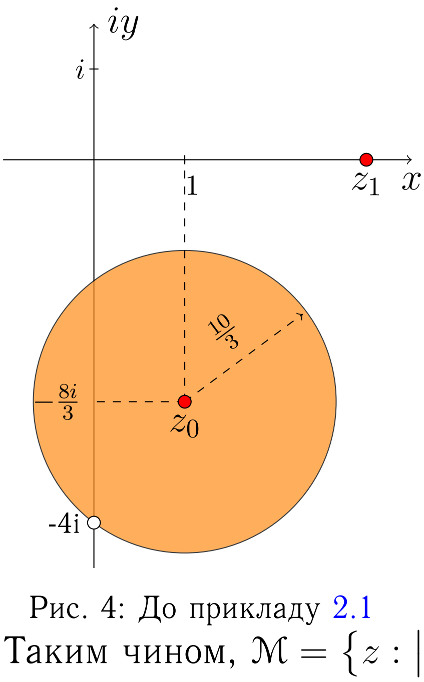

Рис. 4: До прикладу 2.1

Це рівняння описує коло з центром в точці $z_0 = 1 - \frac{8i}{3}$ радіуса $\frac{5}{3}$. Межею множини $\mathcal{M}$ буде коло з виколотою точкою $-4i$. Залишилось визначити, множина $\mathcal{M}$ — це внутрішність або зовнішність побудованого кола. Для цього візьмемо довільну точку комплексної площини, наприклад, точку $z_1 = 3$. З одного боку, точка $z_1$ не належить множині $\mathcal{M}$, оскільки $\operatorname{Re}\dfrac{z_1-3}{z_1+4i} = 0$, тобто її координати не задовольняють нерівність, що визначає $\mathcal{M}$. З іншого боку, точка $z_1$ лежить зовні кола, оскільки $|z_1 - z_0| = \frac{10}{3}$. Це означає, що $\mathcal{M}$ — це внутрішня частина побудованого кола (разом з межею, але з виколотою точкою $-4i$, див. рис. 4).

Таким чином, $\mathcal{M} = \left\{z : \left|z - 1 + \frac{8i}{3}\right| \leq \frac{5}{3}\right\} \setminus \{-4i\}$. ►

 

**Приклад 2.2.** ◁ Для заданих $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ зобразити на комплексній площині множину точок $\mathcal{M} = \{z \,:\, ||z - z_1| - |z - z_2|| = 1\}$. ▷

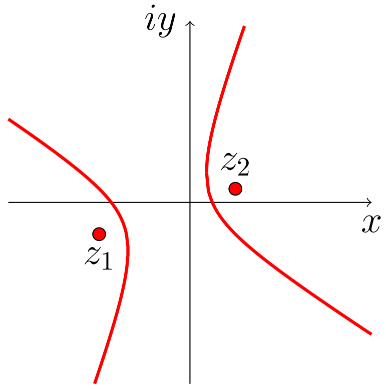


Рис. 5: До прикладу 2.2

*Розв'язання.* ◀ На відміну від попереднього прикладу, тут для розв'язку задачі зручно використати не аналітичний підхід, а геометричну інтерпретацію комплексного числа. Дійсно, рівняння $||z - z_1| - |z - z_2|| = 1$ задає множину точок комплексної площини, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок $z_1$ і $z_2$ є величина стала і дорівнює 1 або $-1$. З курсу аналітичної геометрії відомо, що таку властивість має крива другого порядку — гіпербола, а точки $z_1$ і $z_2$ — це фокуси даної гіперболи (див. рис. 5). ▶

**Приклад 2.3.** ◁ Який образ на сфері Рімана має точка $i$? Точка $\dfrac{1}{z}$? ▷

*Розв'язання.* ◀ Точка $i$ має координати $(0, 1)$, $|i| = 1$. Для знаходження координат точки $M(i)$ скористаємось формулами (2.1):

$$\xi = \frac{0}{1+1} = 0, \quad \eta = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad \zeta = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, $M(i) = \left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Нехай $z = x + iy$, $z \neq 0$. Тоді точка $\dfrac{1}{z}$ має координати $\left(\dfrac{x}{|z|^2}, -\dfrac{y}{|z|^2}\right)$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$. З формул (2.1) випливає, що точка $M\left(\frac{1}{z}\right)$ має такі координати:

$$\xi_{\frac{1}{z}} = \frac{x/|z|^2}{1 + (1/|z|)^2} = \frac{x}{1 + |z|^2} = \xi_z, \quad \eta_{\frac{1}{z}} = -\frac{y/|z|^2}{1 + (1/|z|)^2} = -\frac{y}{1 + |z|^2} = -\eta_z,$$
$$\zeta_{\frac{1}{z}} = \frac{(1/|z|)^2}{1 + (1/|z|)^2} = \frac{1}{1 + |z|^2} = 1 - \zeta_z.$$

Таким чином, $M\left(\frac{1}{z}\right) = (\xi, -\eta, 1 - \zeta)$. Якщо $z = 0$, тоді $\frac{1}{z} = \infty$, $M(\infty) = N$ (північний полюс сфери). ▶

**Приклад 2.4.** ◁ При якому значенні параметра $a$ колу $|z - i| = a$, $a > 0$ комплексної площини відповідає велике коло на сфері Рімана? ▷

*Розв'язання.* ◀ Спочатку зауважимо, що $|z - i| = a$ тоді і тільки тоді, коли $z - i = a(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, або $z = a\cos\varphi + i(a\sin\varphi + 1)$. Крім того, $|z|^2 = 1 + a^2 + 2a\sin\varphi$. Тоді образ точки $z$ (яка лежить на колі $|z - i| = a$) на сфері Рімана має такі координати

$$\xi = \frac{a\cos\varphi}{2 + a^2 + 2a\sin\varphi}, \quad \eta = \frac{a\sin\varphi + 1}{2 + a^2 + 2a\sin\varphi}, \quad \zeta = \frac{1 + a^2 + 2a\sin\varphi}{2 + a^2 + 2a\sin\varphi}.$$

 

Множині точок сфери відповідає велике коло тоді і тільки тоді, коли ця множина належить деякій площині, яка проходить через центр сфери. У випадку сфери Рімана така площина задовольняє рівняння $A\xi + B\eta + C(\zeta - 1/2) = 0$, де $A, B, C$ — це деякі константи, які одночасно не дорівнюють 0 (тобто для кожного набору параметрів $A, B, C$ площина, яка задовольняє вказане рівняння, проходить через точку $(0, 0, 1/2)$ — центр сфери Рімана). Таким чином, потрібно знайти, при якому значенні параметра $a$ знайдуться константи $A, B, C$ такі, що рівність $A\xi + B\eta + C(\zeta - \frac{1}{2}) = 0$ виконується для всіх точок $z$, які лежать на колі $|z - i| = a$. Підставимо в цю рівність знайдені вирази для $\xi, \eta, \zeta$ :

$$\frac{Aa\cos\varphi + B(a\sin\varphi + 1) + C(1 + a^2 + 2a\sin\varphi)}{2 + a^2 + 2a\sin\varphi} \equiv 0$$

для всіх $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Знаменник завжди більше 0 при довільних $a > 0, \varphi \in (-\pi, \pi]$. Чисельник тотожно дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ і вільний член дорівнюють 0 одночасно. Запишемо цю умову

$$\begin{cases} Aa = 0, \\ aB + aC = 0, \\ 2B + a^2C = 0. \end{cases}$$

Оскільки $a > 0$, то $A = 0, C = -B$ і, з третього рівняння, $B(2 - a^2) = 0$. $B \neq 0$ (тоді $A = B = C = 0$) і $a = \sqrt{2}$.

Таким чином, колу $|z - i| = \sqrt{2}$ комплексної площини відповідає велике коло на сфері Рімана. ►

**Приклад 2.5.** ◁ Знайти матричне зображення числа $\frac{1}{z}$. ▷

*Розв'язання.* ◄ Нехай $z = x + iy$. Даному числу відповідає така матриця

$$z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Оскільки при такому ототожненні всі алгебраїчні операції виконуються за звичайними правилами матричної алгебри, то

$$\frac{1}{z} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

►

***Завдання для класної роботи і домашні завдання.***

В прикладах 33–44 визначити геометричний смисл вказаних співвідношень.

**33.** $|z - z_0| = R\ z_0 \in \mathbb{C}, R > 0.$

**34.** $|z - z_0| < R\ z_0 \in \mathbb{C}, R > 0.$

**35.** $|z - z_0| \geq R, z_0 \in \mathbb{C}, R > 0.$

**36.** $\operatorname{Re} z \geq C, C \in \mathbb{R}.$

 

**37.** $\operatorname{Im} z < C, C \in \mathbb{R}$.

**38.** $\alpha < \arg z < \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$.

**39.** $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$,
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta, z_0 \in \mathbb{C}$.

**40.** $|z - z_1| = |z - z_2|,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

**41.** $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$,
$z_1, z_2 \in \mathbb{C}, a > 0$.

**42.** $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$,
$z_1, z_2 \in \mathbb{C}, a > \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$.

**43.** $\operatorname{Re} \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = 0,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

**44.** $\operatorname{Im} \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = 0,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

В прикладах 45–55 зобразити на $\mathbb{C}$-площині множину точок, яка задовольняє вказану рівність або нерівність.

**45.** $\operatorname{Re} \dfrac{z - 3 + i}{z - i} > 0$.

**46.** $\operatorname{Re} \dfrac{z - 2}{z + 1 + 2i} < 0$.

**47.** $\operatorname{Re} \dfrac{z - 4 - i}{z + 2 - i} > 4$.

**48.** $\operatorname{Im} \dfrac{z + i}{z - i - 2} > 0$.

**49.** $\operatorname{Im} \dfrac{z - 3i - 1}{z + 1} < 0$.

**50.** $\operatorname{Im} \dfrac{z - 1 - 2i}{z + 3 - i} < 1$.

**51.** $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.

**52.** $|z| < \operatorname{Re} z + 1$.

**53.** $\operatorname{Im}(z(1 - i)) < \sqrt{2}$.

**54.** $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda,\ \lambda > 0$.

**55.** $0 < \arg \dfrac{i - z}{z + i} < \dfrac{\pi}{2}$.

В прикладах 56–59 визначити сім'ю ліній, яка задана рівнянням.

**56.** $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = C,\ C \in \mathbb{R}$.

**57.** $\operatorname{Re} z^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$.

**58.** $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = C,\ C \in \mathbb{R}$.

**59.** $\operatorname{Im} z^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$.

В прикладах 60–61 за допомогою геометричних міркувань довести співвідношення.

**60.** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\ z \in \mathbb{C}$.

**61.** $|z_1 + z_2| \geq \frac{1}{2}\left(|z_1| + |z_2|\right)\left|\dfrac{z_1}{|z_1|} + \dfrac{z_2}{|z_2|}\right|,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

В прикладах 62–67 знайти образ точки на сфері Рімана.

**62.** $1$.

**63.** $-i$.

**64.** $1 - i$.

**65.** $\dfrac{3 + i}{\sqrt{2}}$.

**66.** $-2 + 2i$.

**67.** $\dfrac{-1 - i}{\sqrt{8}}$.

В прикладах 68–71 знайти образ вказаної множини точок на сфері Рімана.

**68.** $\arg z = \alpha,\ R > 0$.

**69.** $|z| = R,\ R > 0$.

**70.** $|z| < 1$.

**71.** $|z| > 1$.

**72.** $Imz > 0$.

**73.** $Imz < 0$.

В прикладах 72–79 знайти матричне зображення комплексного числа.

**74.** $\overline{z}$.

**75.** $|z|^2$.

**76.** $z^2 + i$.

**77.** $(z-2i)^2+1$.

**78.** $i(2z+\overline{z})^2$.

**79.** $\dfrac{i}{z+1}$.

**80.** Довести, що для довільних $A > 0$, $C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ таких, що $AC < |B|^2$ рівняння

$$A\,|z|^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$$

є рівнянням кола. Знайти радіус і центр цього кола.

**81.** Для довільного $a \in \mathbb{C}$ такого, що $\operatorname{Im} a > 0$ довести, що величина $\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$ більша за 1 у верхній півплощині, менша за 1 у нижній півплощині, дорівнює 1 на дійсній осі.

**82.** Нехай точки $z_1, z_2, z_3$ лежать на колі з центром в початку координат. Довести, що трикутник з вершинами в цих точках є рівностороннім тоді і лише тоді, коли $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

**83.** Нехай точки $z_1, z_2, z_3$ — три вершини паралелограма (точки занумеровані в порядку обходу кола). Довести, що точка $\zeta$ є внутрішньою точкою цього паралелограма тоді і лише тоді, коли існують числа $a, b, c \in (0, 1)$ такі, що $a+b+c = 1$ і $\zeta = az_1 + bz_2 + cz_3$. Показати, що для кожної внутрішньої точки $\zeta$ числа $a, b, c$ визначаються єдиним чином.

**84.** Довести співвідношення 2.1, які дають взаємозв'язок між координатами точки на комплексній площині і на сфері Рімана.

**85.** Для заданого $\alpha \in \mathbb{R}$ визначити, при якому значенні параметра $R$ колу $|z-\alpha| = R$ відповідає велике коло на на сфері Рімана.

**86.** Довести, що колу на сфері Рімана відповідає коло або пряма на комплексній площині, причому пряма відповідає в тому і лише в тому випадку, коли коло на сфері Рімана проходить через точку $N$ (північний полюс).

## § 3. Добування кореня з комплексного числа

Число $z_1$ називається коренем $n$-го степеня ($n \in \mathbb{N}$) з комплексного числа $z$, якщо $z = z_1^n$. Нехай $z = \rho e^{i\varphi}$, $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, тоді $z_1 = z^{1/n}$, якщо $\rho = \rho_1^n$, $\varphi = n\varphi_1$.

Алгебраїчне рівняння $z^n = a$, де $a = |a|e^{i\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$ при $a \neq 0$ має рівно $n$ *різних* коренів, які обчислюються за формулою

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i(\alpha+2\pi k)/n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

На комплексній площині корені рівняння $z^n = a$ зображуються точками, розташованими у вершинах правильного $n$-кутника, вписаного у коло радіуса $\sqrt[n]{|a|}$ з центром у початку координат (див. рис. 6).

 

Надалі ми позначатимемо через $z^{1/n}$ множину всіх значень кореня $n$-го степеня з комплексного числа $z$, через $\sqrt[n]{\alpha}$ — арифметичні (дійсні невід'ємні) значення кореня з дійсного числа $\alpha$.

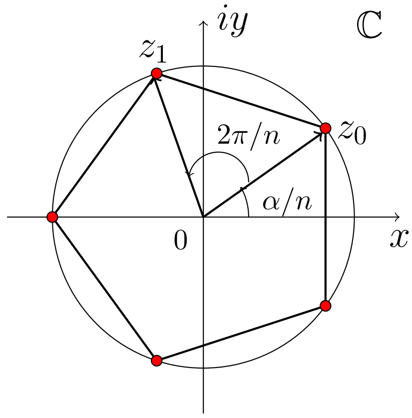

Рис. 6: Добування кореня з комплексного числа

**Приклад 3.1.** $\triangleleft$ Розв'язати рівняння $z^2+1=0$, $\quad z^3+1=0$. $\triangleright$

*Розв'язання.* ◀ Перш ніж переходити до розв'язання рівнянь, зауважимо, що на множині дійсних чисел перше рівняння не має жодного кореня, а друге рівняння має рівно один корінь $z=-1$.

На множині комплексних чисел перше рівняння має два різних кореня:

$$z=(-1)^{1/2}=e^{i(\pi+2\pi k)/2},\ k=0,1. \quad z_0=e^{i\pi/2}=i,\ z_1=e^{i3\pi/2}=-i.$$

На множині комплексних чисел перше рівняння має три різних кореня:

$$z=(-1)^{1/3}=e^{i(\pi+2\pi k)/3},\ k=0,1,2.$$

$$z_0=e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_1=e^{i\pi}=-1,\ z_2=e^{i5\pi/3}=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

▶

**Приклад 3.2.** $\triangleleft$ Обчислити всі значення $(-\sqrt{3}+i)^{1/6}$. $\triangleright$

*Розв'язання.* ◀ Позначимо $z=-\sqrt{3}+i$. Запишемо $z$ в показниковій формі $z=2e^{i(-\pi/6+2\pi k)}$. Тоді

$$z^{1/6}=\sqrt[6]{2}e^{i(-\pi/6+2\pi k)/6},\ k=\overline{0,5}.$$

Таким чином, вираз $(-\sqrt{3}+i)^{1/6}$ має шість різних значень:

$$z_0=\sqrt[6]{2}e^{-i\pi/36},\ z_1=\sqrt[6]{2}e^{-i11\pi/36},\ z_2=\sqrt[6]{2}e^{-i23\pi/36},$$
$$z_3=\sqrt[6]{2}e^{-i35\pi/36},\ z_4=\sqrt[6]{2}e^{-i47\pi/36},\ z_5=\sqrt[6]{2}e^{-i59\pi/36}.$$

▶

**Приклад 3.3.** $\triangleleft$ Обчислити всі значення $(3-2i)^{1/5}$. $\triangleright$

*Розв'язання.* ◀ Позначимо $z=3-2i$. Запишемо $z$ в показниковій формі $z=\sqrt{13}e^{i(-\operatorname{arctg}2/3+2\pi k)}$. Тоді

$$z^{1/5}=\sqrt[10]{13}e^{i(-\operatorname{arctg}2/3+2\pi k)/5},\ k=\overline{0,4}.$$

Таким чином, вираз $(3-2i)^{1/5}$ має п'ять різних значень:

$$z_0=\sqrt[10]{13}e^{i(-\operatorname{arctg}2/3)/5},\ z_1=\sqrt[10]{13}e^{i(-\operatorname{arctg}2/3+2\pi)/5},\ z_2=\sqrt[10]{13}e^{-i(-\operatorname{arctg}2/3+4\pi)/5},$$
$$z_3=\sqrt[10]{13}e^{-i(-\operatorname{arctg}2/3+6\pi)/5}, z_4=\sqrt[10]{13}e^{-i(-\operatorname{arctg}2/3+8\pi)/5}.$$

▶

***Завдання для класної роботи і домашні завдання.***

В прикладах 87–96 обчислити всі значення кореня і побудувати їх.

**87.** $i^{1/4}$.
**88.** $(2-2i)^{1/6}$.
**89.** $(-3+5i)^{2/3}$.
**90.** $(-7-9i)^{1/5}$.
**91.** $(8+i)^{1/8}$.
**92.** $(3-4i)^{1/7}$.

**93.** Довести, що для будь-якого комплексного числа $z = x + iy$ справедливо:

$$(x+iy)^{1/2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\rho+x}{2}} + i\,\mathrm{sign} y\sqrt{\frac{\rho-x}{2}}\right), \quad \text{де } \rho = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{3.1}$$

В прикладах 94–99, використовуючи результат задачі 93, знайти всі значення кореня:

**94.** $(-9+2i)^{1/2}$.
**95.** $(11-3i)^{1/2}$.
**96.** $(7+4i)^{1/2}$.
**97.** $(-8-5i)^{1/2}$.
**98.** $(-2+12i)^{1/2}$.
**99.** $(6-9i)^{1/2}$.

В прикладах 100–105, знайти всі розв'язки рівнянь:

**100.** $z^4 - 1 = 0$.
**101.** $z^5 + 1 = i$.
**102.** $z^6 - 2 = i\sqrt{3}$.
**103.** $(z+i)^7 + i = 0$.
**104.** $(z+1)^4 = 4i - 7$.
**105.** $z^5 = 6i - 8$.

**106.** Скільки значень має вираз $z^{n/m}$, де $z \in \mathbb{C}, n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$?

**107.** За якої умови множини значень $\left(z^{1/m}\right)^n$ і $(z^n)^{1/m}$ збігаються?

**108.** Довести, що всі вершини довільного правильного $n$-кутника, який лежить в комплексній площині, задаються формулою $z_k = aw^k + b$, $k = \overline{0, n-1}$, де $w = e^{2\pi i/n}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

## § 4. Елементарні трансцендентні функції

Показникова функція $e^z$, $z \in \mathbb{C}$ визначається наступним співвідношенням

$$\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i \sin y\right). \tag{4.1}$$

Тригонометричні функції $\sin z$, $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$ визначаються за формулами Ейлера:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{4.2}$$

звідки

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{4.3}$$

Тригонометричні функції $\mathrm{tg}\, z, \mathrm{ctg}\, z$ визначаються за допомогою рівностей:

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{4.4}$$

Функція $\mathrm{tg}\, z$ визначена на множині $\mathbb{C}\backslash\{z : \cos z = 0\} = \mathbb{C}\backslash\{\pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$, функція $\mathrm{ctg}\, z$ — на множині $\mathbb{C}\backslash\{z : \sin z = 0\} = \mathbb{C}\backslash\{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$. Для тригонометричних функцій залишаються справедливими всі формули тригонометрії.

 

Гіперболічні функції комплексного аргументу визначаються за допомогою рівностей:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{4.5}$$

Функція $\operatorname{th} z$ визначена на множині $\mathbb{C}\backslash\{z : \operatorname{ch} z = 0\} = \mathbb{C}\backslash\{i\pi/2 + \pi n i, n \in \mathbb{Z}\}$, функція $\operatorname{cth} z$ — на множині $\mathbb{C}\backslash\{z : \operatorname{sh} z = 0\} = \mathbb{C}\backslash\{\pi n i, n \in \mathbb{Z}\}$.

Функції $\sin z$, $\cos z$ є періодичними з дійсним періодом $2\pi$, функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ є періодичними з дійсним періодом $\pi$. Аналогічно, функції $e^z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ є періодичними з уявним періодом $2\pi i$, функції $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ є періодичними з уявним періодом $i\pi$. Зауважимо, що на множині комплексних чисел функції $\sin z$, $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$ не є обмеженими.

Логарифм визначається як функція, обернена до експоненти. Число $w \in \mathbb{C}$ називається логарифмом числа $z$ і позначається $w = \operatorname{Ln} z$, якщо $e^w = z$. Якщо $z = |z|e^{i(\arg z + 2\pi n)} = e^{\ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, тоді

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n) = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi n), \; n \in \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Функція $\operatorname{Ln} z$ визначена на множині $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Зауважимо, що на множині комплексних чисел функція $\operatorname{Ln} z, z \in \mathbb{C}$ є багатозначною, її уявна частина визначена з точністю до числа, кратного $2\pi$. Через $\ln z, z \in \mathbb{C}$ позначається будь-яке із значень функції $\operatorname{Ln} z$.

Узагальнена степенева функція визначається співвідношенням

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \quad z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}. \tag{4.7}$$

Нехай $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $z = \rho e^{i(\varphi + 2\pi n)}, n \in \mathbb{Z}$, тоді:

$$\begin{aligned} w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{(\alpha + i\beta)(\ln\rho + i(\varphi + 2\pi n))} = e^{\alpha\ln\rho - \beta(\varphi + 2\pi n) + i(\beta\ln\rho + \alpha(\varphi + 2\pi n))} = \\ = e^{\alpha\ln\rho - \beta(\varphi + 2\pi n)}\Big[\cos\left[\beta\ln\rho + \alpha(\varphi + 2\pi n)\right) + i\sin(\beta\ln\rho + \alpha(\varphi + 2\pi n))\Big]. \end{aligned}$$

Узагальнена степенева функція є багатозначною на множині комплексних чисел, якщо $a \notin \mathbb{Z}$.

Аналогічно визначається узагальнена показникова функція:

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, \quad z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}. \tag{4.8}$$

Нехай $a = |a|e^{i(\alpha + 2\pi n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\rho \neq 0$, $z = x + iy$, тоді:

$$\begin{aligned} w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{(x + iy)(\ln|a| + i(\alpha + 2\pi n))} = e^{x\ln|a| - y(\alpha + 2\pi n) + i(y\ln|a| + x(\alpha + 2\pi n))} = \\ = e^{x\ln|a| - y(\alpha + 2\pi n)}\left(\cos(y\ln|a| + x(\alpha + 2\pi n)) + i\sin(y\ln|a| + x(\alpha + 2\pi n))\right). \end{aligned}$$

Обернені тригонометричні і гіперболічні функції $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$ визначаються як функції обернені до функцій $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $\operatorname{ctg} w$, $\operatorname{sh} w$, $\operatorname{ch} w$, $\operatorname{th} w$, $\operatorname{cth} w$, відповідно. Наприклад, число $w \in \mathbb{C}$ називається арксінусом числа $z$ і позначається

 

$w = \mathrm{Arcsin}\, z$, якщо $z = \sin w$. Всі обернені тригонометричні функції є багатозначними і виражаються через логарифмічну функцію:

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + (1-z^2)^{1/2}\right), \qquad \mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + (z^2-1)^{1/2}\right),$$
$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz}, \qquad \mathrm{Arcctg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{z+i}{z-i},$$
$$\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + (z^2+1)^{1/2}\right), \qquad \mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + (z^2-1)^{1/2}\right),$$
$$\mathrm{Arth}\, z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z}, \qquad \mathrm{Arcth}\, z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}.$$

Через $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arctg}\, z$, $\mathrm{arcctg}\, z$, $\mathrm{arsh}\, z$, $\mathrm{arch}\, z$, $\mathrm{arth}\, z$, $\mathrm{arcth}\, z$, $z \in \mathbb{C}$ позначається будь-яке із значень функцій $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$, $\mathrm{Arctg}\, z$, $\mathrm{Arcctg}\, z$, $\mathrm{Arsh}\, z$, $\mathrm{Arch}\, z$, $\mathrm{Arth}\, z$, $\mathrm{Arcth}\, z$, відповідно.

**Приклад 4.1.** $\lhd$ Обчислити суму $\sin z + \sin 2z + \ldots + \sin nz$, $n \geq 1$, $z \in \mathbb{C}$. $\rhd$

*Розв'язання.* ◀ Скористаємось означенням функції $\sin z$ для кожного доданка:

$$\sin z + \sin 2z + \ldots + \sin nz = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz} + e^{2iz} - e^{-2iz} + \ldots + e^{inz} - e^{-inz}\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\left(e^{iz} + e^{2iz} + \ldots + e^{inz}\right) - \left(e^{-iz} + e^{-2iz} + \ldots + e^{-inz}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{iz} - e^{i(n+1)z}}{1-e^{iz}} - \frac{e^{-iz} - e^{-i(n+1)z}}{1-e^{-iz}}\right) =$$
$$= \frac{e^{iz} - e^{i(n+1)z} - 1 + e^{inz} - e^{-iz} + e^{-i(n+1)z} + 1 - e^{-inz}}{2i\,(1 - e^{iz} - e^{-iz} + 1)} =$$
$$= \frac{2i\sin z + 2i\sin nz - 2i\sin(n+1)z}{2i\,(2 - 2\cos z)} = \frac{\sin z + \sin nz - \sin(n+1)z}{2(1-\cos z)}.$$

В третій рівності ми скористалися відомою формулою для обчислення суми геометричної прогресії, в п'ятій — означеннями тригонометричних функцій. ▶

**Приклад 4.2.** $\lhd$ Знайти всі точки $z$, в яких функція $\mathrm{th} z$ приймає дійсні значення. $\rhd$

*Розв'язання.* ◀ Іншими словами, потрібно знайти всі $z \in \mathbb{C}$ такі, що $\mathrm{Im}\,\mathrm{th} z = 0$. Нехай $z = x + iy$, тоді

$$\mathrm{th} z = \mathrm{th}(x+iy) = \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{e^{x+iy} + e^{-x-iy}} = \frac{e^{x}(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{e^{x}(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)} =$$
$$= \frac{\cos y(e^x - e^{-x}) + i\sin y(e^x + e^{-x})}{\cos y(e^x + e^{-x}) + i\sin y(e^x - e^{-x})} = \frac{\cos y\,\mathrm{sh}\, x + i\sin y\,\mathrm{ch}\, x}{\cos y\,\mathrm{ch}\, x + i\sin y\,\mathrm{sh}\, x} =$$
$$= \frac{\cos^2 y\,\mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, x - \sin^2 y\,\mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, x + i\left(\mathrm{ch}^2 x\sin y\cos y - \mathrm{sh}^2 x\sin y\cos y\right)}{\sqrt{\cos^2 y\,\mathrm{ch}^2 x + \sin^2 y\,\mathrm{sh}^2 x}} =$$
$$= \frac{\mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, x\cos 2y + i\sin y\cos y}{\sqrt{\cos^2 y\,\mathrm{ch}^2 x + \sin^2 y\,\mathrm{sh}^2 x}},$$

 

звідки $\operatorname{Im}\operatorname{th}z = \dfrac{\sin y\cos y}{\sqrt{\cos^2 y\operatorname{ch}^2 x + \sin^2 y\operatorname{sh}^2 x}}$. Таким чином, $\operatorname{Im}\operatorname{th}z = 0$ тоді і лише тоді, коли $\sin y\cos y = 0$, тобто $y = \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. ▶

**Приклад 4.3.** ◁ Знайти всі розв'язки рівняння $\sin z + \cos z = i$. ▷

*Розв'язання.* ◀ Скористаємось означенням тригонометричних функцій:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i.$$

Покладемо $e^{iz} = t$, $t \in \mathbb{C}$. Маємо

$$t - \frac{1}{t} + it + \frac{i}{t} = -2 \;\Rightarrow\; (1+i)t^2 + 2t - 1 + i = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{-1 + 3^{1/2}}{1+i}.$$

$3^{1/2} = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Розглянемо перше значення кореня:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-1+\sqrt{3}}{1+i} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2} = \\ &= \sqrt{2-\sqrt{3}}\exp\left[i\left(\frac{\operatorname{arctg}1 - \sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}} + 2\pi n\right)\right] = \sqrt{2-\sqrt{3}}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi n)},\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ми врахували той факт, що число $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ лежить в IV квадранті. Таким чином,

$$\begin{aligned} iz &= \operatorname{Ln}\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi n)} = \frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3}) + i(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n), \\ z &= -\frac{\pi}{4} + 2\pi n - \frac{i}{2}\ln(2-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Аналогічно, для другого значення кореня маємо таку відповідь:

$$z = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n - \frac{i}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$$

▶

**Приклад 4.4.** ◁ Знайти всі значення $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln}(-1+i)$. ▷

*Розв'язання.* ◀ Маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}\operatorname{Ln}(-1+i) &= \operatorname{Ln}\operatorname{Ln}\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}+2\pi n)} = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}\ln 2 + i\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]\right) = \\ &= \operatorname{Ln}\sqrt{\frac{1}{4}\ln^2 2 + \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]^2}\exp\left[i\left(\operatorname{arctg}\frac{2\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)}{\ln 2} + 2\pi k\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\ln^2 2 + \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]^2\right) + i\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi(8n+3)}{2\ln 2} + 2\pi k\right) \end{aligned}$$

для всіх $n, k \in \mathbb{Z}$. В другій рівності ми врахували, що при всіх $n \in \mathbb{Z}$ число $\frac{1}{2}\ln 2 + i(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n)$ знаходиться в I або в IV квадранті. ▶

**Приклад 4.5.** ◁ Знайти всі значення $(-1-3i)^{\sqrt{2}-i}$. ▷

*Розв'язання.* ◀ Маємо $(-1-3i)^{\sqrt{2}-i} = e^{(\sqrt{2}-i)\,\mathrm{Ln}(-1-3i)}$. Обчислимо спочатку показник експоненти:

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{2}-i)\,\mathrm{Ln}(-1-3i) = (\sqrt{2}-i)\,\mathrm{Ln}\sqrt{10}e^{i(\pi-\mathrm{arctg}\,3+2\pi n)} = \\
&= (\sqrt{2}-i)\left(\frac{\ln 10}{2} + i(\pi-\mathrm{arctg}\,3+2\pi n)\right) = \\
&= \frac{\ln 10}{\sqrt{2}} + \pi - \mathrm{arctg}\,3 + 2\pi n + i\left(\sqrt{2}(\pi-\mathrm{arctg}\,3+2\pi n) - \frac{\ln 10}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Таким чином,

$$
(-1-3i)^{2-i} = \exp\left(\frac{\ln 10}{\sqrt{2}} + \pi - \mathrm{arctg}\,3 + 2\pi n\right)\Bigg[\cos\Big(\sqrt{2}(\pi-\mathrm{arctg}\,3+2\pi n) -
$$

$$
-\frac{\ln 10}{2}\Big) + i\sin\Big(\sqrt{2}(\pi-\mathrm{arctg}\,3+2\pi n) - \frac{\ln 10}{2}\Big)\Bigg].
$$

▶

**Приклад 4.6.** ◁ Знайти всі значення $\mathrm{Arcsin}(4i-1)$. ▷

*Розв'язання.* ◀ Скористаємось означенням функції $\mathrm{Arcsin}\,z$:

$$
\mathrm{Arcsin}(4i-1) = -i\,\mathrm{Ln}\left(i(4i-1) + \sqrt{1-(4i-1)^2}\right) =
$$

$$
= -i\,\mathrm{Ln}\left(-4-i+\sqrt{16+8i}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(-4-i\pm 2\left(\sqrt{\sqrt{5}+2} + i\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\right),
$$

при знаходженні кореня ми скористались формулою (3.1). Позначимо $a = 2\sqrt{\sqrt{5}+2}$, тоді $2\sqrt{\sqrt{5}-2} = a^{-1}$ і

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Arcsin}(4i-1) = -i\,\mathrm{Ln}\left(-4\pm a + i(\pm a^{-1}-1)\right) = \\
&\qquad = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{a^{-1}-1}{a-4} + 2\pi n - \frac{i}{2}\ln\left((a-4)^2 + (a^{-1}-1)^2\right), \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{a^{-1}+1}{a+4} + \pi + 2\pi n - \frac{i}{2}\ln\left((a+4)^2 + (a^{-1}+1)^2\right). \end{cases}
\end{aligned}
$$

▶

***Завдання для класної роботи і домашні завдання.***

В прикладах 109–113 за допомогою означення тригонометричних та гіперболічних функцій, а також, формул Ейлера, довести, що для довільних $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливі такі тотожності:

**109.** $\cos iz = \mathrm{ch}\,z$.

**110.** $\sin iz = i\,\mathrm{sh}\,z$.

**111.** $\mathrm{th} iz = i\,\mathrm{tg}\,z$.

**112.** $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

**113.** $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

В прикладах 114–115, обчислити суми для довільних $n \in \mathbb{N}, z, \theta \in \mathbb{C}$:

**114.** $\cos z + \cos(z+\theta) + \ldots + \cos(z+n\theta)$.

**115.** $\sin z + \sin(z+\theta) + \ldots + \sin(z+n\theta)$.

В прикладах 116–124 виразити через функції дійсного аргументу дійсні та уявні частини, а також, модуль функції.

**116.** $f(z) = e^z$.
**117.** $f(z) = \sin z$.
**118.** $f(z) = \cos z$.
**119.** $f(z) = \operatorname{sh} z$.
**120.** $f(z) = \operatorname{ch} z$.
**121.** $f(z) = \operatorname{tg} z$.
**122.** $f(z) = \operatorname{ctg} z$.
**123.** $f(z) = \operatorname{th} z$.
**124.** $f(z) = \operatorname{cth} z$.

В прикладах 125–132 представити число в алгебраїчній формі.

**125.** $\sin 3i$.
**126.** $\cos(3+i)$.
**127.** $\operatorname{sh}(-i\sqrt{2})$.
**128.** $\operatorname{ch}(-i/2)$.
**129.** $\operatorname{tg}(3-i)$.
**130.** $\operatorname{ctg}(3i-1)$.
**131.** $\operatorname{th}(1-3i)$.
**132.** $\operatorname{cth}(i-3)$.

В прикладах 133–147 обчислити всі значення:

**133.** $\operatorname{Ln}(-1)$.
**134.** $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right)$.
**135.** $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} i$.
**136.** $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln}(2i-1)$.
**137.** $1^{\sqrt{3}}$.
**138.** $(-1)^{\sqrt{3}}$.
**139.** $i^i$.
**140.** $\left(-2+i\sqrt{5}\right)^i$.
**141.** $(3-4i)^{1+i}$.
**142.** $\operatorname{Arccos} 2$.
**143.** $\operatorname{Arcsin} i$.
**144.** $\operatorname{Arch} 2i$.
**145.** $\operatorname{Arsh}(1+i\sqrt{2})$.
**146.** $\operatorname{Arctg}(-1-i)$.
**147.** $\operatorname{Arth}(1-2i)$.

В прикладах 148–156 знайти всі розв'язки рівнянь:

**148.** $\sin z = 3$.
**149.** $\operatorname{ch} z = -1$.
**150.** $\operatorname{tg} z = 2i$.
**151.** $\operatorname{cth} z = 2i - 1$.
**152.** $\operatorname{sh} z - e^{-z} = \dfrac{i}{2}$.
**153.** $\cos z - 2e^{iz} = 1$.
**154.** $iz^i = 1$.
**155.** $z^{1/(1-i)} = i + 1$.
**156.** $(z+i)^{(i+1)/\sqrt{2}} = 1$.

**157.** Довести, що узагальнена степенева функція $f(z) = z^a, z \in \mathbb{C}$ має скінченну множину значень тоді і тільки тоді, коли $a$ — раціональне число.

**158.** Довести, що у випадку раціонального показника степеня $a = m/n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, означення узагальненої степеневої функції $f(z) = z^a = z^{m/n}, z \in \mathbb{C}$ збігається з тим, яке було введено в підрозділі 3.

**159.** Чи збігаються множини значень $z^{2a}$, $(z^a)^2$, $\left(z^2\right)^a$, $z, a \in \mathbb{C}$?

**160.** Довести, що функція $f(z) = e^z$ є взаємно однозначним відображенням на множині $D = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y \in (a,b)\}$, якщо $|b-a| \le \pi$.

**161.** Знайти помилку у міркуваннях, які приводять до парадоксу І. Бернуллі, а саме, $(-z)^2 = z^2$, тому, $2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z$, звідки $\operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z$.

В подальшому для зручності ми будемо використовувати позначення $\sqrt[n]{z}$ і $z^{1/n}$ для позначення алгебраїчного кореня та арифметичного кореня (для дійсних змінних) в залежності від контексту.

# Глава 2

# Аналітичні функції. Інтегрування функцій комплексної змінної

## § 5. Поняття аналітичної функції. Умови Коші–Рімана

Функція $f(z)$, визначена і однозначна в деякому околі точки $z_0 \in \mathbb{C}$, називається називається диференційовною в смислі комплексного аналізу, або $\mathbb{C}$-диференційовною в точці $z_0$, якщо існує границя

$$\lim_{\substack{h\in\mathbb{C}\\ h\to 0}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0) \tag{5.1}$$

і вона не залежить від способу наближення $h$ до нуля. Сама границя $f'(z_0)$ називається *похідною* функції $f$ в точці $z_0$. Нехай $z = x+iy$, функція $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ визначена в деякому околі точки $z_0 \in \mathbb{C}$, та, крім того, в цій точці $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференційовні. Критерієм диференційовності функції $f$ в $z_0$ в термінах її дійсної та уявної частини $u$ і $v$ є виконання *умов Коші—Рімана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.2}$$

Функція $f(z)$ називається *аналітичною* (регулярною, голоморфною) в області $D \subset \mathbb{C}$, якщо вона диференційовна в кожній точці області $D$. Через $\mathcal{A}(D)$ будемо позначати множину всіх аналітичних в області $D$ функцій.

Враховуючи умови Коші—Рімана, похідну аналітичної функції $f(z)$ можна представити в наступних рівносильних формах

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Оскільки звичайні властивості алгебраїчних операцій і граничного переходу зберігаються і при переході від дійсних функцій дійсних змінних до функцій комплексної змінної, то зберігаються і звичайні правила диференціювання, наприклад:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \qquad (fg)' = f'g + fg',$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad (f[g(z)])' = f'[g(z)]g'(z).$$

Порівняємо поняття комплексної диференційовності та диференційовності як функції двох змінних. Довільну функцію двох дійсних змінних $x$, $y$ можна розглядати як функцію двох незалежних змінних $z = x+iy$ і $\overline{z} = x-iy$ таким чином:

$$w = f(x,y) = f\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) = w(z,\overline{z}).$$

Частинні похідні по змінних $z, \overline{z}$ називаються *формальними похідними Коші*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{5.3}$$

Умови Коші—Рімана (5.2) в термінах формальних похідних Коші мають вигляд

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{5.4}$$

**Приклад 5.1.** $\lhd$ Довести, що функція $f(z) = e^z$ є аналітичною на множині $\mathbb{C}$. Крім того, $(e^z)' = e^z, z \in \mathbb{C}$. $\rhd$

*Розв'язання.* ◀ I спосіб. Нехай $z = x + iy$, тоді $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ і $u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y$. Зауважимо, що $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Перевіримо, що виконуються умови Коші—Рімана в кожній точці комплексної площини:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, $e^z \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Знайдемо похідну:

$$(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i\,(e^x \sin y)'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

II спосіб. Перевіримо, аналітичність функції $f(z) = e^z = e^{x+iy}$ в термінах формальних похідних за Коші:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} + i \cdot ie^{x+iy}\right) = 0.$$

▶

**Приклад 5.2.** $\lhd$ Знайти множину точок, в якій функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною. $\rhd$

*Розв'язання.* ◀

I спосіб. Нехай $z = x + iy$, тоді $z\overline{z} = x^2 + y^2$ і $u(x, y) = x^2 + y^2, v(x, y) = 0$. Зауважимо, що $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Обчислимо частинні похідні цих функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Умови Коші—Рімана мають вигляд: $2x = 0$, $2y = 0$. Таким чином, функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною в одній точці $(0, 0)$.

II спосіб. Скористаємось умовами Коші—Рімана в термінах формальних похідних (5.4). Функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною тільки в тих точках, в яких $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, звідки $z = 0$.

III спосіб. Скориставшись означенням похідної, покажемо, що функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною в точці $(0, 0)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h\overline{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \overline{h} = 0.$$

Таким чином, функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною в точці $(0, 0)$.

▶

**Приклад 5.3.** $\lhd$ Нехай $z=\rho e^{i\varphi}$ і $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$. Довести, що в цьому випадку умови Коші—Рімана мають вигляд

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial v}{\partial\varphi},\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\ \text{(умови Коші—Рімана в полярних координатах).} \tag{5.5}$$

Крім того, похідна функції $f(z)$ може бути подана у наступному вигляді:

$$f'(z)=e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right). \tag{5.6}$$

$\rhd$

*Розв'язання.* ◀ Якщо $u(\rho,\varphi)=\widetilde{u}(x,y), v(\rho,\varphi)=\widetilde{v}(x,y)$, тоді для функцій $\widetilde{u},\widetilde{v}$ виконуються умови Коші—Рімана. Виразимо частинні похідні функцій $u,v$ по змінних $\rho,\varphi$ через $\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x},\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y},\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y},\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}$, пригадавши, що $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\sin\varphi,\\
&\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}(-\rho\sin\varphi)+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\rho\cos\varphi,\\
&\frac{\partial v}{\partial\rho}=\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y}\sin\varphi=-\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\cos\varphi+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}\sin\varphi=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi},\\
&\frac{\partial v}{\partial\varphi}=\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y}\rho\cos\varphi=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\rho\sin\varphi+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}\rho\cos\varphi=\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}.
\end{aligned}$$

Тут ми скористались умовами Коші—Рімана для функцій $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ і першими двома рівностями. Доведемо формулу для похідної:

$$\begin{aligned}
f'(z)&=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}+i\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\\
&=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\varphi+\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\frac{\sin\varphi}{\rho}+i\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\cos\varphi-\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)=\\
&=\frac{\partial u}{\partial\rho}(\cos\varphi-i\sin\varphi)+\frac{\partial v}{\partial\rho}(\sin\varphi+i\cos\varphi)=\frac{\partial u}{\partial\rho}e^{-i\varphi}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}e^{-i\varphi},
\end{aligned}$$

в передостанній рівності ми скористалися умовами Коші—Рімана і тим, що $\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{\rho}$. ▶

**Приклад 5.4.** $\lhd$ Нехай $f(z)=\frac{1}{z}$. Довести, що $f\in\mathcal{A}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$. Крім того, $\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}$, $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. $\rhd$

 

*Розв'язання.* ◀ Нехай $z = \rho e^{i\varphi}$. Тоді $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ і

$$u(\rho,\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\rho}, \qquad v(\rho,\varphi) = -\frac{\sin\varphi}{\rho}, \qquad \rho > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що $u, v \in \mathcal{C}^\infty\Big((0,+\infty)\times\mathbb{R}\Big)$. Перевіримо, що виконуються умови Коші—Рімана в полярних координатах, див. (5.5):

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} = -\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{\partial v}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{\rho} = -\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}.$$

Знайдемо $f'(z), z \neq 0$, див. (5.6):

$$f'(z) = e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho} + i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi}{\rho^2} + i\frac{\sin\varphi}{\rho^2}\right) =$$
$$= -\frac{e^{-i\varphi}}{\rho^2}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = -\frac{e^{-2i\varphi}}{\rho^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

▶

***Завдання для класної роботи і домашні завдання.***

**162.** Показати, що умови Коші—Рімана для модуля та аргументу аналітичної функції $f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ можна подати у формі:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}. \tag{5.7}$$

Крім того, довести, що похідна функції $f(z)$ може бути записана наступним чином:

$$f'(z) = e^{i\Phi}\left(\frac{\partial R}{\partial x} + iR\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right). \tag{5.8}$$

**163.** Показати, що умови Коші—Рімана для модуля та аргументу аналітичної функції $f(z) = R(\rho,\varphi)e^{i\Phi(\rho,\varphi)}$ в полярних координатах можна подати у формі:

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\varphi} = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}. \tag{5.9}$$

Крім того, довести, що похідна функції $f(z)$ може бути записана наступним чином:

$$f'(z) = e^{i(\Phi-\varphi)}\left(\frac{\partial R}{\partial\rho} + iR\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right). \tag{5.10}$$

В прикладах 164–172 довести, що функція $f(z)$ є аналітичною на області визначення.

**164.** $f(z) = iz^2 - z$.
**165.** $f(z) = z^3 - ie^z$.
**166.** $f(z) = e^{z^2}$.
**167.** $f(z) = \sin z$
**168.** $f(z) = \operatorname{ch} z$
**169.** $f(z) = \operatorname{th} z$
**170.** $f(z) = \ln z$.
**171.** $f(z) = \arccos z$.
**172.** $f(z) = \operatorname{arctg} z$.

В прикладах 173–178 перевірити, чи буде функція $f(z)$ диференційовною хоча б в одній точці.

**173.** $f(z) = z^2\overline{z}$.
**174.** $f(z) = |z|\,\overline{z}$.
**175.** $f(z) = \sin z \operatorname{Re} z$.
**176.** $f(z) = \operatorname{ch} z \operatorname{Im} z$.
**177.** $f(z) = \cos \overline{z}$.
**178.** $f(z) = \ln \overline{z}$.

**179.** Довести, що всі елементарні функції є аналітичними на області визначення, обчислити їх похідні і показати, що при переході до функцій комплексного аргументу зберігається таблиця похідних:

**а)** $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$;

**б)** $(a^z)' = a^z \ln a$;

**в)** $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$;

**г)** $(\sin z)' = \cos z$;

**д)** $(\cos z)' = -\sin z$;

**е)** $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$;

**є)** $(\operatorname{ctg} z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$;

**ж)** $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$;

**з)** $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$;

**и)** $(\operatorname{th} z)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$;

**і)** $(\operatorname{cth} z)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$;

**ї)** $(\arcsin z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

**й)** $(\arccos z)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

**к)** $(\operatorname{arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$;

**л)** $(\operatorname{arcctg} z)' = -\dfrac{1}{1+z^2}$.

**180.** Знайти константи $a, b, c$, при яких функція $f(z)$ буде аналітичною:

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$,

b) $f(z) = \cos x\,(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x\,(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$.

**181.** Довести, що якщо аналітична функція $f(z)$ є дійсною в деякій області $D$, тоді $f(z) = \mathrm{const}$, $z \in D$.

**182.** Нехай функція $f(z) = u + iv = \rho e^{i\varphi}$ є аналітичною в області $D$. Довести, що якщо одна з функцій $u, v, \rho, \varphi$ тотожно дорівнює константі в цій області, тоді і функція $f(z)$ є константою в $D$.

**183.** Нехай функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ є аналітичною в області $D$. Довести, що в кожній точці цієї області виконується рівність

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

 

**184.** Нехай функція $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ є аналітичною в області $D$. Перевірити, що сім'ї ліній $\{u(x, y) = \text{const}\}$ і $\{v(x, y) = \text{const}\}$ є ортогональними.

**185.** Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною в області $D$ і $(s, n)$ — довільна пара ортогональних векторів, які мають додатну орієнтацію (поворот від вектора $s$ до вектора $n$ здійснюється проти годинникової стрілки). Довести, що похідні функцій $u$ і $v$ за напрямами $s$ і $n$ пов'язані між собою *умовами Коші—Рімана для довільного базису*:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{5.11}$$

## § 6. Геометрична інтерпретація аналітичної функції

Розглянемо відображення $w = f(z)$ площини $z$ на площину $w$. Нехай функція $f$ аналітична в точці $z_0$ і $f'(z_0) \neq 0$.

Модуль похідної $|f'(z_0)|$ дорівнює *коефіцієнту лінійного розтягнення* в точці $z_0$ при відображенні $w = f(z)$ площини $z$ на площину $w$. Точніше, при $|f'(z_0)| > 1$ має місце розтягнення, при $|f'(z_0)| < 1$ — стиснення в точці $z_0$ при відображенні $f$.

Аргумент похідної $\arg f'(z_0)$ дорівнює *куту повороту* в точці $z_0$ при відображенні $w = f(z)$ площини $w$ відносно площини $z$ (куту, на який потрібно повернути дотичну в точці $z_0$ до довільної гладкої кривої на площині $z$ для того, щоб отримати напрямок дотичної в точці $w_0 = f(z_0)$ до образу цієї кривої на площині $w$ при перетворенні $w = f(z)$). Якщо $\arg f'(z_0) > 0$, то поворот відбувається проти годинникової стрілки, якщо $\arg f'(z_0) < 0$ — за годинниковою стрілкою.

Нехай функція $f$ є аналітичною в області $D$. Розглянемо довільну кусково гладку криву $\Gamma$, яка лежить в $D$. Якщо функція $f$ взаємно однозначно відображає $\Gamma$ на криву $\Gamma^*$, тоді довжина $l(\Gamma^*)$ кривої $\Gamma^*$ дорівнює

$$l(\Gamma^*) = \int_\Gamma |f'(z)| \; |\mathrm{d}z| = \int_a^b |f'(z(t))| \; |z'(t)| \mathrm{d}t, \tag{6.1}$$

де $\Gamma = \{z = z(t) \; : \; t \in [a, b] \subset \mathbb{R}\}$ — параметризація кривої $\Gamma$. Зауважимо, що перший інтеграл є звичайним криволінійним інтегралом першого роду.

Нехай функція $f$ є аналітичною в області $D$ і взаємно однозначно відображає $D$ на $D^*$. Тоді площа $S(D^*)$ області $D^*$ дорівнює

$$S(D^*) = \iint_D |f'(z)|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.2}$$

Таким чином, $|f'(z_0)|^2$ дорівнює *коефіцієнту розтягнення площі* (коефіцієнту спотворення площі) в точці $z_0$ при відображенні $w = f(z)$.

Питання взаємної однозначності відображення є суттєвим для використання наведених результатів. В прикладі 6.2 показано, що при багатозначному відображенні можна отримати декілька образів одного й того самого об'єкта (кривої, області тощо).

При дослідженні питання, чи є відображення $f : D \to D^*$ взаємно однозначним, в деяких прикладах зручно користуватися результатами прикладів 32, 160.

**Приклад 6.1.** $\triangleleft$ Знайти коефіцієнт розтягнення і кут повороту комплексної площини в точці $z_0 = 1 - i$ при відображеннях

$$w_1 = i(z+1)^5, \qquad w_2 = \sin^2 z.$$

$\triangleright$

*Розв'язання.* ◀ Спочатку зауважимо, що кожне з відображень є аналітичним в точці $1-i$, див. задачу 179.

Знайдемо похідну першого відображення в точці $1-i$ :

$$w_1'|_{z=1-i} = 5i\,(z+1)^4\Big|_{z=1-i} = 5i\,(2-i)^4\,.$$

Знайдемо модуль і аргумент числа $5i\,(2-i)^4$, скориставшись властивостями модуля і аргументу комплексного числа:

$$|5i\,(2-i)^4\,| = |5i|\,(|2-i|)^4 = 5\cdot 25 = 125,$$
$$\arg\left(5i\,(2-i)^4\right) = \arg 5i + 4\arg(2-i) = \frac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} < 0.$$

Таким чином, при відображенні $w_1 = i(z+1)^5$ в точці $1-i$ комплексна площина розтягується в 125 разів і повертається на кут $\dfrac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}$.

Знайдемо похідну другого відображення в точці $1-i$:

$$\begin{aligned} w_2'|_{z=1-i} &= 2\sin z\cos z|_{z=1-i} = \sin 2z|_{z=1-i} = \sin(2-2i) = \\ &= \sin 2\cos(-2i) + \cos 2\sin(-2i) = \sin 2\,\mathrm{ch}\,2 - i\cos 2\,\mathrm{sh}\,2. \end{aligned}$$

В останній рівності ми скористалися результатами прикладів 109 і 110.

Знайдемо модуль і аргумент числа $\sin 2\,\mathrm{ch}\,2 - i\cos 2\,\mathrm{sh}\,2$, зауваживши, що це число лежить в першому квадранті:

$$|\sin 2\,\mathrm{ch}\,2 - i\cos 2\,\mathrm{sh}\,2| = \sqrt{\sin^2 2\,\mathrm{ch}^2\,2 + \cos^2 2\,\mathrm{sh}^2\,2} > 1,$$
$$\arg(\sin 2\,\mathrm{ch}\,2 - i\cos 2\,\mathrm{sh}\,2) = -\,\mathrm{arctg}\,(\mathrm{ctg}\,2\,\mathrm{th}2) > 0.$$

Таким чином, при відображенні $w_2 = \sin^2 z$ в точці $1-i$ комплексна площина розтягується в $\sqrt{\sin^2 2\,\mathrm{ch}^2\,2 + \cos^2 2\,\mathrm{sh}^2\,2}$ разів і повертається на кут $-\,\mathrm{arctg}\,(\mathrm{ctg}\,2\,\mathrm{th}2)$ . ▶

**Приклад 6.2.** $\triangleleft$ Обчислити довжини образів кривих

$$\Gamma_1 = \{z(t)\ :\ z(t) = (i+1)\,t,\ t\in[0,1]\}\,,$$
$$\Gamma_2 = \{z(t)\ :\ z(t) = (i+1)\,t,\ t\in[-1,1]\}$$

при відображенні $w = f(z) = z^2$. $\triangleright$

 

*Розв'язання.* ◀ Спочатку зауважимо, що $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ , див. задачу 179. Відображення $f : \Gamma_1 \to \Gamma_1^*$ (образ кривої $\Gamma_1$) є взаємно однозначним. Дійсно, при кожному значенні параметра $t$ образом точки $(i+1)\,t$ буде точка $(i+1)^2\,t^2 = 2it^2$. Образом $\Gamma_1$ буде $\Gamma_1^* = \left\{2it^2,\ t \in [0,1]\right\}$.

За допомогою (6.1) знайдемо довжину образу кривої $\Gamma_1$:

$$l(\Gamma_1^*) = \int\limits_{\Gamma_1} |2z|\ |\mathrm{d}z| = 2\int\limits_0^1 |(i+1)t|\ \ |i+1|\mathrm{d}t = 2|i+1|^2\int\limits_0^t t\mathrm{d}t = 2.$$

Розглянемо відображення $f : \Gamma_2 \to \Gamma_2^*$ (образ кривої $\Gamma_2$). Це відображення не є однозначним, оскільки образами точок $z_1 = z(t_1) = (i+1)t_1$ і $z_2 = z(-t_1) = -(i+1)t_1$ буде одна й та сама точка $w_1 = w_2 = 2it_1^2$. Розіб'ємо контур на два, в кожному з яких функція $w = f(z)$ буде однозначною, тобто подамо $\Gamma_2$ у вигляді $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, де

$$\Gamma_3 = \{z(t)\ :\ z(t) = -\,(i+1)\,t,\ t \in [0,1]\}\,.$$

Образ кривої $\Gamma_3$ дорівнює $\Gamma_3^* = \left\{2it^2,\ t \in [0,1]\right\}$, тобто співпадає з $\Gamma_1^*$. При цьому довжина $l(\Gamma_2^*) = l(\Gamma_1^*) = l(\Gamma_3^*) = 2$.

Зазначимо, що безпосереднє використання формули (6.1) дає хибну відповідь:

$$\int\limits_{\Gamma_2} |2z|\ |\mathrm{d}z| = 2\int\limits_{-1}^1 |(i+1)t|\ \ |i+1|\mathrm{d}t = 4.$$

▶

**Приклад 6.3.** ◁ Обчислити площі образів областей $D_1 = \Big\{\mathrm{Re}\,z \in (0,1),\ \mathrm{Im}\,z \in (0,1)\Big\}$ і $D_2 = \left\{|z| \in (1,2),\ \arg z \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ при відображенні $f(z) = z^3$. ▷

*Розв'язання.* ◀ Зауважимо, що $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, див. задачу 179. Відображення $f : D_1 \to D_1^*$ і $f : D_2 \to D_2^*$ ($D_1^*$ і $D_2^*$ — образи областей $D_1$ і $D_2$, відповідно) є взаємно однозначним, див. 32. Для знаходження площ областей $D_1^*$ і $D_2^*$ скористаємось формулою (6.2):

$$S(D_1^*) = \iint\limits_{D_1} |3z^2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\iint\limits_{D_1} \left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\int\limits_0^1 \mathrm{d}x\int\limits_0^1 \left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}y = \frac{28}{5},$$

$$S(D_2^*) = \iint\limits_{D_2} |3z^2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\iint\limits_{D_2} \left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\iint\limits_{D_2} \rho^5\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 9\int\limits_1^2 \rho^5\mathrm{d}\rho\int\limits_0^{\pi/3} \mathrm{d}\varphi = \frac{63\pi}{2}.$$

При обчисленні останнього інтегралу ми скористалися тим, що якобіан переходу до полярної системи координат: $\dfrac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)} = \rho$. ►

В прикладах 186–191 обчислити $|f'(z)|$ та $\arg f'(z)$. Яка частина комплексної площини стискається, а яка розширюється?

**186.** $f(z) = z^3$.

**187.** $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$.

**188.** $f(z) = e^{3z}$.

**189.** $f(z) = e^{iz} - 1$.

**190.** $f(z) = \dfrac{1}{z+3}$.

**191.** $f(z) = \dfrac{i+3z}{z+3i}$.

В прикладах 192–201 обчислити $|f'(a)|$ та $\arg f'(a)$. Стискається чи розширюється комплексна площина $\mathbb{C}$ в точці $a$?

**192.** $f(z) = \cos(5-z)$, $a = 3i+5$.

**193.** $f(z) = (5z-1)^2$, $a = i$.

**194.** $f(z) = (z-3i)^7$, $a = 1+2i$.

**195.** $f(z) = (z-2)^4 e^{i\pi/4}$, $a = 3+i$.

**196.** $f(z) = e^{iz-2}$, $a = 4-3i$.

**197.** $f(z) = \operatorname{tg} z$, $a = 3i-1$.

**198.** $f(z) = e^{z+\frac{5i}{z}}$, $a = i-2$.

**199.** $f(z) = \operatorname{cth}(2z+7i)$, $a = 1-4i$.

**200.** $f(z) = \dfrac{z^2+i}{z^2-i}$, $a = 1+2i$.

**201.** $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2}$, $a = 3-i$.

В прикладах 202–207 обчислити довжини образів кривих $\Gamma$ при зазначених відображеннях $w = f(z)$.

**202.** $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = it+1,\ t \in [0,1]\}$, $w = z^3$.

**203.** $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = t(1+2i),\ t \in [0,1]\}$, $w = z^4$.

**204.** $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = i+(i-1)t,\ t \in [0,1]\}$, $w = z^5$.

**205.** $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = it,\ t \in [0,2\pi]\}$, $w = e^z$.

**206.** $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = 6\pi t,\ t \in [0,1/6]\}$, $w = e^{iz}$.

**207.** $\Gamma = \left\{z(t) \ : \ z(t) = e^{2\pi i t},\ t \in [0,1/4]\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

**208.** Для заданих $\alpha \in \mathbb{C}$ і $n \geq 1$ обчислити довжину образу кривої

$$\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = \alpha t,\ t \in [0,1]\}$$

при відображенні $w = z^n$.

**209.** Для заданого $\alpha \in \mathbb{C}$ обчислити довжину образу кривої

$$\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = \alpha t,\ t \in [0,1]\}$$

при відображенні $w = e^z$.

**210.** Для заданого $\alpha \in \mathbb{C}$ обчислити довжину образу кривої

$$\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = \alpha t,\ t \in [0,1]\}$$

при відображенні $w = e^{iz}$.

 

В прикладах 211–216 обчислити площі образів областей $D$ при зазначених відображеннях $w = f(z)$.

**211.** $D = \{z \ : \ |z| < 5, \ 0 < \arg z < \pi/4\}$, $w = z^4$.

**212.** $D = \{z \ : \ 1 < |z| < 2, \ \pi/3 < \arg z < 2\pi/3\}$, $w = z^5$.

**213.** $D = \{z \ : \ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $w = e^{iz}$.

**214.** $D = \{z \ : \ \ln 2 < \operatorname{Re} z < \ln 3, \ -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$, $w = e^{2z+3i}$.

**215.** $D = \{z \ : \ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \ -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$, $w = z^5$.

**216.** $D = \{z \ : \ \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0, \ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1\}$, $w = 1 + iz^2$.

**217.** Знайти образ області $D = \{z \ : \ 1 < \operatorname{Re} z < 2, \ 0 < \operatorname{Im} z < 8\}$ при відображенні $w = e^z$. Обчислити площу образу $D$.

*Вказівка.* Зверніть увагу на те, що функція $w$ не є однозначною в області $D$, тому потрібно спочатку розбити $D$ на області однозначності.

## § 7. Гармонічні функції

Нехай $D$ — область в $\mathbb{R}^2$. Функція $u(x, y)$, $(x, y) \in D$ називається *гармонічною* в області $D$, якщо

а) функція $u$ двічі неперервно диференційовна в $D : u \in C^2(D)$,

б) функція $u$ задовольняє рівняння Лапласа в $D$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Через $\mathcal{H}(D)$ позначається множина всіх гармонічних функцій на області $D$.

Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною в області $D : f \in \mathcal{A}(D)$, тоді її дійсна частина $u(x, y)$ та уявна частина $v(x, y)$ є гармонічними в цій області функціями: $u, v \in \mathcal{H}(D)$. Якщо $\tilde{u}(x, y)$ і $\tilde{v}(x, y)$ — дві довільні гармонічні функції, то функція $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ не обов'язково є аналітичною функцією. Для аналітичності функції $\tilde{f}$ необхідно, щоб функції $\tilde{u}$ і $\tilde{v}$ задовольняли умови Коші—Рімана.

Функції $u(x, y)$, $v(x, y)$, $(x, y) \in D$ називаються парою спряжених гармонічних функцій (порядок функцій в парі суттєвий), якщо

а) $u, v$ є гармонічними в області $D : u, v \in \mathcal{H}(D)$,

б) $u, v$ задовольняють умови Коші—Рімана (5.2).

Для довільної аналітичної функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функції $u, v$ є парою спряжених гармонічних функцій зв'язаних між собою умовами Коші-Рімана (5.2). За заданою дійсною частиною $u(x, y)$ функції $f(z)$ можна відновити уявну частину $v(x, y)$ з точністю до константи.

**Приклад 7.1.** $\triangleleft$ Показати, якщо функція $u(x,y)$ є гармонічною в однозв'язній області $D$, то спряжена до неї гармонічна функція $v(x,y)$ може бути подана у вигляді криволінійного інтеграла:

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + c_0, \tag{7.1}$$

де $c_0$ — довільна дійсна стала. $\triangleright$

*Розв'язання.* ◀ Розглянемо функцію, що введена співвідношенням (7.1). З цієї формули випливатиме, що частинні похідні $v_x = -u_y$ та $v_y = u_x$, тобто зв'язані співвідношеннями Коші—Рімана, звідки функція $v(x,y)$ є спряженою до $u(x,y)$. ▶

За дійсною та уявною частинами ми можемо знайти явний вигляд аналітичної функції $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

На практиці зручним способом відновлення аналітичної функції за дійсною, або за уявною частинами, є *формули Гурса*:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2}, \frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right) - u(x_0,y_0) + ic_0, \tag{7.2}$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2}, \frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right) - iv(x_0,y_0) + c_0. \tag{7.3}$$

де $c_0$ — довільна дійсна стала.

Нехай дійсну і уявну частину аналітичної функції $f(z)$ подано в полярній системі координат: $f(z) = u(\rho,\varphi) + iv(\rho,\varphi)$. Тоді функції $u$ і $v$ є парою спряжених гармонічних функцій, зв'язаних між собою умовами Коші—Рімана в полярних координатах (5.5). При цьому функції $u$ і $v$ задовольняють рівняння Лапласа в полярних координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{7.4}$$

За заданою дійсною частиною $u(\rho,\varphi)$ функції $f(z)$ можна відновити уявну частину $v(\rho,\varphi)$ з точністю до константи.

**Приклад 7.2.** $\triangleleft$ Показати, якщо функція $u(\rho,\varphi)$ є гармонічною в однозв'язній області $D$, то спряжена до неї гармонічна функція $v(\rho,\varphi)$ може бути подана у вигляді криволінійного інтеграла:

$$v(\rho,\varphi) = \int\limits_{(\rho_0,\varphi_0)}^{(\rho,\varphi)} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathrm{d}\rho + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\mathrm{d}\varphi + c_0. \tag{7.5}$$

$\triangleright$

*Розв'язання.* ◀ Розглянемо функцію, що введена співвідношенням (7.5). З цієї формули випливатиме, що $\dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$ та $\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} = \rho\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$, тобто зв'язані співвідношеннями Коші—Рімана (5.5), звідки функція $v(\rho,\varphi)$ є спряженою до $u(\rho,\varphi)$. ▶

**Приклад 7.3.** ◁ За заданою дійсною частиною $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ знайти аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в області $\mathbb{R}^2\setminus\{x\le 0, y=0\}$. ▷

*Розв'язання.* ◀

I СПОСІБ. З аналітичності функції $f$ випливає, що функції $u$ і $v$ пов'язані між собою умовами Коші—Рімана. Скористаємось цим: $v_y=u_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Звідки

$$v(x,y)=\int\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+c(x)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+c(x).$$

Невідому функцію $c(x)$ знайдемо, скориставшись другою умовою Коші—Рімана:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}+c'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

звідки випливає, що $c'(x)=0$, тобто $c(x)=c_0=\mathrm{const}$. Таким чином,

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+c_0\right)=\ln|z|+i\left(\arg z+c_0\right)= \\ =\ln z+ic_0. \tag{7.6}$$

II СПОСІБ. Функцію $v$, яка є спряженою гармонічною функцією до функції $u$, можна знайти за допомогою криволінійного інтегралу (7.1). При обчисленні криволінійного інтеграла (7.1) зручно подати його як суму двох дійсних інтегралів (перший інтеграл є інтегралом уздовж контуру $\Gamma_1$, другий — вздовж $\Gamma_2$, див. рис.7):

$$v(x,y)=-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y}\mathrm{d}x+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y+c_1, \tag{7.7}$$

де $c_1$ — стала (див. рис. 7).

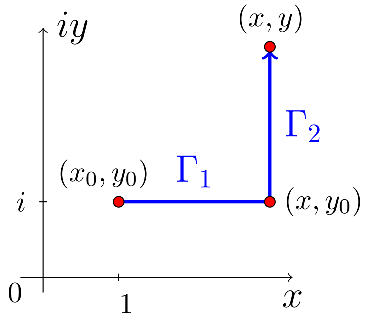

Рис. 7: До прикладу 7.3

Оберемо початкову точку $(x_0,y_0)=(1,1)$. Підставивши значення частинних похідних $u_x$ і $u_y$, маємо

$$v(x,y)=-\int\limits_{1}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+x\int\limits_{1}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+c_1= \\ =\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{\pi}{4}+c_1=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+c_0, \qquad c_0=c_1+\frac{\pi}{4}=\mathrm{const}.$$

Звідки для $f(z)=u+iv$ маємо остаточно (7.6).

III СПОСІБ. Скористаємося формулою Гурса (7.2), обравши $z_0 = i$:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z-i}{2}, \frac{z+i}{2i}\right) - u(0,1) + ic_0 = 2\,\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{z-i}{2}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{2i}\right)^2\right) - \\ - \frac{\ln 1}{2} + ic_0 = \ln(-iz) + ic_0 = \ln z + ic_0.$$

►

***Завдання для класної роботи і домашні завдання.***

В прикладах 218–224 довести співвідношення.

**218.** Довести, якщо функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ є аналітичною в області $D$, то функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ є парою спряжених гармонічних функцій в цій області. Аналогічно, показати, що функції $A(x,y) = \ln R(x,y)$ та $\Phi(x,y)$ також є парою спряжених гармонічних функцій. Показати, що $R(x,y)$ не є гармонічною, взагалі кажучи.

**219.** Показати, якщо функція $v(x,y)$ є гармонічною в однозв'язній області $D$, то спряжена до неї гармонічна функція $u(x,y)$ може бути подана у вигляді криволінійного інтегралу:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y \ + c_0. \tag{7.8}$$

**220.** Показати, якщо функція $v(\rho,\varphi)$ є гармонічною в однозв'язній області $D$, то спряжена до неї гармонічна функція $u(\rho,\varphi)$ може бути подана у вигляді криволінійного інтеграла:

$$u(\rho,\varphi) = \int\limits_{(\rho_0,\varphi_0)}^{(\rho,\varphi)} \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\mathrm{d}\rho - \rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\mathrm{d}\varphi + c_0. \tag{7.9}$$

**221.** Показати, якщо функція $A(x,y) = \ln R(x,y)$ є гармонічною в однозв'язній області $D$, то гармонічна функція $\Phi(x,y)$, яка є аргументом аналітичної функції $f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}y + c_0 = \\ &= \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial A}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{d}y + c_0.\end{aligned} \tag{7.10}$$

 

**222.** Показати, якщо функція $\Phi(x,y)$ є гармонічною в однозв'язній області $D$, то функція $R(x,y)$, яка є модулем аналітичної функції $f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ може бути подана у вигляді:

$$R(x,y) = c_0 \exp\left\{ \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}y \right\}, \tag{7.11}$$

де $c_0$ — довільна додатна стала.

**223.** Показати, якщо функція $A(\rho,\varphi) = \ln R(\rho,\varphi)$ є гармонічною в однозв'язній області $D$, то гармонічна функція $\Phi(\rho,\varphi)$, яка є аргументом аналітичної функції $f(z) = R(\rho,\varphi)e^{i\Phi(\rho,\varphi)}$ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho,\varphi) &= \int\limits_{(\rho_0,\varphi_0)}^{(\rho,\varphi)} -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial R}{\partial\varphi}\mathrm{d}\rho + \frac{\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial\rho}\mathrm{d}\varphi + c_0 = \\ &= \int\limits_{(\rho_0,\varphi_0)}^{(\rho,\varphi)} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial\varphi}\mathrm{d}\rho + \rho\frac{\partial A}{\partial\rho}\mathrm{d}\varphi + c_0. \end{aligned} \tag{7.12}$$

**224.** Показати, якщо функція $\Phi(\rho,\varphi)$ є гармонічною в однозв'язній області $D$, то функція $R(\rho,\varphi)$, яка є модулем аналітичної функції $f(z) = R(\rho,\varphi)e^{i\Phi(\rho,\varphi)}$ може бути подана у вигляді:

$$R(\rho,\varphi) = c_0 \exp\left\{ \int\limits_{(\rho_0,\varphi_0)}^{(\rho,\varphi)} \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathrm{d}\rho - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathrm{d}\varphi \right\}, \tag{7.13}$$

де $c_0$ — довільна додатна стала.

В прикладах 225–232 відновити аналітичну функцію $f(z)$ за відомою дійсною $u(x,y)$ або уявною частиною $v(x,y)$ та значенням $f(z_0)$, див. (7.2), (7.3).

**225.** $u(x,y) = e^x\left[(x+1)\cos y - y\sin y\right], \quad f(-1) = 0.$

**226.** $u(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2}, \quad f(i-1) = -2.$

**227.** $u(x,y) = \dfrac{x}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - y\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad f(1) = 0.$

**228.** $u(x,y) = e^{x^3-3xy^2}\cos\left(3x^2y - y^3\right), \quad f(0) = 1.$

**229.** $v(x,y) = \sin x \operatorname{sh} y, \quad f(i\pi) = -\operatorname{ch}\pi.$

**230.** $v(x,y) = y\operatorname{sh}x\cos y + x\operatorname{ch}x\sin y, \quad f(0) = 0.$

**231.** $v(x,y) = y - \dfrac{y}{x^2+y^2}, \quad f(i) = 0.$

**232.** $v(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y-5}{x-4}$, $\quad f(5+5i) = 0$.

В прикладах 233–240 перевірити умову гармонічності функції $u(x,y)$. Якщо $u(x,y)$ є гармонічною, то вважати її дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$. Знайти уявну частину $v(x,y)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму аналітичну функцію $f(z)$.

**233.** $u(x,y) = 2xy + x$.
**234.** $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2y - 1$.
**235.** $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 3x^2y + y^3 + 3y - 1$.
**236.** $u(x,y) = \cos x \operatorname{ch}(y-1)$.
**237.** $u(x,y) = x/(x^2 + y^2)$.
**238.** $u(x,y) = 3x + x^2 - y^2$.
**239.** $u(x,y) = \exp(x^2 - y^2)\cos(2xy)$.
**240.** $u(x,y) = e^{xy}\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)$.

В прикладах 241–248 перевірити умову гармонічності функції $v(x,y)$. Якщо $v(x,y)$ гармонічна, то вважати її уявною частиною аналітичної функції $f(z)$. Знайти дійсну частину $u(x,y)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму аналітичну функцію $f(z)$.

**241.** $v(x,y) = 4x^2 + 6xy - 4y^2$.
**242.** $v(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3$.
**243.** $v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$.
**244.** $v(x,y) = x\operatorname{sh} x \sin y + y\operatorname{ch} x \cos y$.
**245.** $v(x,y) = \cos(x-y)\operatorname{sh}(x+y)$.
**246.** $v(x,y) = \frac{x}{x^2+(y+1)^2}$.
**247.** $v(x,y) = e^{-2x(y-1)}\sin(x^2 - y^2 + 2y)$.
**248.** $v(x,y) = e^{-2y}\sin(2x+1)$.

В прикладах 249–256 перевірити умову гармонічності функції $u(\rho,\varphi)$. Якщо $u(\rho,\varphi)$ гармонічна, то вважати її дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$. Знайти уявну частину $v(\rho,\varphi)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму аналітичну функцію $f(z)$.

**249.** $u(\rho,\varphi) = \rho^2\cos 2\varphi + \rho\sin\varphi + 1$.
**250.** $u(\rho,\varphi) = \dfrac{7\cos\varphi}{\rho} - \rho\sin\varphi$.
**251.** $u(\rho,\varphi) = \rho\exp(\rho\cos\varphi)\cos(\varphi + \rho\sin\varphi)$.
**252.** $u(\rho,\varphi) = \varphi + \ln\rho$.
**253.** $u(\rho,\varphi) = \dfrac{2\sin 3\varphi + \cos 3\varphi}{\rho^3}$.
**254.** $u(\rho,\varphi) = \rho\ln\rho\cos\varphi - \rho\varphi\sin\varphi$.
**255.** $u(\rho,\varphi) = -\rho^n\sin n\varphi$, $n\in\mathbb{N}$.
**256.** $u(\rho,\varphi) = \rho^3(2\cos 3\varphi - \sin 3\varphi)$.

В прикладах 257–264 перевірити умову гармонічності функції $v(\rho,\varphi)$. Якщо $v(\rho,\varphi)$ гармонічна, то вважати її уявною частиною аналітичної функції $f(z)$. Знайти дійсну частину $u(\rho,\varphi)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму аналітичну функцію $f(z)$.

**257.** $v(\rho,\varphi) = (\rho + 1/\rho)\cos\varphi$.
**258.** $v(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi - \varphi$.
**259.** $v(\rho,\varphi) = \rho(\sin\varphi + 2\cos\varphi)$.
**260.** $v(\rho,\varphi) = \rho^2(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)$.
**261.** $v(\rho,\varphi) = e^{-\rho\sin\varphi}\cos(\rho\cos\varphi)$.
**262.** $v(\rho,\varphi) = \dfrac{2\cos\varphi - 3\sin\varphi}{\rho}$.
**263.** $v(\rho,\varphi) = \dfrac{\cos n\varphi - n\sin n\varphi}{n\rho^n}$, $n\in$

 

$\mathbb{N}$.

**264.** $v(\rho,\varphi) = e^{\rho\cos\varphi}\big[\sin(\rho\sin\varphi) - \cos(\rho\sin\varphi)\big]$.

В прикладах 265–272 перевірити умову гармонічності функції $A(x,y)$. Якщо $A(x,y)$ гармонічна, то вважати функцію $R(x,y) = \exp[A(x,y)]$ модулем $|f(z)|$ аналітичної функції $f(z)$. Знайти аргумент $\arg f(z) = \Phi(x,y)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму функцію $f(z)$.

**265.** $A(x,y) = 7x - 3y$.

**266.** $A(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

**267.** $A(x,y) = \ln\big[4x^2 + (2y+1)^2\big]$.

**268.** $A(x,y) = e^{x-y}\cos(x+y)$.

**269.** $A(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$.

**270.** $A(x,y) = 3xy + 2\ln(x^2+y^2)$.

**271.** $A(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \ln(x^2+y^2+2x+1)$.

**272.** $A(x,y) = n\ln(x^2+y^2) + m(x-y)$, $m,n\in\mathbb{N}$.

В прикладах 273–280 перевірити умову гармонічності функції $\Phi(x,y)$. Якщо $\Phi(x,y)$ гармонічна, то вважати її аргументом $\arg f(z)$ аналітичної функції $f(z)$. Знайти модуль $|f(z)| = R(x,y)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму функцію $f(z)$.

**273.** $\Phi(x,y) = 2x + 3y$.

**274.** $\Phi(x,y) = 3xy - x + 2y$.

**275.** $\Phi(x,y) = e^y\sin x$.

**276.** $\Phi(x,y) = 3x^2y - y^3$.

**277.** $\Phi(x,y) = 6\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2y+1}{2x}$.

**278.** $\Phi(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

**279.** $\Phi(x,y) = \ln\big[(x+2)^2 + (y+3)^2\big]$.

**280.** $\Phi(x,y) = e^{x^2-y^2}\big[x\sin(2xy) + y\cos(2xy)\big]$.

В прикладах 281–288 перевірити умову гармонічності функції $A(\rho,\varphi)$. Якщо вона гармонічна, то вважати функцію $R(\rho,\varphi) = \exp(A(\rho,\varphi))$ модулем $|f(z)|$ аналітичної функції $f(z)$. Знайти аргумент $\arg f(z) = \Phi(\rho,\varphi)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму функцію $f(z)$.

**281.** $A(\rho,\varphi) = \ln 5 - 7\ln\rho$

**282.** $A(\rho,\varphi) = \rho^2\cos 2\varphi$.

**283.** $A(\rho,\varphi) = \dfrac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\rho}$.

**284.** $A(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi + \ln\rho$.

**285.** $A(\rho,\varphi) = e^{\rho\cos\varphi}\sin(\rho\sin\varphi)$

**286.** $A(\rho,\varphi) = \rho^3\cos 3\varphi + 3\rho^2\cos 2\varphi + 3\rho\cos\varphi + 1$.

**287.** $A(\rho,\varphi) = \ln\Big[(\ln\rho)^2 + \varphi^2\Big]$.

**288.** $A(\rho,\varphi) = \dfrac{n\sin m\varphi}{\rho^m}$, $n,m\in\mathbb{N}$

В прикладах 289–296 перевірити умову гармонічності функції $\Phi(\rho,\varphi)$. Якщо $\Phi(\rho,\varphi)$ гармонічна, то вважати її аргументом $\arg f(z)$ аналітичної функції $f(z)$. Знайти модуль $|f(z)| = R(\rho,\varphi)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму функцію $f(z)$.

**289.** $\Phi(\rho,\varphi) = \varphi + \rho\cos\varphi$.

**290.** $\Phi(\rho,\varphi) = 3\rho\sin\varphi + 5\ln\rho$.

**291.** $\Phi(\rho,\varphi) = \rho^2\sin 2\varphi + 2\rho\cos\varphi$.

**292.** $\Phi(\rho,\varphi) = \rho^n\sin n\varphi$, $n\in\mathbb{N}$.

**293.** $\Phi(\rho, \varphi) = \sin(\rho \sin \varphi) e^{\rho \cos \varphi}$.
**294.** $\Phi(\rho, \varphi) = \varphi^2 - \ln^2 \rho$.
**295.** $\Phi(\rho, \varphi) = n \operatorname{arctg} \left( \dfrac{\varphi}{\ln \rho} \right)$, $n \in \mathbb{N}$.
**296.** $\Phi(\rho, \varphi) = e^{-\rho \sin \varphi} \big[ \cos(\varphi_0 - \rho \cos \varphi) + \sin(\varphi_0 - \rho \cos \varphi) \big]$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$.

## § 8. Інтеграл від функції комплексної змінної

Нехай на $D \subset \mathbb{C}$ задана однозначна неперервна функція $f(z), z \in D$, і $\Gamma$ — це деяка кусково-гладка орієнтована жорданова крива в $D$. Позначимо

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

де $u(x, y), v(x, y)$ — дійсні функціі змінних $x$ і $y$, дійсна та уявна частини функції $f(z)$.

Обчислення *інтеграла* $\int_\Gamma f(z) \mathrm{d}z$ вздовж кривої $\Gamma$ зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів другого роду функції дійсної змінної, а саме,

$$\begin{aligned} \int\limits_\Gamma f(z) \mathrm{d}z &= \int\limits_\Gamma \left[ u(x, y) + iv(x, y) \right] (\mathrm{d}x + i \mathrm{d}y) = \\ &= \int\limits_\Gamma u(x, y) \mathrm{d}x - v(x, y) \mathrm{d}y + i \int\limits_\Gamma u(x, y) \mathrm{d}y + v(x, y) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Виявляється, що для неаналітичної функції інтеграл $\int\limits_\Gamma f(z) \mathrm{d}z$ залежить від шляху інтегрування $\Gamma$.

Обчислення інтеграла $\int\limits_\Gamma f(z) \left| \mathrm{d}z \right|$ зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів першого роду функцій дійсних змінних, а саме,

$$\int\limits_\Gamma f(z) \left| \mathrm{d}z \right| = \int\limits_\Gamma u(x, y) \mathrm{d}l + i \int\limits_\Gamma v(x, y) \mathrm{d}l. \tag{8.2}$$

Якщо крива $\Gamma$ задана параметрично

$$\Gamma = \left\{ z(t) \ : \ z(t) = x(t) + iy(t), \ t \in [a, b] \right\},$$

 

тоді

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f\left(z(t)\right) z'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f\left(x(t)+iy(t)\right)\left(x'(t)+iy'(t)\right)\mathrm{d}t, \tag{8.3}$$

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\left|\mathrm{d}z\right| = \int\limits_a^b f\left(z(t)\right)\left|z'(t)\right|\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_a^b f\left(x(t)+iy(t)\right)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t. \tag{8.4}$$

В частинному випадку, коли $\Gamma$ — це відрізок з початком в точці $z_1 = x_1 + iy_1$ і кінцем в точці $z_2 = x_2 + iy_2$, тоді зручно використовувати таку параметризацію

$$\begin{aligned}\Gamma = \{z(t)\ :\ z(t) &= (1-t)z_1 + tz_2 = \\ &= (1-t)x_1 + tx_2 + i\left((1-t)y_1 + ty_2\right),\ t\in[0,1]\}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

Якщо $\Gamma$ — це коло з центром в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ і радіуса $R$ (позначення $\Gamma = \{z\ :\ |z-z_0| = R\}$), тоді зручно використовувати таку параметризацію

$$\Gamma = \left\{z(t)\ :\ z(t) = z_0 + Re^{it} = x_0 + R\cos t + i\left(y_0 + R\sin t\right),\ t\in[0,2\pi)\right\}. \tag{8.6}$$

Наведемо деякі властивості інтеграла (8.1) у випадку аналітичної підінтегральної функції $f\in\mathcal{A}(D)$.

Згідно з інтегральною теоремою Коші інтеграл від аналітичної функції по замкненому контуру, що належить області аналітичності, дорівнює нулеві:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \text{якщо } f(z)\in\mathcal{A}(D),\ \Gamma\subset D. \tag{8.7}$$

Як наслідок, інтеграл від аналітичної функції не залежить від шляху інтегрування, тобто для будь-яких кривих $\Gamma_k$, що належать області $D$ та мають спільні кінці:

$$\Gamma_k = \{z(t)\ :\ t\in[0,1], z(0) = z_1, z(1) = z_2\}\subset D, \tag{8.8}$$

інтеграл приймає одне й те саме значення:

$$\int\limits_{\Gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z. \tag{8.9}$$

Для функції $f(z)$, яка є аналітичною в однозв'язній області $D$, має місце формула Ньютона—Лейбніца:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \tag{8.10}$$

тут $\Phi(z)$ — довільна первісна функції $f(z)$, тобто $\Phi'(z) = f(z)$ в області $D$.

Якщо $f(z)$ і $g(z)$ є аналітичними в однозв'язній області $D$, тоді має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = [f(z)g(z)]\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z)f'(z)\mathrm{d}z \tag{8.11}$$

для довільних $z_1, z_2 \in D$.

Заміна змінних в інтегралах від функції комплексної змінної відбувається аналогічно випадку функції дійсної змінної. Нехай аналітична функція $z = g(w)$ відображає взаємно однозначно контур $\Gamma_1$ в $w$-площині на контур $\Gamma$ в $z$-площині. Тоді

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f[g(w)]g'(w)\mathrm{d}w.$$

При обчисленні інтегралів від багатозначних функції будемо виділяти вітку цієї функції. Це можна зробити, наприклад, завдавши значення багатозначної функції в деякій точці контуру інтегрування.

*Зауваження.* В усіх задачах, де контур $\Gamma$ замкнений, вважаємо, що обхід контуру відбувається проти годинникової стрілки.

**Приклад 8.1.** $\triangleleft$ Обчислити інтеграл

$$I_k = \int_{\Gamma_k} (2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1)\, \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1$ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 - 2i$;

**б)** $\Gamma_2$ — це частина параболи, яка з'єднує точки $z_1$ і $z_2$, за умови, що задана парабола має вершину в точці $z_1$ і є симетричною відносно уявної осі;

**в)** $\Gamma_3$ — це ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 1$.

$\triangleright$

*Розв'язання.* ◀

 

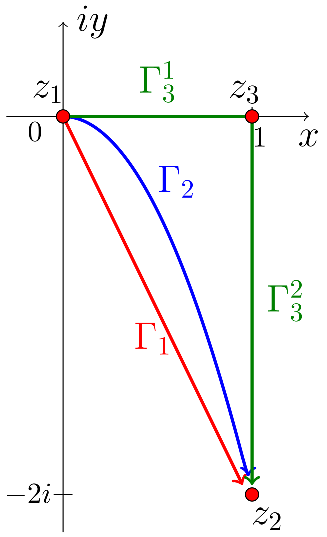


Рис. 8: До прикладу 8.1

Кожна з кривих $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ або $\Gamma_3$ — це лінія, яка з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 - 2i$ по різних траєкторіях. Оскільки підінтегральна функція не є аналітичною, інтеграл залежить від шляху інтегрування, і природно очікувати в кожній ситуації різні відповіді.

**а)** Параметризуємо $\Gamma_1$ аналогічно до (8.5):

$$\Gamma_1 = \{z(t)\ :\ z(t) = (1-2i)\,t, \quad t \in [0,1]\}\,.$$

Тоді $\mathrm{d}z = (1-2i)\,\mathrm{d}t$,

$$2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1 = 2\,(1+2i)\,t + 2t + 1 = 4\,(1+i)\,t + 1,$$

де при знаходженні останнього виразу ми скористалися тим, що параметр $t$ є дійсним.

Обчислимо інтеграл, див. (8.3):

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma_1} (2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1)\,\mathrm{d}z = (1-2i)\int\limits_0^1 (4\,(1+i)\,t + 1)\,\mathrm{d}t =$$

$$= (1-2i)\left(2\,(1+i)\,t^2 + t\right)\Big|_0^1 = (1-2i)\,(2\,(1+i)+1) = 7 - 4i.$$

**б)** Параметризуємо $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_2 = \left\{ z(t)\ :\ z(t) = x(t) + iy(t) = \left| \begin{matrix} x(t) = t, \\ y(t) = -2t^2 \end{matrix} \right| = t - 2t^2 i, \quad t \in [0,1] \right\}.$$

Тоді $\mathrm{d}z = (1 - 4ti)\,\mathrm{d}t$,

$$2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1 = 2\left(t + 2t^2 i\right)t + 2t^2 + 1 = (2+4i)\,t^2 + 2t + 1,$$

при знаходженні останнього виразу, ми скористалися тим, що параметр $t$ — дійсний.

Обчислимо інтеграл, див. (8.3):

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma_2} (2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \left((2+4i)\,t^2 + 2t + 1\right)(1-4ti)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^1 \left((16-8i)\,t^3 + (2-4i)\,t^2 + (2-4i)\,t + 1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left((4-2i)\,t^4 + \frac{2-4i}{3}t^3 + (1-2i)\,t^2 + t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{20}{3} - \frac{16}{3}i.$$

**в)** Позначимо через $\Gamma_3^1$ відрізок $z_1 z_3$, через $\Gamma_3^2$ — відрізок $z_3 z_2$ (див. рис. 8).

Ламана $\Gamma_3$ є об'єднанням цих відрізків $\Gamma_3 = \Gamma_3^1 \bigcup \Gamma_3^2$ і

$$I_3 = \int\limits_{\Gamma_3^1} (2\bar z - \operatorname{Im} z + 1)\, \mathrm{d}z + \int\limits_{\Gamma_3^2} (2\bar z - \operatorname{Im} z + 1)\, \mathrm{d}z.$$

Параметризуємо $\Gamma_3^1$ аналогічно (8.5):

$$\Gamma_3^1 = \{z(t)\ :\ z(t) = t, \quad t \in [0,1]\}.$$
Тоді $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t, \qquad 2\bar z - \operatorname{Im} z + 1 = 2t + 1.$

Параметризуємо $\Gamma_3^2$ аналогічно (8.5):

$$\Gamma_3^2 = \{z(t)\ :\ z(t) = 1 - 2ti, \quad t \in [0,1]\}.$$
Тоді $\mathrm{d}z = -2i\mathrm{d}t, \quad 2\bar z - \operatorname{Im} z + 1 = 2(1 + 2it) + 2t + 1 = (2 + 4i)\, t + 3.$

Обчислимо інтеграл, див. (8.3):

$$I_3 = \int\limits_0^1 (2t + 1)\, \mathrm{d}t - 2i \int\limits_0^1 ((2 + 4i)\, t + 3)\, \mathrm{d}t =$$
$$= \left(t^2 + t\right)\Big|_0^1 - 2i\left((1 + 2i)\, t^2 + 3t\right)\Big|_0^1 = 6 - 8i.$$

►

**Приклад 8.2.** ◁ Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_\Gamma \left(z^3 - z\bar z^2\right) \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \left\{z\ :\ |z| = 1, -\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$. ▷

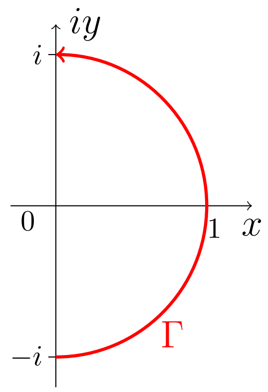


Рис. 9: До прикладу 8.2

*Розв'язання.* ◄ Зауважимо, що підінтегральна функція не є аналітичною, інтеграл залежить від шляху інтегрування.

Параметризуємо $\Gamma$ аналогічно (8.6):

$$\Gamma = \left\{z(t)\ :\ z(t) = e^{it}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$
Тоді $\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t, \qquad z^3 - z\bar z^2 = e^{3it} - e^{it}e^{-2it} = e^{3it} - e^{-it}.$

Обчислимо інтеграл, див. (8.3):

$$I = \int\limits_{\Gamma} \left(z^3 - z\bar{z}^2\right) \mathrm{d}z = i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{3it} - e^{-it}\right) e^{it} \mathrm{d}t = i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{4it} - 1\right) \mathrm{d}t =$$
$$= i \left( \frac{e^{4it}}{4i} - t \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -i\pi.$$

►

**Приклад 8.3.** ◁ Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} \cos\bar{z} \left|\mathrm{d}z\right|,$$

якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = i\pi$ і $z_2 = -2\pi - i\pi$. ▷

*Розв'язання.* ◄

Цей інтеграл визначається формулою (8.2). Параметризуємо $\Gamma$ аналогічно (8.5):

$$\Gamma = \left\{ z(t) \ : \ z(t) = \pi i + (-2\pi - 2\pi i)\, t, \quad t \in [0, 1] \right\}.$$

Тоді $|\mathrm{d}z| = |-2\pi - 2\pi i|\, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2}\mathrm{d}t$,
$\bar{z} = -\pi i + (-2\pi + 2\pi i)\, t$.

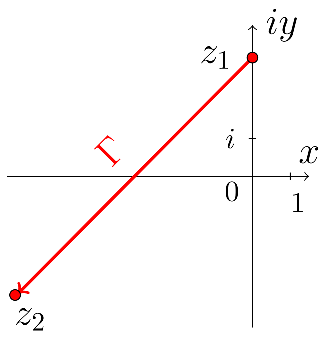


Рис. 10: До прикладу 8.3

Обчислимо інтеграл, див. (8.4):

$$I = \int\limits_{\Gamma} \cos\bar{z} \left|\mathrm{d}z\right| = 2\pi\sqrt{2} \int\limits_{0}^{1} \cos\left(-\pi i + (-2\pi + 2\pi i)\, t\right) \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{2\pi\sqrt{2}}{-2\pi + 2\pi i} \sin\left(-\pi i + (-2\pi + 2\pi i)\, t\right) \Big|_{0}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{i-1} \left(\sin\left(\pi i - 2\pi\right) + \sin \pi i\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\,(-i-1)}{2} \cdot 2\sin\pi i = \sqrt{2}\,(-i-1)\, i \operatorname{sh}\pi = \sqrt{2} \operatorname{sh}\pi(1-i).$$

►

**Приклад 8.4.** ◁ Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \left(z^2 + \sin^2 z\right) \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1 = \{z \ : \ |z| = 1\}$;

**б)** $\Gamma_2$ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = -1$ і $z_2 = i$;

**в)** $\Gamma_3 = \left\{z \ : \ |z| = 1, -\pi \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

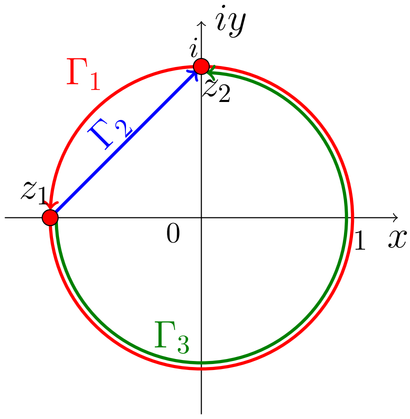


Рис. 11: До прикладу 8.4

▷

*Розв'язання.* ◀ Зауважимо, що підінтегральна функція $f(z) = z^2 + \sin^2 z$ всюди є аналітичною $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ (див. задачу 179).

**а)** Оскільки $\Gamma_1$ — це замкнена крива, а підінтегральна фукція є аналітичною, то за інтегральною теоремою Коші, див. (8.7), випливає, що

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma_1} \left(z^2 + \sin^2 z\right) \mathrm{d}z = 0.$$

**б)** Застосуємо формулу Ньютона—Лейбніца (8.10):

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \left(z^2 + \sin^2 z\right) \mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{i} \left(z^2 + \sin^2 z\right) \mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{i} \left(z^2 + \frac{1 - \cos 2z}{2}\right) \mathrm{d}z =$$
$$= \left(\frac{z^3}{3} + \frac{z}{2} - \frac{\sin 2z}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{i} = -\frac{i}{3} + \frac{i}{2} - \frac{\sin 2i}{4} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\sin 2}{4}\right) =$$
$$= \frac{5}{6} + \frac{\sin 2}{4} + i\left(\frac{1}{6} - \frac{\operatorname{sh} 2}{4}\right).$$

**в)** Криві $\Gamma_2$ і $\Gamma_3$ мають однакові початки і кінці, а підінтегральна фукція є аналітичною, тому інтеграл не залежить від шляху інтегрування, див. (8.9), звідки

$$I_3 = I_2 = \frac{5}{6} + \frac{\sin 2}{4} + i\left(\frac{1}{6} - \frac{\operatorname{sh} 2}{4}\right).$$

▶

**Приклад 8.5.** ◁ Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} z e^z \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma$ — це деякий кусково-гладкий контур, який з'єднує точки $z_1 = i\pi$ і $z_2 = \pi$. ▷

 

*Розв'язання.* ◀ Зауважимо, що підінтегральна функція $f(z) = ze^z$ всюди є аналітичною $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, тому можна застосувати формулу (8.11) інтегрування частинами:

$$I = \int_\Gamma ze^z \mathrm{d}z = \int_{i\pi}^{\pi} ze^z \mathrm{d}z = (ze^z)\Big|_{i\pi}^{\pi} - \int_{\pi i}^{\pi} e^z \mathrm{d}z =$$
$$= \pi e^\pi - i\pi e^{i\pi} - e^z\Big|_{i\pi}^{\pi} = \pi e^\pi + i\pi - e^\pi - 1 =$$
$$= e^\pi(\pi - 1) - 1 + i\pi.$$

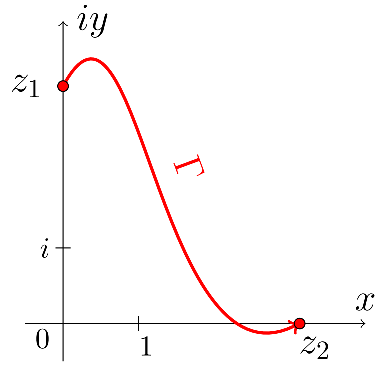


Рис. 12: До прикладу 8.5

▶

**Приклад 8.6.** ◁ Обчислити інтеграл

$$I = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}},$$

якщо $\Gamma = \left\{|z| = 4, -\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$, за умови $\sqrt{4} = -2$. ▷

*Розв'язання.* ◀ Параметризуємо $\Gamma$ аналогічно (8.6):

$$\Gamma = \left\{z(t) = 4e^{it}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Тоді $\quad \mathrm{d}z = 4ie^{it}\mathrm{d}t, \qquad \dfrac{1}{\sqrt{z}} = \dfrac{1}{2e^{i(t+2\pi k)/2}}, \quad k = 0, 1.$

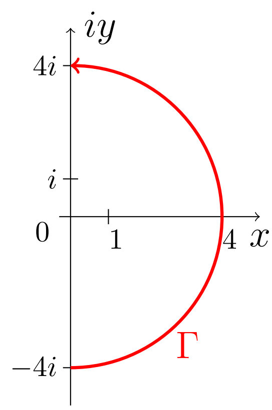


Рис. 13: До прикладу 8.6

Підінтегральна функція $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$ є багатозначною. Інтегрувати будемо ту вітку, яка визначається умовою

$$\sqrt{4} = \sqrt{4e^{i\cdot 2\pi k}} = 2e^{i\pi k} = -2,$$

звідки $k = 1$.

Обчислимо інтеграл, див. (8.3):

$$I = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = 4i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{it}\mathrm{d}t}{2e^{i(t+2\pi)/2}} = 2ie^{-i\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{it/2}\mathrm{d}t =$$

$$= -2i\left(\frac{2}{i}e^{it/2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -4\left(e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}\right) = -4 \cdot 2i \sin\frac{\pi}{4} = -4\sqrt{2}i.$$

▶

**Приклад 8.7.** ◁ Обчислити інтеграл

$$I = \int_\Gamma z^2 \operatorname{Ln} z \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1\}$, за умови $\mathrm{Ln}(-1) = -i\pi$. ▷

*Розв'язання.* ◀ Параметризуємо $\Gamma$ аналогічно (8.6):

$$\Gamma = \left\{z(t) \ : \ z(t) = e^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi]\right\}.$$

Тоді $\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t, \qquad z^2 \,\mathrm{Ln}\, z = e^{2it} i\,(t + 2\pi k)\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$

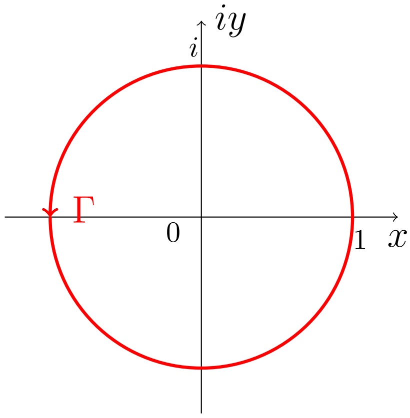


Рис. 14: До прикладу 8.7

Підінтегральна функція $\mathrm{Ln}\, z$ є багатозначною. Інтегрувати будемо ту вітку, яка визначається умовою

$$\mathrm{Ln}(-1) = \mathrm{Ln}\, e^{i(\pi+2\pi k)} = i(\pi + 2\pi k) = -i\pi,$$

тобто $k = -1$.

Обчислимо інтеграл, див. (8.3):

$$I = \int\limits_{\Gamma} z^2 \,\mathrm{Ln}\, z \mathrm{d}z = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} (t - 2\pi)\, e^{3it}\mathrm{d}t = -\,(t - 2\pi)\,\frac{e^{3it}}{3i}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{3it}}{3i}\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{3i}\left(-\pi e^{3i\pi} + 3\pi e^{-3i\pi}\right) + \frac{e^{3it}}{(3i)^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{3} i\pi.$$

▶

**297.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} (3\bar{z} - 2\,\mathrm{Re}\, z)\,\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1$ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = 1 - i$ і $z_2 = 0$;

**б)** $\Gamma_2$ — це частина параболи, яка з'єднує точки $z_1$ і $z_2$, за умови, що задана парабола має вершину в $z_2$ і є симетричною відносно уявної осі;

**в)** $\Gamma_3$ — це ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 1$.

**298.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} (\mathrm{Im}\, z - z + 2\bar{z})\,\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1$ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 2i - 3$;

**б)** $\Gamma_2$ — це частина параболи, яка з'єднує точки $z_1$ і $z_2$, за умови, що задана парабола має вершину в $z_1$ і є симетричною відносно уявної осі;

 

**в)** $\Gamma_3$ — це ламана $z_1z_3z_2$, де $z_3 = -3$;

**г)** $\Gamma_4$ — це ламана $z_1z_4z_2$, де $z_4 = 2i$.

**299.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \left(3|z|^2 + 1\right) \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1$ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + 2i$;

**б)** $\Gamma_2$ — це частина параболи, яка з'єднує точки $z_1$ і $z_2$, за умови, що задана парабола має вершину в $z_1$ і є симетричною відносно дійсної осі;

**в)** $\Gamma_3$ — це ламана $z_1z_3z_2$, де $z_3 = 2i$.

**300.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \left(\bar{z}^2 - \operatorname{Re} z + i\right) \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1$ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = -1 - i$ і $z_2 = 0$;

**б)** $\Gamma_2$ — це частина кубічної параболи $y = x^3$, яка з'єднує точки $z_1$ і $z_2$;

**в)** $\Gamma_3$ — це ламана $z_1z_3z_2$, де $z_3 = -1$.

В прикладах 301–308 обчислити інтеграл $I$ вздовж кривої $\Gamma$:

**301.** $I = \int\limits_{\Gamma} \left(\bar{z}^5 - |z|^3 z^2\right) \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \left\{z \;:\; |z| = 2,\; 0 < \arg z < \pi\right\}$.

**302.** $I = \int\limits_{\Gamma} \left(|z|\bar{z}^2 - z^2\bar{z}\right) \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \left\{z \;:\; |z| = 1/2,\; -\pi < \arg z < \pi/2\right\}$.

**303.** $I = \int\limits_{\Gamma} \left(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im}^2 z\right) \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \left\{z \;:\; |z| = \sqrt{2}\right\}$.

**304.** $I = \int\limits_{\Gamma} \left(\operatorname{Im} z - |z|\bar{z}\right) \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \left\{z \;:\; |z| = 1,\; -2\pi/3 < \arg z < \pi/3\right\}$.

**305.** $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{sh} \bar{z} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $2i\pi$ та $-2\pi$.

**306.** $I = \int\limits_{\Gamma} e^{2\bar{z} + \operatorname{Im} z} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $2i - 1$ та $1 - 2i$.

**307.** $I = \int\limits_{\Gamma} \bar{z} \operatorname{ch} \operatorname{Re} z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $-1 - i$ та $2i$.

**308.** $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Im} z \sin \bar{z} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $-\pi$ та $\pi + i\pi$.

 

В прикладах 309–312 обчислити інтеграл першого роду $I$ вздовж кривої $\Gamma$:

**309.** $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Im} z^2 \, |\mathrm{d}z|$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $4$ та$1 - 3i$.

**310.** $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{sh} z \, |\mathrm{d}z|$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $i\pi/2$ та $\pi - i\pi/2$.

**311.** $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re} z^4 \, |\mathrm{d}z|$, якщо $\Gamma = \left\{ z \ : \ |z| = \sqrt[5]{2}, \ 0 < \arg z < \pi/8 \right\}$.

**312.** $I = \int\limits_{\Gamma} \bar{z}^3 \, |\mathrm{d}z|$, якщо $\Gamma = \{ z \ : \ |z| = 1, \ -\pi/6 < \arg z < \pi/6 \}$.

**313.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} z \cos z^2 \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1 = \left\{ z \ : \ |z| = \sqrt{2} \right\}$;

**б)** $\Gamma_2$ — це відрізок, який з'єднує точки $1 - i$ і $1 + i$;

**в)** $\Gamma_3 = \left\{ z \ : \ |z| = \sqrt{2}, \ -\pi/4 < \arg z < \pi/4 \right\}$.

**314.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \operatorname{sh}^2 2z \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1 = \{ z \ : \ |z| = \pi \}$;

**б)** $\Gamma_2$ — це відрізок, який з'єднує точки $\pi i$ і $\pi$;

**в)** $\Gamma_3 = \{ z \ : \ |z| = \pi, \ 0 < \arg z < \pi/2 \}$.

**315.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} (iz - 2)^{15} \, \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1$ — це прямокутник з вершинами в точках $1+i$, $1-i$, $-1-i$, $-1+i$;

**б)** $\Gamma_2$ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = -1 - i$ і $z_2 = i$;

**в)** $\Gamma_3$ — це ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = -1 + i$.

 

**316.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \operatorname{tg}^2 z\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1$ — це ромб з вершинами в точках $i$, $\pi/4$, $-i$, $-\pi/4$;

**б)** $\Gamma_2$ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = \pi/4$ і $z_2 = i$;

**в)** $\Gamma_3$ — це ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 0$.

В прикладах 317–308 обчислити інтеграл $I$ вздовж кривої $\Gamma$:

**317.** $I = \int\limits_\Gamma z \operatorname{sh} z^2 \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \left\{z \ : \ |z| = \sqrt{2}\right\}$.

**318.** $I = \int\limits_\Gamma e^{z^2} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це трикутник з вершинами в точках $1+2i$, $-i$, $-1+2i$.

**319.** $I = \int\limits_\Gamma \operatorname{th}^2 z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1\}$.

**320.** $I = \int\limits_\Gamma \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2 - 5}$, якщо $\Gamma$ — це прямокутник з вершинами в точках $2+2i$, $2-2i$, $-2-2i$, $-2+2i$.

**321.** $I = \int\limits_\Gamma (2z+i)^{11} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $1+i/2$ і $-i$.

**322.** $I = \int\limits_\Gamma \sin iz \cos 4iz \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = \pi/2, \ 0 < \arg z < \pi/2\}$.

**323.** $I = \int\limits_\Gamma \dfrac{e^{3iz}+1}{e^{iz}+1} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $-i \ln 2$ і $2\pi$.

**324.** $I = \int\limits_\Gamma \operatorname{ch}^3 z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = \pi, \ \pi/2 < \arg z < \pi\}$.

**325.** $I = \int\limits_\Gamma (z+1) \operatorname{sh} z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $\pi i$ і $-1$.

**326.** $I = \int\limits_\Gamma (iz+1) e^{iz} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = \pi, \ 0 < \arg z < \pi/2\}$.

**327.** $I = \int\limits_\Gamma z^2 \sin z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це відрізок, який з'єднує точки $-2i$ і $\pi/2$.

**328.** $I = \int\limits_\Gamma \left(z^2 + 2z + 1\right) \operatorname{ch} z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma$ — це ламана, який з'єднує точки $-1$, $0$ і $\pi i$.

В прикладах 329–346 обчислити інтеграл $I$ від заданої вітки багатозначної функції вздовж кривої $\Gamma$:

**329.** $I = \int\limits_\Gamma \dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt[3]{z}}$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1\}$, за умови $\sqrt[3]{1} = 1$.

**330.** $I = \int\limits_{\Gamma} z^{\sqrt{2}} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $1^{\sqrt{2}} = 1$.

**331.** $I = \int\limits_{\Gamma} z^{3i} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $1^{3i} = 1$.

**332.** $I = \int\limits_{\Gamma} \sqrt[4]{z} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\sqrt[4]{1} = -i$.

**333.** $I = \int\limits_{\Gamma} z^{\sqrt{3}} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $1^{\sqrt{3}} = e^{4\pi i \sqrt{3}}$.

**334.** $I = \int\limits_{\Gamma} \dfrac{\mathrm{d}z}{z^{2i+1}}$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $1^{2i+1} = e^{2\pi(i-2)}$.

**335.** $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Ln} z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = -6\pi i$.

**336.** $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Ln} z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 5\}$, за умови $\operatorname{Ln} 5 = \ln 5 + 8\pi i$.

**337.** $I = \int\limits_{\Gamma} |\operatorname{Ln} z| \, \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

**338.** $I = \int\limits_{\Gamma} |\operatorname{Ln} z| \, \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln}(-1) = -3\pi i$.

**339.** $I = \int\limits_{\Gamma} \dfrac{\operatorname{Ln} z}{z} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = e\}$, за умови $\operatorname{Ln} e = 1$.

**340.** $I = \int\limits_{\Gamma} \dfrac{\operatorname{Ln} z}{z} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 4\}$, за умови $\operatorname{Ln} 4 = \ln 4 - 2\pi i$.

**341.** $I = \int\limits_{\Gamma} z^5 \operatorname{Ln} z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

**342.** $I = \int\limits_{\Gamma} z^9 \operatorname{Ln} z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln}(-1) = -\pi i$.

**343.** $I = \int\limits_{\Gamma} z^3 \operatorname{Ln} z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 2\}$, за умови $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 4\pi i$.

**344.** $I = \int\limits_{\Gamma} |\operatorname{Ln} z|^2 \, \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

**345.** $I = \int\limits_{\Gamma} |\operatorname{Ln} z|^2 \, \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = -4\pi i$.

**346.** $I = \int\limits_{\Gamma} |\operatorname{Ln} z|^2 \, \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1/2\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1/2 = -\ln 2 + 2\pi i$.

**347.** Для заданого $\alpha \in \mathbb{R}$ обчислити

$$I = \int\limits_{\Gamma} z^{\alpha} \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $1^{\alpha} = e^{2\pi i k_0 \alpha}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$.

**348.** Для заданого $\alpha \in \mathbb{R}$ обчислити

$$I = \int\limits_{\Gamma} z^{i\alpha} \mathrm{d}z,$$

 

якщо $\Gamma=\{z\ :\ |z|=1\}$, за умови $1^{i\alpha}=e^{-2\pi k_0\alpha}$, $k_0\in\mathbb{Z}$.

**349.** Для заданого $\alpha\in\mathbb{C}$ обчислити
$$I=\int\limits_\Gamma z^\alpha \mathrm{d}z,$$
якщо $\Gamma=\{z\ :\ |z|=1\}$, за умови $1^{\alpha}=e^{2\pi ik_0\alpha}$, $k_0\in\mathbb{Z}$.

**350.** Обчислити
$$I=\int\limits_\Gamma \operatorname{Ln} z\mathrm{d}z,$$
якщо $\Gamma=\{z\ :\ |z|=R\}$, за умови $\operatorname{Ln}R=\ln R+2\pi ik_0$, $k_0\in\mathbb{Z}$.

**351.** Обчислити
$$I=\int\limits_\Gamma |\operatorname{Ln} z|\,\mathrm{d}z,$$
якщо $\Gamma=\{z\ :\ |z|=1\}$, за умови $\operatorname{Ln}1=2\pi ik_0$, $k_0\geq 0$.

**352.** Обчислити
$$I=\int\limits_\Gamma \frac{\operatorname{Ln} z}{z}\mathrm{d}z,$$
якщо $\Gamma=\{z\ :\ |z|=R\}$, за умови $\operatorname{Ln}R=\ln R+2\pi ik_0$, $k_0\in\mathbb{Z}$.

**353.** Для заданого $n\in\mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ обчислити
$$I=\int\limits_\Gamma z^n\operatorname{Ln} z\mathrm{d}z,$$
якщо $\Gamma=\{z\ :\ |z|=R\}$, за умови $\operatorname{Ln}R=\ln R+2\pi ik_0$, $k_0\in\mathbb{Z}$.

**354.** Обчислити
$$I=\int\limits_\Gamma |\operatorname{Ln} z|^2\,\mathrm{d}z,$$
якщо $\Gamma=\{z\ :\ |z|=R\}$, за умови $\operatorname{Ln}R=\ln R+2\pi ik_0$, $k_0\in\mathbb{Z}$.

**355.** Довести, якщо $|a|\neq R$, то
$$\int\limits_{|z|=R}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a||z+a|}<\frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}.$$

**356.** Довести, якщо $|a|\neq R$, то
$$\int\limits_{|z|=R}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2}=\frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}.$$

**357.** Нехай $f(z)\in\mathcal{C}\left(\{z\ :\ |z-z_0|\leq R\}\right)$ для деякого $R>0$. Довести, що
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot f(z_0).$$

 

## § 9. Інтегральна формула Коші

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в області $D$ і неперервною в $\overline{D}$, тоді для довільного $z_0 \notin \partial D$ має місце *інтегральна формула Коші*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in D\\ 0, & z_0 \notin \overline{D}, \end{cases} \tag{9.1}$$

напрямок обходу контуру $\partial D$ додатний (так, що область $D$ залишається ліворуч). Вираз в лівій частині формули (9.1) має назву *інтеграл Коші*. Важливою властивістю цього інтеграла є існування і аналітичність всіх похідних довільного порядку, так звана *інтегральна формула Коші для похідних*:

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} f^{(n)}(z_0), & z_0 \in D\\ 0, & z_0 \notin \overline{D}, \end{cases} \tag{9.2}$$

**Приклад 9.1.** ◁ Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k}\frac{\sin z\mathrm{d}z}{z^2+1}, \quad k=1,2,3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1 = \{z \ : \ |z-2i| = 1/2\}$;

**б)** $\Gamma_2 = \{z \ : \ |z-2i| = 3/2\}$;

**в)** $\Gamma_3 = \{z \ : \ |z-2i| = 7/2\}$.

▷

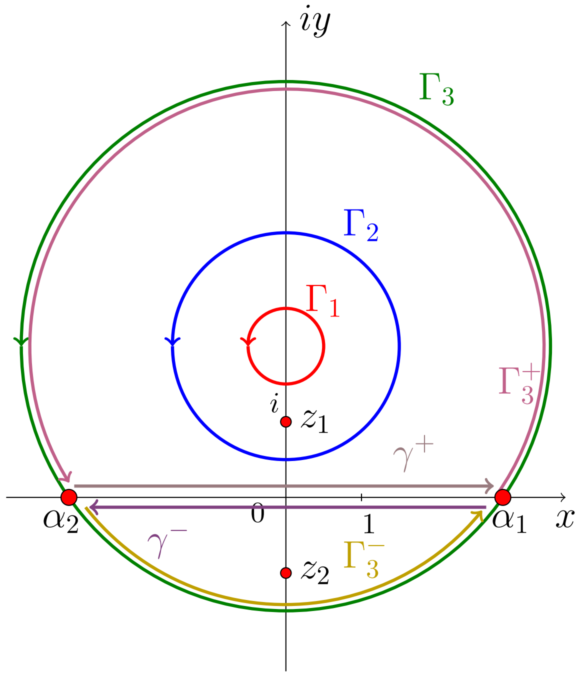


Рис. 15: До прикладу 9.1

*Розв'язання.* ◀ **а)** Підінтегральна функція $\dfrac{\sin z}{z^2+1}$ є аналітичною в області $|z-2i| \le 3/4$, яка містить замкнений контур $\Gamma_1$, тому за інтегральною формулою Коші (9.1) для випадку, коли особлива точка не належить області, випливає, що

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sin z\mathrm{d}z}{z^2+1} = 0.$$

Цей результат можна отримати також, пригадавши інтегральну теорему Коші (8.7).

**б)** Всередині області, яка обмежена контуром $\Gamma_2$, знаходиться одна точка $z_1 = i$, в якій знаменник підінтегральної функції обертається в нуль.

 

Перепишемо інтеграл у вигляді

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{(z+i)(z-i)} = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\dfrac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z}{z-i}.$$

Функція $\dfrac{\sin z}{z+i}$ є аналітичною в області, яка обмежена $\Gamma_2$. Застосувавши інтегральну формулу Коші (9.1), отримаємо

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\dfrac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z}{z-i} = 2\pi i \left.\frac{\sin z}{z+i}\right|_{z=i} = 2\pi i \frac{\sin i}{2i} = \pi i \operatorname{sh} 1.$$

**в)** Всередині області, яка обмежена контуром $\Gamma_3$, знаходяться дві точки $z_1 = i$ і $z_2 = -i$, в яких знаменник підінтегральної функції обертається в нуль. Тому беспосередньо застосовувати інтегральну формулу Коші для обчислення $I_3$ не можна. Розглянемо два способи обчислення інтегралу.

I спосіб. Скористаємося лінійною властивістю інтегралів: зведемо підінтегральну функцію до виразу, в якому зможемо безпосередньо скористатися інтегральною формулою Коші, розклавши $\dfrac{1}{z^2+1}$ на елементарні дроби:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

Тоді можемо переписати шуканий інтеграл у вигляді:

$$I_3 = \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z-i} - \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z+i}$$

Застосувавши інтегральну формулу Коші (9.1) для кожного з інтегралів, отримаємо

$$I_3 = \frac{2\pi i}{2i}\sin i - \frac{2\pi i}{2i}\sin(-i) = 2\pi i \operatorname{sh} i.$$

II спосіб. Скористаємося властивістю адитивності інтегралу: подамо контур інтегрування у вигляді об'єднання таких контурів, для кожного з яких можна скористатися інтегральною формулою Коші. Для цього позначимо $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{33}}{2}$, $\alpha_2 = -\dfrac{\sqrt{33}}{2}$ (це точки, в яких $\Gamma_3$ перетинає вісь абсцис) та розглянемо наступні додаткові контури (див. рис. 15):

$\gamma^+ = \{z : z(t) = \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)t,\ t \in [0,1]\}$ (верхній берег розрізу $[\alpha_2, \alpha_1]$),
$\gamma^- = \{z : z(t) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)t,\ t \in [0,1]\}$ (нижній берег розрізу $[\alpha_1, \alpha_2]$),
$\Gamma_3^+ = \{z : |z-2i| = 3/2, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ (півколо від $\alpha_1$ до $\alpha_2$),
$\Gamma_3^- = \{z : |z-2i| = 3/2, \operatorname{Im} z < 0\}$ (півколо від $\alpha_2$ до $\alpha_1$).

Зауважимо, що $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \bigcup \Gamma_3^-$, крім того, $\int\limits_{\gamma^+ \bigcup \gamma^-} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = 0$. Перепишемо інтеграл $I_3$ наступним чином:

$$I_3 = \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \int\limits_{\Gamma_3^+ \bigcup \Gamma_3^-} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} + \int\limits_{\gamma^+ \bigcup \gamma^-} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \int\limits_{\Gamma_3^+ \bigcup \Gamma_3^- \bigcup \gamma^+ \bigcup \gamma^-} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_3^+ \bigcup \gamma^+} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} + \int\limits_{\Gamma_3^- \bigcup \gamma^-} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \int\limits_{\Gamma_3^+ \bigcup \gamma^+} \frac{\frac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z}{z-i} + \int\limits_{\Gamma_3^- \bigcup \gamma^-} \frac{\frac{\sin z}{z-i}\mathrm{d}z}{z+i}.$$

Кожний з контурів $\Gamma_3^+ \bigcup \gamma^+$ і $\Gamma_3^- \bigcup \gamma^-$ є кусково-гладким і замкненим, причому напрям обходу кожного контуру є додатним. Всередині кожного з цих контурів знаходиться по одній точці, в якій знаменник обертається в нуль. Функції, які стоять в чисельниках, є аналітичними у відповідних областях. Тому для кожного з інтегралів можна застосувати інтегральну формулу Коші (9.1):

$$\int\limits_{\Gamma_4 \bigcup \gamma_2} \frac{\frac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z}{z-i} = 2\pi i \frac{\sin z}{z+i}\bigg|_{z=i} = 2\pi i \frac{\sin i}{2i} = \pi i \operatorname{sh} 1,$$

$$\int\limits_{\Gamma_5 \bigcup \gamma_1} \frac{\frac{\sin z}{z-i}\mathrm{d}z}{z+i} = 2\pi i \frac{\sin z}{z-i}\bigg|_{z=-i} = 2\pi i \frac{\sin(-i)}{-2i} = \pi i \operatorname{sh} 1.$$

Таким чином,

$$I_3 = 2\pi i \operatorname{sh} 1.$$

►

**Приклад 9.2.** ◁ Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{z \cos iz \mathrm{d}z}{(z-2\pi i)^3},$$

якщо $\Gamma = \{|z| = 7\}$. ▷

 

*Розв'язання.* ◀ Всередині області, яка обмежена контуром $\Gamma$, знаходиться одна точка $z_0 = 2\pi i$, в якій знаменник підінтегральної функції обертається в нуль (див. рис. 16). Функція $z\cos iz$ є аналітичною в області, яка обмежена $\Gamma$. Застосувавши інтегральну формулу Коші для похідних (9.2) для $n = 3$, отримаємо

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{z\cos iz \mathrm{d}z}{(z-2\pi i)^4} = \frac{2\pi i}{3!}\left(z\cos iz\right)'''\Big|_{z=2\pi i} =$$

$$= \frac{\pi i}{3}\Big[3(\cos iz)'' + z(\cos iz)'''\Big]\Big|_{z=2\pi i} =$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left(-3i^2\cos iz - zi^3\sin iz\right)\Big|_{z=2\pi i} = \pi i.$$

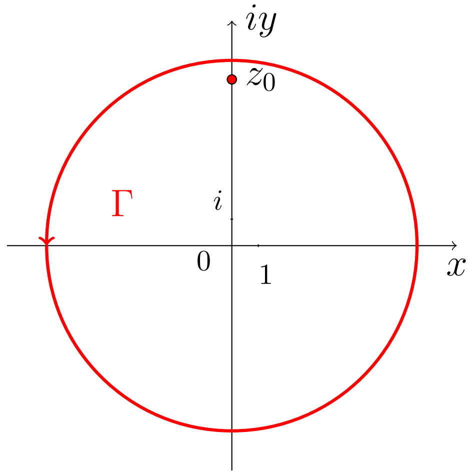


Рис. 16: До прикладу 9.2

▶

**358.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \frac{ze^z \mathrm{d}z}{z^2+4}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1 = \{z : |z+i| = 1/4\}$;

**б)** $\Gamma_2 = \{z : |z+i| = 2\}$;

**в)** $\Gamma_3 = \{z : |z+i| = 7/2\}$.

**359.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \frac{\operatorname{ch}^2 z \mathrm{d}z}{z\left(z^2+\pi^2\right)}, \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1 = \{z : |z-4i| = 1/3\}$;

**б)** $\Gamma_2 = \{z : |z-4i| = 4/3\}$;

**в)** $\Gamma_3 = \{z : |z-4i| = 13/3\}$;

**г)** $\Gamma_4 = \{z : |z-4i| = 25/3\}$.

**360.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \frac{z\sin z \mathrm{d}z}{4z^2-\pi^2}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1 = \{z\,:\,|z-1| = 1/5\}$;

**б)** $\Gamma_2 = \{z\,:\,|z-1| = 1\}$;

**в)** $\Gamma_3 = \{z\,:\,|z-1| = 3\}$.

**361.** Обчислити інтеграл

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \frac{z^2 e^{iz} \mathrm{d}z}{(z-1)\,(z^2+9)}, \qquad k = 1,2,3,4,$$

якщо

**а)** $\Gamma_1 = \{z\,:\,|z-4i| = 1/2\}$;

**б)** $\Gamma_2 = \{z\,:\,|z-4i| = 3/2\}$;

**в)** $\Gamma_3 = \{z\,:\,|z-4i| = 9/2\}$;

**г)** $\Gamma_4 = \{z\,:\,|z-4i| = 15/2\}$.

В прикладах 362–365, обчислити інтеграл:

**362.**
$$\int\limits_{|z-1|=3} \frac{z^5(i-z^2)\mathrm{d}z}{(z+i)^5}.$$

**363.**
$$\int\limits_{|z-3i|=3} \frac{e^{iz}\mathrm{d}z}{(z-5i)^{10}}.$$

**364.**
$$\int\limits_{|z+i|=4} \frac{z^2 \operatorname{ch}(\pi z)\mathrm{d}z}{(z-i)^7}.$$

**365.**
$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{(2z+3)e^{3z}\mathrm{d}z}{(z+2)^{21}}.$$

В прикладах 366–377, обчислити інтеграл:

**366.**
$$\int\limits_{|z|=1/2} \frac{\sin^2 z\mathrm{d}z}{z^3}.$$

**367.**
$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 2z\mathrm{d}z}{z^5}.$$

**368.**
$$\int\limits_{|z-1/2|=1} \frac{\operatorname{tg} z\mathrm{d}z}{z\,(z^2+9)}.$$

**369.**
$$\int\limits_{|z+1/3|=4/3} \frac{e^{\frac{1}{z+2}}\mathrm{d}z}{(z+1)\,(z+3)^2}.$$

**370.**
$$\int\limits_{|z-3|=2} \frac{\sin e^{i\pi z}\mathrm{d}z}{z\,(z-2)^2}.$$

**371.**
$$\int\limits_{|z-3|=1} \frac{\cos 2z\mathrm{d}z}{z^2\,(z-\pi)^2}.$$

**372.**
$$\int\limits_{|z|=5/2} \frac{z^2\mathrm{d}z}{z^2+iz+2}.$$

**373.**
$$\int\limits_{|z|=3} \frac{(\operatorname{ch}\pi z + \operatorname{sh} 2\pi z)\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)\,(z^2+4)}.$$

 

**374.**

$$\int\limits_{|z-1|=5/2} \frac{e^z \mathrm{d}z}{z^3\,(z+2i)}.$$

**375.**

$$\int\limits_{|z|=\pi/2} \frac{\left(z^2+i\right)\mathrm{d}z}{z\,(z-i)^4}.$$

**376.**

$$\int\limits_{|z|=\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sh}\pi z \mathrm{d}z}{(iz+1)\left(z^2+1\right)^2}.$$

**377.**

$$\int\limits_{|z|=\pi} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+9\right)^3}.$$

**378.** Обчислити

$$I=\int\limits_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}, \qquad n \geq 1,$$

якщо $|a|<R<|b|$.

**379.** Скільки різних значень в залежності від $n$ може приймати інтеграл

$$I=\int\limits_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-z_k)}, \qquad z_j \neq z_k,$$

якщо $|z_k| \neq R, k=1,2,\dots n$?

**380.** Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в області $D$ і неперервною в $\overline{D}$, а $z_1,\dots,z_n$ — довільні різні точки в $D$. Позначимо

$$w_n(z)=(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)\,.$$

Показати, що інтеграл

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{w_n(\zeta)}\cdot\frac{w_n(\zeta)-w_n(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

є многочленом $(n-1)$-го степеня, який співпадає з $f(z)$ в точках $z_1$, …, $z_n$ (многочлен $P(z)$ називається інтерполяційним многочленом Лагранжа).

 

# Відповіді

## Розділ 1

1. $\operatorname{Re} z = -\frac{3}{25}$, $\operatorname{Im} z = \frac{29}{25}$.
2. $\operatorname{Re} z = \frac{66}{65}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{57}{65}$.
3. $\operatorname{Re} z = -\frac{17}{26}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{19}{26}$.
4. $\operatorname{Re} z = \frac{19}{50}$, $\operatorname{Im} z = \frac{4}{25}$.
5. $\operatorname{Re} z = \frac{35}{13}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{20}{13}$.
6. $\operatorname{Re} z = -\frac{6}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{8}{25}$.
7. $|z| = \sqrt{2}, \operatorname{Arg}\ z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
8. $|z| = 13^{13}, \operatorname{Arg}\ z = 2\pi - 13 \operatorname{arctg} \frac{5}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
9. $|z| = 10^5/7^{18}, \operatorname{Arg}\ z = 36 \operatorname{arctg} \sqrt{6} - 10 \operatorname{arctg} 3 - 10\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
10. $|z| = 4\sqrt{2}, \operatorname{Arg}\ z = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
11. $|z| = 10^{100}, \operatorname{Arg}\ z = 20\pi - 100 \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
12. $|z| = \frac{29^{25/2}}{14^{39/2}}, \operatorname{Arg}\ z = 25\pi - 25 \operatorname{arctg} \frac{5}{2} - 39 \operatorname{arctg} \sqrt{13} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
13. $\exp\left\{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\right\}, n \in \mathbb{Z}$.
14. $3 \exp\{i(\pi + 2\pi n)\}, n \in \mathbb{Z}$.
15. $\frac{5^8}{50^{11/2}} \exp\{i(16 \operatorname{arctg} 2 - 11 \operatorname{arctg} 7 - \pi + 2\pi n)\}, n \in \mathbb{Z}$.
16. $2 \exp\{i2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}$.
17. $\frac{1}{2} \exp\left\{i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\right\}, n \in \mathbb{Z}$.
18. $\frac{2^8}{10^{15/2}} \exp\{i(15 \operatorname{arctg} 3 - 5\pi + 2\pi n)\}, n \in \mathbb{Z}$.
19. $5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi$.
20. $\cos^8 \varphi - 28 \cos^6 \varphi \sin^2 \varphi + 70 \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi - 28 \cos^2 \varphi \sin^6 \varphi + \sin^8 \varphi$.
21. $\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$.
22. $9 \cos^8 \varphi \sin \varphi - 84 \cos^6 \varphi \sin^3 \varphi + 126 \cos^4 \varphi \sin^5 \varphi - 36 \cos^2 \varphi \sin^7 \varphi + \sin^9 \varphi$.
23. $\operatorname{Re} w = \frac{x}{x^2+y^2}; \quad \operatorname{Im} w = -\frac{y}{x^2+y^2}$.
24. $\operatorname{Re} w = x^2 - y^2 + x; \quad \operatorname{Im} w = y(2x + 1)$.
25. $\operatorname{Re} w = \frac{x^3+x^2+xy^2-y^2}{x^2+y^2+2x+1}; \quad \operatorname{Im} w = \frac{y^3+x^2y+2xy}{x^2+y^2+2x+1}$.
26. $\operatorname{Re} w = x^2 - y^2 + 4y + 1; \quad \operatorname{Im} w = 2x(y - 2)$.
29. *Вказівка.*Скористатись формулою Муавра.
30. *Вказівка.*Скористатись методом математичної індукції.
31. *Вказівка.*Скористатись тим, що для довільного $a \in \mathbb{R} : \overline{a} = a$.

## Розділ 2

33. Коло з центром в точці $z_0$, радіуса $R$.
34. Внутрішність кола з центром в точці $z_0$, радіуса $R$.
35. Коло з центром в точці $z_0$, радіуса $R$ і зовнішність цього кола.
36. Пряма $x = C$ і півплощина, яка лежить справа від неї.
37. Півплощина, яка лежить нижче прямої $y = C$.
38. Внутрішність кута з вершиною в початку координат і сторонами, які утворюють з додатним напрямком осі $Ox$ кути $\alpha$ і $\beta$.

39. Внутрішність того ж кута, що і в задачі 38, тільки з вершиною в точці $z_0$.
40. Пряма, яка проходить через середину відрізка з кінцями в точках $z_1$ і $z_2$ і перпендикулярна до нього.
41. Вітка гіперболи (софокусна з $z_2$) з фокусами в точках $z_1$ і $z_2$, дійсною піввіссю $a$.
42. Еліпс з фокусами в точках $z_1$ і $z_2$, великою піввіссю $a$.
43. Коло, діаметром якого є відрізок з кінцями в точках $z_1$ і $z_2$ з виколотою точкою $z_2$.
44. Пряма, яка проходить через точки $z_1$ і $z_2$ з виколотою точкою $z_2$.
45. Зовнішність кола з центром в точці $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, радіуса $\frac{\sqrt{13}}{2}$.
46. Внутрішність кола з центром в точці $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, радіуса $\frac{\sqrt{13}}{2}$.
47. Внутрішність кола з центром в точці $(-3, 1)$, радіуса 1.
48. Півплощина $x - y - 1 > 0$.
49. Півплощина $3x - 2y + 3 > 0$.
50. Зовнішність кола з центром в точці $\left(-\frac{7}{2}, 3\right)$, радіуса $\frac{\sqrt{17}}{2}$.
51. Півплощина $x + y - 1 < 0$.
52. Область $y^2 < 2x + 1$ (внутрішність параболи).
53. Півплощина $x - y + \sqrt{2} > 0$.
54. Кожна лінія – це коло, яке є геометричним місцем точок, відношення відстаней від яких до точок $z_1$ і $z_2$ стале (коло Аполлонія відносно точок $z_1$ і $z_2$). Значенню $\lambda = 1$ відповідає пряма – серединний перпендикуляр відрізка, який з'єднує точки $z_1$ і $z_2$.
55. Права половина круга радіуса 1 з центром в точці $z = 0$.
56. Якщо $C = 0$ – це пряма $x = 0$, якщо $C \neq 0$ – сім'я кіл з центром в точці $\left(\frac{1}{2C}, 0\right)$, радіуса $\dfrac{1}{2C}$.
57. Якщо $C = 0$ – це прямі $y = \pm x$, якщо $C \neq 0$ – сім'я гіпербол $x^2 - y^2 = C$.
58. Якщо $C = 0$ – це пряма $y = 0$, якщо $C \neq 0$ – сім'я кіл з центром в точці $\left(0, -\frac{1}{2C}\right)$, радіуса $\dfrac{1}{2C}$.
59. Якщо $C = 0$ – це прямі $x = 0$, $y = 0$, якщо $C \neq 0$ – сім'я гіпербол $2xy = C$.
62. $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.
63. $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
64. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
65. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{6\sqrt{2}}, \frac{5}{6}\right)$.
66. $\left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right)$.
67. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{1}{5}\right)$.
68. Півмеридіани з довготою $\alpha$.
69. Паралелі з широтою $2 \operatorname{arctg} R - \frac{\pi}{2}$.
70. Паралелі з широтою $2 \operatorname{arctg} R - \frac{\pi}{2}$.
71. Південна півкуля.

72. Північна півкуля.
73. Східна півкуля.
74. Західна півкуля.
74. $z^T$.
75. $zz^T = \left(x^2+y^2\right)E$, де $E$ – одинична матриця.
76. $\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy+1 \\ -2xy-1 & x^2-y^2 \end{pmatrix}$.
77. $\begin{pmatrix} x^2+1-(y-2)^2 & 2x(y-2) \\ 2x(2-y) & x^2+1-(y-2)^2 \end{pmatrix}$.
78. $\begin{pmatrix} -6xy & 9x^2-y^2 \\ y^2-9x^2 & -6xy \end{pmatrix}$.
79. $\frac{1}{(x+1)^2+y^2}\begin{pmatrix} y & x+1 \\ -x-1 & y \end{pmatrix}$.
80. Коло з центром в точці $-\frac{B}{A}$, радіуса $\dfrac{\sqrt{|B|^2-AC}}{A}$.

## Розділ 4

114. $\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\left(z+\frac{n\theta}{2}\right)\sin^{-1}\frac{\theta}{2}$.
115. $\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\left(z+\frac{n\theta}{2}\right)\sin^{-1}\frac{\theta}{2}$.
116. $\operatorname{Re} f(z) = e^x\cos y$, $\operatorname{Im} f(z) = e^x\sin y$, $|f(z)| = e^x$.
117. $\operatorname{Re} f(z) = \sin x\operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} f(z) = \cos x\operatorname{sh} y$, $|f(z)| = \sqrt{\sin^2 x\operatorname{ch}^2 y+\cos^2 x\operatorname{sh}^2 y}$.
118. $\operatorname{Re} f(z) = \cos x\operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} f(z) = -\sin x\operatorname{sh} y$, $|f(z)| = \sqrt{\cos^2 x\operatorname{ch}^2 y+\sin^2 x\operatorname{sh}^2 y}$.
119. $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{sh} x\cos y$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{ch} x\sin y$, $|f(z)| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x\cos^2 y+\operatorname{ch}^2 x\sin^2 y}$.
120. $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{ch} x\cos y$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{sh} x\sin y$, $|f(z)| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x\cos^2 y+\operatorname{sh}^2 x\sin^2 y}$.
121. $\operatorname{Re} f(z) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$, $|f(z)| = \frac{\sqrt{\sin^2 2x+\operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$.
122. $\operatorname{Re} f(z) = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x-\operatorname{ch} 2y}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x-\operatorname{ch} 2y}$, $|f(z)| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2y+\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y-\cos 2x}}$.
123. $\operatorname{Re} f(z) = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\cos 2y+\operatorname{ch} 2x}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{\sin 2y}{\cos 2y+\operatorname{ch} 2x}$, $|f(z)| = \frac{\sqrt{\sin^2 2y+\operatorname{sh}^2 2x}}{\cos 2y+\operatorname{ch} 2x}$.
124. $\operatorname{Re} f(z) = -\frac{\operatorname{sh} 2x}{\cos 2y-\operatorname{ch} 2x}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{\sin 2y}{\cos 2y-\operatorname{ch} 2x}$, $|f(z)| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x+\cos 2y}{\operatorname{ch} 2x-\cos 2y}}$.
125. $i\operatorname{sh} 3$.
126. $\cos 3\operatorname{ch} 1 - i\sin 3\operatorname{sh} 1$.
127. $-i\sin\sqrt{2}$.
128. $\cos\frac{1}{2}$.
129. $\frac{\sin 6 - i\operatorname{sh} 2}{\cos 6+\operatorname{ch} 2}$.
130. $\frac{\sin 2 + i\operatorname{sh} 6}{\cos 2-\operatorname{ch} 6}$.
131. $\frac{\operatorname{sh} 2 - i\sin 6}{\cos 6+\operatorname{ch} 2}$.
132. $\frac{\operatorname{sh} 6 + i\sin 2}{\cos 2-\operatorname{ch} 6}$.
133. $i\pi\left(1+2n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
134. $\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
135. $\ln\left|\frac{\pi}{2}+2\pi n\right| + i\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} n + 2\pi k\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$.

136. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\ln^2 5+(\pi(2n+1)-\operatorname{arctg}2)^2\right)+i\left(\operatorname{arctg}\frac{2\pi(2n+1)-2\operatorname{arctg}2}{\ln 5}+2\pi k\right),\ k,n\in\mathbb{Z}.$
137. $\exp\left\{i2\sqrt{3}\pi n\right\},\ n\in\mathbb{Z}.$
138. $\exp\left\{i\sqrt{3}\pi(2n+1)\right\},\ n\in\mathbb{Z}.$
139. $\exp\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\},\ n\in\mathbb{Z}.$
140. $\exp\left\{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}-\pi(2n+1)+i\ln 3\right\},\ n\in\mathbb{Z}.$
141. $\exp\left\{\ln 5+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-2\pi n+i\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi n\right)\right\},\ n\in\mathbb{Z}.$
142. $2\pi n-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
143. $2\pi n-i\ln\left(\sqrt{2}-1\right),\quad \pi(2n+1)-i\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
144. $\ln\left(\sqrt{5}\pm 2\right)+i\left(\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
145. $\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[4]{2}\pm\sqrt{2}\pm 1\right)\right)+i\left(\pm\operatorname{arctg}\sqrt[4]{2}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
146. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)-i\frac{\ln 5}{4},\ n\in\mathbb{Z}.$
147. $\frac{1}{4}\ln 2+i\left(\frac{5\pi}{8}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
148. $\frac{\pi}{2}+2\pi n-i\ln\left(3\pm 2\sqrt{2}\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
149. $i\pi(2n+1),\ n\in\mathbb{Z}.$
150. $\frac{\pi}{2}+\pi n+i\frac{\ln 3}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$
151. $-\frac{\ln 2}{4}+i\left(-\frac{\pi}{8}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
152. $\frac{\ln 3}{2}+i\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1\mp 1}{2}\pi+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
153. $\pi(2n+1),\ 2\pi n+i\ln 3\ n\in\mathbb{Z}.$
154. $\exp\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\},\ n\in\mathbb{Z}.$
155. $\exp\left\{\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi n+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\frac{\ln 2}{2}\right)\right\},\ n\in\mathbb{Z}.$
156. $\exp\left\{\sqrt{2}\pi n+i\sqrt{2}\pi n\right\}-i,\ n\in\mathbb{Z}.$
159. Множини значень $z^{2\alpha}$ і $(z^\alpha)^2$ співпадають, але не співпадають, взагалі кажучи, з множиною значень $\left(z^2\right)^\alpha$.

## Розділ 5

173 - 178 Не є диференційовною в жодній точці.
180. а) $c=1, b=-a, f(z)=(1-ai)z,$ б) $a=b=-1, f(z)=e^{iz}$.

## Розділ 6

186. $|f'(z)|=3|z|^2$, $\arg f'(z)=2\arg z$. Стискається: $\left\{z:|z|<1/\sqrt{3}\right\}$, розширюється: $\left\{z:|z|>1/\sqrt{3}\right\}$.
187. $|f'(z)|=2|z|^{-3}$, $\arg f'(z)=\pi-3\arg z$. Стискається: $\left\{z:|z|>\sqrt[3]{2}\right\}$, розширюється: $\left\{z:|z|<\sqrt[3]{2}\right\}$.
188. $|f'(z)|=3e^{3\operatorname{Re}z}$, $\arg f'(z)=3\operatorname{Im}z$. Стискається: $\{z:\operatorname{Re}z<-\ln 3/3\}$, розширюється: $\{z:\operatorname{Re}z>-\ln 3/3\}$.
189. $|f'(z)|=e^{-\operatorname{Im}z}$, $\arg f'(z)=\operatorname{Re}z+\pi/2$. Стискається: $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$, розширюється: $\{z:\operatorname{Im}z<0\}$.

 

190. $|f'(z)| = \frac{1}{(\operatorname{Re} z+3)^2+(\operatorname{Im} z)^2}$, $\arg f'(z) = \pi - 2\operatorname{sign}(\operatorname{Re} z + 3)\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z+3}$. Стискається: $\left\{z : (\operatorname{Re} z + 3)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 > 1\right\}$, розширюється: $\left\{z : (\operatorname{Re} z + 3)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 < 1\right\}$.

191. $|f'(z)| = \frac{8}{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z+3)^2}$, $\arg f'(z) = \pi/2 - 2\operatorname{sign}(\operatorname{Re} z)\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} z+3}{\operatorname{Re} z}$. Стискається: $\left\{z : (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z + 3)^2 > 8\right\}$, розширюється: $\left\{z : (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z + 3)^2 < 8\right\}$.

192. $|f'(a)| = \operatorname{sh} 3$, $\arg f'(a) = -\pi/2$. Розширюється.

193. $|f'(a)| = 10\sqrt{26}$, $\arg f'(a) = \pi - \operatorname{arctg} 5$. Розширюється.

194. $|f'(a)| = 56$, $\arg f'(a) = \pi/2$. Розширюється.

195. $|f'(a)| = 8\sqrt{2}$, $\arg f'(a) = \pi$. Розширюється.

196. $|f'(a)| = e$, $\arg f'(a) = \pi/2 + 4$. Розширюється.

197. $|f'(a)| = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 3\cos^2 1+\operatorname{sh}^2 3\sin^2 1}$, $\arg f'(a) = -2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \operatorname{th} 3)$. Стискається.

198. $|f'(a)| = \frac{3\sqrt{10}}{5e}$, $\arg f'(a) = -1 - \operatorname{arctg} 1/3$. Стискається.

199. $|f'(a)| = \frac{2}{\operatorname{sh}^2 2\cos^2 1+\operatorname{ch}^2 2\sin^2 1}$, $\arg f'(a) = \pi + 2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \operatorname{cth} 2)$. Стискається.

200. $|f'(a)| = 2\sqrt{5}/9$, $\arg f'(a) = \operatorname{arctg} 2$. Стискається.

201. $|f'(a)| = \sqrt{\frac{5}{17^3}}$, $\arg f'(a) = \pi - \operatorname{arctg} 1/2 + 3\operatorname{arctg} 1/4$. Стискається.

202. 4.

203. 25.

204. $127\sqrt{2}/3$.

205. $2\pi$.

206. $\pi$.

207. 1.

208. $|\alpha|^n$.

209. $\frac{|\alpha|}{\operatorname{Re}\alpha}\left(e^{\operatorname{Re}\alpha} - 1\right)$, якщо $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$, $|\alpha|$ якщо $\operatorname{Re}\alpha = 0$.

210. $\frac{|\alpha|}{\operatorname{Im}\alpha}\left(1 - e^{-\operatorname{Im}\alpha}\right)$, якщо $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, $|\alpha|$ якщо $\operatorname{Im}\alpha = 0$.

211. $\pi 5^8/2$.

212. $5\pi\left(2^{10} - 1\right)/6$.

213. $e^{-\pi}\operatorname{sh}\pi$.

214. $65\pi$.

215. $2656/63$.

216. $2/3$.

217. Образ $D^* = \left\{w \ : \ e \le |w| \le e^2\right\}$, його площа $S(D^*) = \pi\left(e^4 - e^2\right)$.

## Розділ 7

225. $f(z) = e^z(z + 1)$.

226. $f(z) = \frac{2}{z-i}$.

227. $f(z) = z\ln z$.

228. $f(z) = e^{z^3}$.

229. $f(z) = -\cos z$.

230. $f(z) = z\operatorname{sh} z$.

231. $f(z) = z + 1/z$.

 

232. $f(z) = \ln(z - 4 - 5i)$.
233. $v(x, y) = -x^2 + y^2 + y + c, \quad f(z) = z - iz^2 + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
234. $v(x, y) = 2x + 2xy + c, \quad f(z) = (z + i)^2 + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
235. $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 6xy - 3x + c, \quad f(z) = i(z - i)^3 + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
236. $v(x, y) = \sin(x)\operatorname{sh}(1 - y) + c, \quad f(z) = \cos(z - i) + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
237. $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + c, \quad f(z) = \frac{1}{z} + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
238. $v(x, y) = 1 + 3y + 2xy + c, \quad f(z) = z^2 + 3z + i + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
239. $v(x, y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy) + c, \quad f(z) = e^z + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
240. $v(x, y) = e^{xy}\sin\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right) + c, \quad f(z) = \exp(-iz^2/2) + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
241. $u(x, y) = 3x^2 - 8xy - 3y^2 + c, \quad f(z) = (3 + 4i)z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
242. $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3 + c, \quad f(z) = (1 + 2i)z^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
243. $u(x, y) = e^x x\cos y - e^x y\sin y + c, \quad f(z) = ze^z + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
244. $u(x, y) = x\operatorname{ch} x\cos y - y\operatorname{sh} x\sin y + c, \quad f(z) = z\operatorname{ch} z + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
245. $u(x, y) = \sin(x - y)\operatorname{ch}(x + y) + c, \quad f(z) = \sin(z + iz) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
246. $u(x, y) = \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} + c, \quad f(z) = \frac{i}{z+i} + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
247. $u(x, y) = e^{2x-2xy}\cos\left(x^2 - y^2 + 2y\right) + c, \quad f(z) = \exp\left(iz^2 + 2z\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
248. $u(x, y) = e^{-2y}\cos(2x + 1) + c, \quad f(z) = 2e^{iz}\cos(z + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
249. $v(\rho, \varphi) = \rho^2\sin 2\varphi - \rho\cos\varphi + c, \quad f(z) = z^2 - iz + 1 + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
250. $v(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi - \frac{7\sin\varphi}{\rho} + c, \quad f(z) = iz + \frac{7}{z} + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
251. $v(\rho, \varphi) = \rho\sin(\rho\sin\varphi + \varphi)e^{\rho\cos\varphi} + c, \quad f(z) = ze^z + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
252. $v(\rho, \varphi) = \varphi - \ln\rho + c, \quad f(z) = (1 - i)\ln z + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
253. $v(\rho, \varphi) = \frac{2\cos 3\varphi - \sin 3\varphi}{\rho^3} + c, \quad f(z) = \frac{1+2i}{z} + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
254. $v(\rho, \varphi) = \rho\ln\rho\sin\varphi + \rho\varphi\cos\varphi + c, \quad f(z) = z\ln z + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
255. $v(\rho, \varphi) = \rho^n\cos n\varphi + c, \quad f(z) = iz^n + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
256. $v(\rho, \varphi) = \rho^3(2\sin 3\varphi + \cos 3\varphi) + c, \quad f(z) = (2 + i)z^3 + ic, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
257. $u(\rho, \varphi) = (1/\rho - \rho)\sin\varphi + c, \quad f(z) = i(z + 1/z) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
258. $u(\rho, \varphi) = -\ln\rho - \rho\sin\varphi + c, \quad f(z) = iz - \ln z + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
259. $u(\rho, \varphi) = \rho(\cos\varphi - 2\sin\varphi) + c, \quad f(z) = (1 + 2i)z + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
260. $u(\rho, \varphi) = -\rho^2(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi) + c, \quad f(z) = (i - 1)z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
261. $u(\rho, \varphi) = -e^{-\rho\sin\varphi}\sin(\rho\cos\varphi) + c, \quad f(z) = ie^{iz} + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
262. $u(\rho, \varphi) = \frac{2\sin\varphi + 3\cos\varphi}{\rho} + c, \quad f(z) = \frac{3+2i}{z} + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
263. $u(\rho, \varphi) = \frac{\sin n\varphi + n\cos n\varphi}{n\rho^n} + c, \quad f(z) = \frac{i+n}{3z^n} + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
264. $u(\rho, \varphi) = e^{\rho\cos\varphi}\left[\sin(\rho\sin\varphi) + \cos(\rho\sin\varphi)\right] + c, \quad f(z) = (1 - i)e^z + c, \quad c \in \mathbb{R}$ — const.
265. $\Phi(x, y) = 3x + 7y + c, \quad f(z) = \exp\left[(3i + 7)z + ic\right], \quad c \in \mathbb{R}$ — const.

266. $\Phi(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} + c, \quad f(z) = \exp\left(\frac{i+1}{z} + ic\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

267. $\Phi(x,y) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{2y+1}{2x} + c, \quad f(z) = (2z+1)^2 e^{ic}, \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

268. $\Phi(x,y) = e^{x-y}\sin(x+y) + c, \quad f(z) = \exp\left[ic + e^{(1-i)z}\right], \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

269. $\Phi(x,y) = e^x(y\sin y - x\cos y) + c, \quad f(z) = \exp\left[ic + ize^z\right], \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

270. $\Phi(x,y) = \frac{3}{2}\left(y^2 - x^2\right) + 4\,\mathrm{arctg}(y/x) + c, \; f(z) = z^4 \exp\left(-\frac{3}{2}iz^2 + ic\right), \; c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

271. $\Phi(x,y) = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x+1} + c, \quad f(z) = z(z+1)e^{ic}, \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

272. $\Phi(x,y) = 2n\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + m(x+y) + c, \; f(z) = z^{2n}\exp\left[(i+1)mz + ic\right], \; c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

273. $R(x,y) = c\exp(3x - 2y), \quad f(z) = c\exp\left[z(3+2i)\right], \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

274. $R(x,y) = c\exp\left[\frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{3y^2}{2} + y\right], \; f(z) = c\exp\left[\frac{1}{2}z(3z + (4-2i))\right], \; c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

275. $R(x,y) = c\exp\left(-e^y\cos x\right), \quad f(z) = c\exp\left(-e^{-iz}\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

276. $R(x,y) = ce^{x^3 - 3xy^2}, \quad f(z) = ce^{z^3}, \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

277. $R(x,y) = c\left[4x^2 + (2y+1)^2\right]^3, \quad f(z) = c(2z+i)^6, \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

278. $R(x,y) = c\exp\left[\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right], \quad f(z) = c\exp\left(\frac{i}{z^2}\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

279. $R(x,y) = c\exp\left[-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3+y}{2+x}\right], \; f(z) = c\exp\left[2i\ln(z+2+3i)\right], \; c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

280. $R(x,y) = c\exp\left\{e^{x^2-y^2}\left[x\cos(2xy) - y\sin(2xy)\right]\right\}, \; f(z) = c\exp\left(ze^{z^2}\right), \; c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

281. $\Phi(\rho,\varphi) = -7\varphi + c, \quad f(z) = \frac{5}{z^7}e^{ic}, \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

282. $\Phi(\rho,\varphi) = \rho^2\sin 2\varphi + c, \quad f(z) = \exp\left(z^2 + ic\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

283. $\Phi(\rho,\varphi) = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\rho} + c, \quad f(z) = \exp\left(\frac{1+i}{z} + ic\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

284. $\Phi(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi + \varphi + c, \quad f(z) = z\exp\left(z + ic\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

285. $\Phi(\rho,\varphi) = -e^{\rho\cos\varphi}\cos(\rho\sin\varphi) + c, \quad f(z) = \exp\left(-ie^z + ic\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

286. $\Phi(\rho,\varphi) = \rho^3\sin 3\varphi + 3\rho^2\sin 2\varphi + 3\rho\sin\varphi + 3\rho + c, \; f(z) = e^{ic+(z+1)^3}, \; c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

287. $\Phi(\rho,\varphi) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{\ln\rho} + c, \quad f(z) = 2\ln z e^{ic}, \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

288. $\Phi(\rho,\varphi) = n\rho^{-m}\cos m\varphi + c, \quad f(z) = \exp\left(niz^{-m} + ic\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

289. $R(\rho,\varphi) = c\rho e^{-\rho\sin\varphi}, \quad f(z) = c\exp\left(i\ln z\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

290. $R(\rho,\varphi) = c\exp\left[3\rho\cos(\varphi) - 5\varphi\right], \quad f(z) = cz^5 e^{3z}, \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

291. $R(\rho,\varphi) = c\exp\left[\rho^2\cos 2\varphi - 2\rho\sin\varphi\right], \quad f(z) = ce^{z^2+2iz}, \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

292. $R(\rho,\varphi) = c\exp\left(\rho^n\cos n\varphi\right), \quad f(z) = c\exp\left(z^n\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

293. $R(\rho,\varphi) = c\exp\left[e^{\rho\cos\varphi}\cos(\rho\sin\varphi)\right], \quad f(z) = c\exp\left(e^z\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

294. $R(\rho,\varphi) = c\rho^{2\varphi}, \quad f(z) = c\exp\left(i\ln^2 z\right), \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

295. $R(\rho,\varphi) = c\left(\ln^2\rho + \varphi^2\right)^{n/2}, \quad f(z) = \ln^n z, \quad c \in \mathbb{R} - \text{const}.$

 

296. $R(\rho,\varphi) = c\exp\left\{e^{-\rho\sin\varphi}\left[\sin(\varphi_0-\rho\cos\varphi)-\cos(\varphi_0-\rho\cos\varphi)\right]\right\}$, $f(z) = ce^{-(1-i)e^{i(z-\varphi_0)}}$, $c\in\mathbb{R}$ — const.

## Розділ 8

297. а) $-2-i$, б) $-2-i/3$, в) $i-2$.
298. а) $15/2+8i$, б) $17/2+4i$, в) $21/2-4i$, г) $9/2+20i$.
299. а) $6(1+2i)$, б) $8+56i/5$, в) $14+10i$.
300. а) $(1+5i)/6$, б) $23/42+97i/60$, в) $5/6+8i/3$.
301. $128/3$.
302. $i/16$.
303. $2\pi i$.
304. $-\pi/2-i\pi$.
305. $i\,(\operatorname{ch}2\pi-1)$.
306. $(1-2i)\sin 4/2$.
307. $10\operatorname{ch}1-4\operatorname{sh}1-10-2i\operatorname{sh}1$.
308. $(15\pi\operatorname{ch}\pi-11\operatorname{sh}\pi+i\,(20\pi\operatorname{ch}\pi+2\operatorname{sh}\pi))\,/25$.
309. $-18\sqrt{2}$.
310. $\sqrt{2}\operatorname{sh}\pi(1-i)/2$.
311. $1/2$.
312. $2/3$.
313. а) $0$, б) $i\operatorname{sh}2$, в) $i\operatorname{sh}2$.
314. а) $0$, б) $(\operatorname{sh}4\pi-4\pi+4\pi i)\,/8$, в) $-(\operatorname{sh}4\pi-4\pi+4\pi i)\,/8$.
315. а) $0$, б) $i\left(2^8-3^{10}\right)/16$, в) $i\left(2^8-3^{10}\right)/16$.
316. а) $0$, б) $1-\pi/4+i\,(1-\operatorname{th}1)$, в) $1-\pi/4+i\,(1-\operatorname{th}1)$.
317. $0$.
318. $0$.
319. $0$.
320. $0$.
321. $\left(2^{18}+1\right)/24$.
322. $i\,(5\operatorname{ch}(3\pi/2)-3\operatorname{ch}(5\pi/2))\,/30$.
323. $2\pi+i\,(\ln 2+1/2)$.
324. $-(9\operatorname{sh}\pi+\operatorname{sh}3\pi)\,/12$.
325. $(\operatorname{sh}1+1)+\pi i$.
326. $\pi\,(1+ie^{-\pi})$.
327. $\pi-6\operatorname{ch}2+4\operatorname{sh}2$.
328. $2\,(1+\operatorname{sh}1+\pi i)$.
329. $-3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+i\right)/4$.
330. $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\cos(2\sqrt{2}\pi)-1+i\sin(2\sqrt{2}\pi)\right)$.
331. $\left(e^{-6\pi}-1\right)(1-3i)\,/10$.
332. $4\,(1+i)\,/5$.
333. $i\sin(\pi\sqrt{3})\left(\sqrt{3}-1\right)e^{i5\pi\sqrt{3}}$.
334. $i\operatorname{sh}(2\pi)e^{6\pi}$.
335. $2\pi i$.
336. $10\pi i$.
337. $2\pi$.

 

338. $2\pi$.
339. $2\pi i - 2\pi^2$.
340. $2\pi i \ln 4 + 2\pi^2$.
341. $\pi i/3$.
342. $\pi i/5$.
343. $8\pi i$.
344. $4\pi\,(\pi + i)$.
345. $4\pi\,(-3\pi + i)$.
346. $2\pi\,(3\pi + i)$.
347. $2\sin(\pi\alpha)e^{\pi i(2k_0\alpha+\alpha+1/2)}/(\alpha+1)$, якщо $\alpha \neq -1$, $2\pi i$, якщо $\alpha = -1$.
348. $e^{-2\pi k_0\alpha}\left(e^{-2\pi\alpha} - 1\right)(1 - i\alpha)/(\alpha^2+1)$.
349. $e^{2\pi i k_0\alpha}\left(e^{2\pi i\alpha} - 1\right)/(\alpha+1)$, якщо $\alpha \neq -1$, $2\pi i$, якщо $\alpha = -1$.
350. $2\pi i R$.
351. $2\pi$.
352. $2\pi i \ln R - 2\pi^2(2k_0+1)$.
353. $2\pi i R^{n+1}/(n+1)$.
354. $4\pi R\,(\pi(2k_0+1) + i)$.

## Розділ 9

358. а) $0$, б) $\pi\,(\sin 2 + i\cos 2)$, в) $2\pi i \cos 2$.
359. а) $0$, б) $-i/\pi$, в) $i/\pi$, г) $0$.
360. а) $0$, б) $\pi i/4$, в) $0$.
361. а) $0$, б) $\frac{3\pi e^{-3}}{10}(1+3i)$, в) $\frac{\pi}{10}\left(3e^{-3} - 2\sin 1\right) + i\frac{\pi}{10}\left(9e^{-3} + 2\cos 1\right)$, г) $-\frac{\pi}{5}(\sin 1 + 3\,\mathrm{sh}\,3) + i\frac{\pi}{5}(\cos 1 + 9\,\mathrm{ch}\,3)$.
362. $10\pi(7+i)$.
363. $-2\pi e^{-5}/9!$.
364. $2\pi^5 i\left(\pi^2 - 30\right)/6!$.
365. $74\pi i 3^{19}e^{-6}/20!$.
366. $2\pi i$.
367. $4\pi i/3$.
368. $0$.
369. $e\pi i/2$.
370. $-\pi\,(2\pi\cos 1 + i\sin 1)/2$.
371. $-4i/\pi^2$.
372. $2\pi$.
373. $0$.
374. $\pi\,(1 + \cos 2 + i\,(2 - \sin 2))/4$.
375. $0$.
376. $3\pi^2 i/4$.
377. $i\pi 5!/6^6$.
378. $-\frac{2\pi i}{(b-a)^n}$.
379. $2$, якщо $n = 1$, $2^n - 1$, якщо $n > 1$.

 

# Рекомендована література

## Підручники

[1] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — 5-е изд. — Москва: Наука, 1987. — 688 с.

[2] *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. — Москва: Наука, 1979. — 320 с.

[3] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — 3-е изд. — Москва: Наука, 1985. — Т. Ч.1. Функции одного переменного. — 336 с.

[4] *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — 3-е изд. — Москва: Наука, 1968. — 448 с.

[5] *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — 3-е изд. — Москва: Наука, 1984. — 320 с.

## Збірники задач

[6] *Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — Москва: Наука, 1970. — 320 с.

[7] Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, К. А. Бежанов, Ю. В. Сидоров и др. — Москва: Наука, 1972. — 416 с.

[8] *Самойленко В. Г.* Комплексний аналіз. Приклади і задачі: навч. посіб / Під ред. за ред. В. Г. Самойленка. — Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2010. — 223 с.

[9] *Краснов М. Л., Киселев А. И., Махаренко Г. И.* Функции коммексного переменного; Задачи и примеры подробными решениями. — Москва: Эдиториал УРСС, 2003. — 208 с.

# Абетковий покажчик

Навчальне видання

**Білоколос Євген Дмитрович**
**Зайцева Людмила Леонтіївна**
**Шека Денис Дмитрович**

# Збірник задач з комплексного аналізу
## Частина І. Функції комплексної змінної

Методична розробка для студентів природничих факультетів

*Оригінал-макет виготовлено авторами за допомогою видавничого пакету LaTeX2e з використанням шрифтів PSCyr*